

3. Связь свойств расслоенного пространства и базы в векторном расслоении $V(G/H^*)$

Наследование регулярности доказано для случая полупрямого произведения произвольных групп Ли [2]. Поэтому без доказательства может быть сформулирована

Теорема 1. $V(G/H^*)$ регулярно тогда и только тогда, когда G/H^* регулярно.

Пусть теперь $\bar{A} = \text{Ad}$, т. е. $A = r_0 \text{Ad} \circ r^{-1}$.

Тогда имеет место аналогичная теорема для свойства редуктивности

Теорема 2. $V(G/H^*)$ редуктивно тогда и только тогда, когда G/H^* редуктивно.

Доказательство: Достаточность доказана в [2].

Необходимость. Пусть G/H^* редуктивно, а $g = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ — редуктивное разложение алгебры Ли g .

Чтобы доказать редуктивность $V(G/H^*)$, нужно построить редуктивное разложение пространства Vg . Первым слагаемым прямой суммы должно быть $\mathfrak{h} = T_{(0,e)} H^{V^*} = r(\mathfrak{h} \cap V') \times \mathfrak{h}$.

Построим в качестве редуктивного дополнения $\mathfrak{m} = r(\mathfrak{m} \cap V') \times \mathfrak{m}$.

Проверим, что $Vg = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$.

$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{m} = \{0\}$, следовательно, $r(\mathfrak{h} \cap V') \cap r(\mathfrak{m} \cap V') = \{0\}$, следовательно, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{m} = \{(0, 0)\}$.

$\forall (X_0, X) \in Vg$, следовательно, $\exists X \in g$, следовательно, $X = X_h + X_m$ ($X_h \in \mathfrak{h}$, $X_m \in \mathfrak{m}$), $X_0 = r(Y')$, $Y' \in V'$.

Из условия следует, что $\exists Y'_h \in \mathfrak{h} \cap V'$, $Y'_m \in \mathfrak{m} \cap V'$ такие, что $Y' = Y'_h + Y'_m$, следовательно, $(X_0, X) = (r(Y'_h), X_h) + (r(Y'_m), X_m)$. $(r(Y'_h), X_h) \in \mathfrak{h} \times r(\mathfrak{h} \cap V')$, $(r(Y'_m), X_m) \in \mathfrak{m} \times r(\mathfrak{m} \cap V')$, следовательно $Vg = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$.

Проверим, что $\text{Ad}_{H^{V^*}}(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$. $\forall (X, u) \in H^{V^*}$, $\forall (Y_0, Y) \in \mathfrak{m}$, $Y_0 = r(Y'_0)$, $Y'_0 \in \mathfrak{m} \cap V'$.

Мы установили, что присоединенное представление группы Ли VG действует следующим образом: $\text{Ad}_{(X, u)}(Y_0, Y) = (A_u Y_0 - a_{\text{Ad}_u Y} X, \text{Ad}_u Y)$. $\text{Ad}_{H^*} \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, следовательно, $\text{Ad}_u Y \in \mathfrak{m}$. $A_u Y_0 = A_u(r(Y'_0)) = r(\text{Ad}_u Y'_0)$, $u \in H^*$, $Y'_0 \in \mathfrak{m} \cap V'$, следовательно, $\text{Ad}_u Y'_0 \in \mathfrak{m} \cap V'$, следовательно, $A_u Y_0 \in r(\mathfrak{m} \cap V')$, следовательно, $a_{\text{Ad}_u Y} X = a_{\text{Ad}_u Y}(r(X')) = r(a_{\text{Ad}_u Y} X')$, $\text{Ad}_u Y \in \mathfrak{m}$, $X' \in \mathfrak{h} \cap V'$, $\text{ad}_g V' \subset V'$, $\text{ad}_h \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, следовательно, $\text{ad}_{\text{Ad}_u Y} X' \in \mathfrak{m} \cap V'$, следовательно, $A_u Y_0 - a_{\text{Ad}_u Y} X \in r(\mathfrak{m} \cap V')$.

