Подобно случаю вилки (11), условием сужения вилки (15) в пределах спектра матрицы А будет, очевидно, выполнение неравенства $a_{m,k}/a_{m,\ k+1} \geqslant \|A\|$. Нетрудно убедиться (см. (17)), что $a_{m,\ k}/a_{m,\ k+1} \to \infty$ как при $k \to \infty$, так и при $m \to \infty$. В случае же равенств (16) можно показать (см. 18)), что при любых значениях $k \geqslant 0$ и $m \geqslant 1$ множитель перехода $(\lambda + \mu)a_{m,\ k+1}/a_{m-1,\ k+1}$ будет принадлежать $[0, 1)$, если выбрать $\mu \geqslant \|A\|$. Это обеспечивает монотонный характер процедуры (16) приближения $\exp(\lambda x)$ при любых фиксированных $x > 0$ и $k \geqslant 0$. Комбинируя (15), (16) и обеспечивая при этом, как и в случае метода (5), положительность и монтонное по λ возрастание соответствующих приближений к $\exp(\lambda x)$, можно строить специально ориентированные варианты вычислительных алгоритмов метода (14).

В заключение отметим, что в случае этого метода функция

$$\varepsilon_{m+1+(k)}(\lambda,\ x) = \exp(\lambda x) - E_{m+1+(k)}(\lambda,\ x)$$

в пределах спектра матрицы А монотонна по x, так как для любых $x > 0$ по построению $\partial\varepsilon_{m+1+(k)}(\lambda,\ x)/\partial x = \lambda\varepsilon_{m+1+(k-1)}(\lambda,\ x)$, а $\varepsilon_{m+1+(k-1)}(\lambda,\ x)$ при $\mu \geqslant \|A\|$ сохраняет знак на отрезке $[-\|A\|,\ 0]$ изменения λ. Очевидно, например, что привычное требование L-устойчивости (см. [4]) приводит к численным методам, которые таким важным свойством (монотонности локальной погрешности по шагу) не обладают.

1. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем. М., 1979.
2. Бобков В. В., Бобкова Н. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 2. С. 47.
3. Бобков В. В. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1967. № 4. С. 27.
4. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений: Пер. с англ.. М., 1979.

Поступила в редакцию 08.02.94

УДК 517.948.32:517.544

Л. А. КОРЗАН

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛОСЫ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

This paper gives solutions of fundamental boundary problems of flat theory of elasticity in case of the field is occuped by solid in the strip with rectilineal sections lieing on the real axis.

1. Пусть упругая полоса, занимающая область $\{|\mathrm{Im}z| < h\}$ плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, разрезана вдоль n отрезков $[a_k,\ b_k]$ действительной оси, причем выполняется $-\infty < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n < +\infty$. Напряжения и смещения в плоской задаче теории упругости описываются потенциалами Колосова—Мусхелишвили $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, связанными равенствами:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\mathrm{Re}\Phi(z),\ z = x + iy, \tag{1}$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \tag{2}$$

$$2\mu\left(\frac{\partial y}{\partial x} + i\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \tag{3}$$

где σ_x, σ_y, $\tau_