Теорема доказана.

1. Винберг Э. Б., Онищук А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М., 1988.

2. Степанов Н. А. // Изв. вузов: Сер. Математика. 1983. № 10. С. 64.

3. Там же. 1967. № 3. С. 88.

Поступила в редакцию 09.06.94.

УДК 519.24

Е. И. МИРСКАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МОМЕНТОВ СГЛАЖЕННЫХ ОЦЕНОК СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

The moments convergence rate of the smoothed spectral densities estimates of stationary time series is investigated in this article. These estimates are based on time averaging of modified periodograms.

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс $X(t)$, $t \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ с $MX(t) = 0$, неизвестной ковариационной функцией $R(\tau)$, $\tau \in Z$ и неизвестной спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$. В [1] в качестве оценки $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, была исследована статистика $\hat{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, полученная путем осреднения модифицированных периодограмм, построенных по пересекающимся интервалам наблюдений. Оценки такого вида были предложены в [2] для гауссовских процессов. В работе [1] исследована оценка вида

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L I_N(\lambda, l), \quad (1)$$

$\lambda \in \Pi$, построенная по $T = LN - (L - 1)K$ наблюдениям для произвольных стационарных случайных процессов, где L — число пересекающихся интервалов, содержащих по N наблюдений, N, K — целые числа, а $I_N(\lambda, l)$ — модифицированная периодограмма.

В [3] в качестве оценки $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, исследована статистика

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^T W(\lambda - \frac{2\pi s}{T}) \bar{f}(\frac{2\pi s}{T}), \quad (2)$$

где $W(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$ — спектральное окно, а $\bar{f}(\lambda)$ задается выражением (1). Показано, что оценка $\bar{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, является асимптотически несмещенной при $T \rightarrow \infty$, а

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D\bar{f}(\lambda) = 0.$$

В данной работе исследуется скорость сходимости первых двух моментов статистики (2), причем $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, удовлетворяет следующему условию

$$|f(x + \lambda) - f(\lambda)| \leq C|x|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3)$$

для любых $x \in \Pi$, C — некоторая положительная постоянная. Будем предполагать, что $W(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$ — непрерывная, четная периодическая функция, удовлетворяющая требованиям:

$$a) \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} |W(x)| dx = 1, \quad 0 < \delta \leq \pi,$$

$$б) \int_{-\pi}^{\pi} W(x) dx = 1. \quad (4)$$

Также будем предполагать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} W^2(x) dx < \infty. \quad (5)$$

В дальнейшем потребуются следующий вспомогательный результат.

Лемма 1. Для любого положительного ядра $\Phi_N(x)$ на $\Pi = [-\pi, \pi]$ при любом $\beta > 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x|^\beta \Phi_N(x) dx \rightarrow 0. \quad (6)$$

Теорема 1. Если спектральная плотность, $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, удовлетворяет соотношению (3), то для математического ожидания оценки $\bar{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, задаваемой (2), имеет место равенство

$$|M\bar{f}(\lambda) - f(\lambda)| = o\left(\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(z) |z|^\alpha dz\right) + o\left(\int_{-\pi}^{\pi} |W(y)| \cdot |y|^\alpha dy\right), \quad (7)$$

где

$$\Phi_N(x) = \left(2\pi \sum_{p=0}^{N-1} [h_N(p)]^2\right)^{-1} | \varphi_N(x) |^2, \quad (8)$$

$$\varphi_N(x) = \sum_{p=0}^{N-1} h_N(p) e^{ipx}, \quad (9)$$

а $h_N(p)$ — окно просмотра данных.

Доказательство. Нетрудно показать, что если функция $g(x)$ непрерывна на Π , то выполняется равенство

$$\left| \frac{2\pi}{T} \sum_{s=1}^T g\left(\frac{2\pi s}{T}\right) - \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx \right| = o(T^{-1}). \quad (10)$$

Учитывая (10) и (4), получим, что

$$|M\bar{f}(\lambda) - f(\lambda) - \int_{-\pi}^{\pi} W(y) (M\bar{f}(y+\lambda) - f(\lambda)) dy| = o(T^{-1}).$$

Откуда, используя соотношения (3), (5), (6), (10) и теорему 1 работы [1], получим требуемый результат. Теорема доказана.

Теорема 2. Если спектральная плотность $f(\lambda)$ непрерывна на Π и удовлетворяет соотношению (3), семинвариантная спектральная плотность 4-го порядка ограничена, функция $h_N(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ограничена, имеет ограниченную вариацию и выполняется соотношение

$$\sup_N \int_{\Pi^3} |\Phi_N(y_1, y_2, y_3)| dy_1 dy_2 dy_3 \leq K_1, \quad (11)$$

где K_1 — некоторая постоянная,

$$\Phi_N(y_1, y_2, y_3) = \quad (12)$$

$$= \left((2\pi)^3 \sum_{p=0}^{N-1} [h_N(p)]^4 \right)^{-1} \Phi_N(y_1) \Phi_N(y_2) \Phi_N(y_3) \overline{\Phi_N(y_1 + y_2 + y_3)},$$

а $\Phi_N(x)$ задается выражением (9), то для дисперсии оценки $\bar{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, задаваемой (2), справедливо соотношение

$$D\bar{f}(\lambda) = \begin{cases} o\left(\frac{1}{N^{2\alpha}}\right), & \text{при } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ o\left(\frac{1}{N}\right), & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (13)$$

Доказательство. Используя определение дисперсии, свойства математического ожидания и соотношение (10), можем записать, что

$$D\bar{f}(\lambda) = \int_{\Pi^2} W(\lambda - \mu_1) W(\lambda - \mu_2) \text{cov}\{\bar{f}(\mu_1), \bar{f}(\mu_2)\} d\mu_1 d\mu_2 +$$

$$+ \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W^2(\lambda - \mu) D\bar{f}(\mu) d\mu + o(T^{-1}) = I_1 + I_2 + o(T^{-1}),$$

где $\Pi^2 = \{\mu_1 \in \Pi, \mu_2 \in \Pi, \mu_1 \neq \mu_2\}$.

Рассмотрим каждый из интегралов.

Воспользуемся неравенством Гельдера, получим

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \left(\int_{\Pi^2} |W(\lambda - \mu_1)|^2 |W(\lambda - \mu_2)|^2 d\mu_1 d\mu_2 \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\int_{\Pi^2} |\text{cov}\{\bar{f}(\mu_1), \bar{f}(\mu_2)\}|^2 d\mu_1 d\mu_2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

В [4] показано, что

$$|\text{cov}\{\bar{f}(\lambda_1), \bar{f}(\lambda_2)\}| = \begin{cases} o\left(\frac{1}{N^{2\alpha}}\right), & \text{при } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ o\left(\frac{1}{N}\right), & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (14)$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \pmod{\pi}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Откуда, учитывая (5), получим

$$|I_1| = \begin{cases} o\left(\frac{1}{N^{2\alpha}}\right), & \text{при } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ o\left(\frac{1}{N}\right), & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (15)$$

Рассмотрим I_2 .

В соответствии с формулой (11) работы [1] дисперсия оценки спектральной плотности $\bar{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, может быть представлена в виде суммы трех слагаемых A_1, A_2, A_3 . Тогда

$$I_2 = \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W^2(\lambda - \mu) A_1 d\mu + \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W^2(\lambda - \mu) A_2 d\mu +$$

$$+ \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W^2 (\lambda - \mu) A_3 d\mu = I_{21} + I_{22} + I_{23},$$

$$A_1 = \frac{2\pi}{L} \frac{\sum_{p=0}^{N-1} [h_N(p)]^4}{\left(\sum_{p=0}^{N-1} [h_N(p)]^2 \right)^2} \int_{\Pi^3} \Phi_N(y_1, y_2, y_3) f_4(y_1 + \mu, y_2 - \mu, y_3 + \mu) \times \\ \times P_L[(N-K)(y_1 + y_2)] dy_1 dy_2 dy_3,$$

где

$$P_L[(N-K)(x+y)] = \frac{1}{L} \frac{\sin^2 \frac{L(N-K)(x+y)}{2}}{\sin^2 \frac{(N-K)(x+y)}{2}}. \quad (16)$$

Если предположить, что семиинвариантная спектральная плотность 4-го порядка ограничена постоянной C_1 , то выполняется условие (11) и так как

$$P_L[(N-K)(x+y)] \leq L \quad (17)$$

для любых $x, y \in \Pi$ и произвольных целочисленных N, K , то

$$|A_1| \leq 2\pi C_1 K_1 \frac{\sum_{p=0}^{N-1} [h_N(p)]^4}{\left(\sum_{p=0}^{N-1} [h_N(p)]^2 \right)^2}.$$

Откуда, учитывая свойства окон просмотра данных и (10), получим

$$|A_1| = o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Значит,

$$|I_{21}| = o\left(\frac{1}{TN}\right).$$

Рассмотрим I_{22} .

$$I_{22} = \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W^2(\lambda - \mu) \times \\ \times \frac{1}{L} \int_{\Pi^2} \Phi_N(x - \mu) \Phi_N(y + \mu) P_L[(N-K)(x+y)] f(x) f(y) dx dy d\mu.$$

Тогда

$$|I_{22}| \leq \frac{2\pi}{T} \times \frac{1}{L} \int_{\Pi^3} W^2(\lambda - \mu) \Phi_N(x) \Phi_N(y) P_L[(N-K)(x+y)] |f(x + \mu)| \times \\ \times |f(y - \mu)| dx dy d\mu.$$

Так как спектральная плотность $f(\lambda)$ непрерывна на Π , выполняются соотношения (5), (17) и

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_N(x) dx = 1, \quad (18)$$

то

$$|I_{22}| = O(T^{-1}).$$

Рассмотрим I_{23} .

$$I_{23} \leq \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W^2(\lambda - \mu) \times$$

$$\times \frac{1}{L} \int \int_{\Pi^3} \Phi_N(x+\mu, x-\mu) \Phi_N(y-\mu, y+\mu) P_L[(N-K)(x+y)] \times$$

$$\times f(x) f(y) dx dy d\mu,$$

где

$$\Phi_N(x, y) = \left(2\pi \sum_{p=0}^{N-1} [h_N(p)]^2 \right)^{-1} \Phi_N(x) \overline{\Phi_N(y)}, \quad (19)$$

а $\Phi_N(x)$ задается выражением (9).

Учитывая непрерывность $f(\lambda)$ на Π и соотношение (17), можно показать, что

$$|I_{23}| \leq \frac{2\pi}{T} \frac{1}{L} LA^2 \int \int_{\Pi^3} W^2(\lambda-\mu) |\Phi_N(x+\mu, x-\mu)| |\Phi_N(y-\mu, y+\mu)| dx dy d\mu,$$

где A — некоторая постоянная.

Рассмотрим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_N(x+\mu, x-\mu)| dx.$$

Воспользуемся неравенством Гельдера, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_N(x+\mu, x-\mu)| dx &\leq \frac{1}{2\pi \sum_{p=0}^{N-1} [h_N(p)]^2} \times \\ &\times \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_N(x+\mu)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_N(x-\mu)|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_N(x+\mu)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_N(x)|^2 dx.$$

Откуда, учитывая (9), получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_N(x+\mu, x-\mu)| dx \leq 1 \quad (20)$$

для любых значений $\mu \in \Pi$.

В силу справедливости соотношений (20) и (5) получим, что

$$|I_{23}| = o(T^{-1}).$$

Значит,

$$|I_2| = o(T^{-1}).$$

Откуда следует требуемый результат. Теорема доказана.

Теорема 3. Если спектральная плотность $f(\lambda)$ непрерывна на Π и удовлетворяет соотношению (3), семинвариантная спектральная плотность 4-го порядка ограничена, функция $h_N(t)$, $t \in \mathbb{R}$ ограничена, имеет ограниченную вариацию и выполняется соотношение (11), то для ковариации оценки $\bar{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, задаваемой (2), справедливо соотношение

$$|\text{cov}\{\bar{f}(\lambda_1), \bar{f}(\lambda_2)\}| = \begin{cases} o\left(\frac{1}{N^{2\alpha}}\right), & \text{при } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ o\left(\frac{1}{N}\right), & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$.

Доказательство. Используя определение ковариации, свойства математического ожидания, соотношение (10), можем записать, что

$$\begin{aligned} &\text{cov}\{\bar{f}(\lambda_1), \bar{f}(\lambda_2)\} = \\ &= \int \int_{\Pi^2} W(\lambda_1 - \mu_1) W(\lambda_2 - \mu_2) \text{cov}\{\bar{f}(\mu_1), \bar{f}(\mu_2)\} d\mu_1 d\mu_2 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W(\lambda_1 - \mu) W(\lambda_2 - \mu) Df(\mu) d\mu + o(T^{-1}) = I_1 + I_2 + o(T^{-1}),$$

где $\bar{\Pi}^2 = \{\mu_1 \in \Pi, \mu_2 \in \Pi, \mu_1 \neq \mu_2\}$.

Аналогично, как и при доказательстве теоремы 2, можно показать, что

$$|I_1| = \begin{cases} o\left(\frac{1}{N^{2\alpha}}\right), & \text{при } 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} \\ o\left(\frac{1}{N}\right), & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

$$|I_2| = o(T^{-1}).$$

Теорема доказана.

В [1] показано, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Df(\lambda) = \frac{f^2(\lambda)}{L},$$

а для оценки $\bar{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, задаваемой (2), имеет место соотношение (13), т. е. при $T \rightarrow \infty$ оценка $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, является состоятельной.

1. Труш Н. Н., Мирская Е. И. // Проблемы компьютерного анализа данных и моделирования: Сб. науч. ст. Мн., 1991. С. 180.

2. Welch P. D. // IEEE Trans. Audio Electroacou. 1967. AU-15. № 2. Р. 70.

3. Труш Н. Н., Мирская Е. И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1993. № 3. С. 35.

4. Мирская Е. И. // Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение: 18—20 мая 1994 г. Мн., 1994. С. 163.

Поступила в редакцию 30.08.94.

УДК 517.977

И. Ю. СЫРОИД

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО МЕТОДА СТАБИЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

The third order system stabilization results obtained by PC with the aid of the feedback constructed by means of the optimal control synthesis in the special auxiliary problem are adduced.

Стабилизация и улучшение характеристик переходных процессов относятся к центральным проблемам теории управления [1]. Цель работы — на конкретной системе 3-го порядка представить результаты экспериментальной проверки на ПЭВМ одного нового метода стабилизации. В отличие от наиболее распространенных методов стабилизации, основанных на теории устойчивости [2], предлагаемый метод базируется на теории оптимального управления [3]. Он отличается и от метода Летова — Калмана [4, 5] из теории оптимального управления, в котором не учитываются прямые ограничения на управление.

Задача стабилизации динамической системы

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

с помощью ограниченного управления состоит в построении такой функции $u(x)$, $|u(x)| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$; $u(0) = 0$, при которой замкнутая система $\dot{x} = Ax + bu(x)$ имеет решения $x(t)$, $t \geq 0$, в окрестности начала координат и состояние $x = 0$ является асимптотически устойчивым.

Пусть $X_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n: -\epsilon e \leq x \leq \epsilon e\}$, $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Выберем $\theta: 0 < \theta < +\infty$, и в классе кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t \in T = [0; \theta]$, рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления:

$$\rho_\theta(z) = \min_p,$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = z,$$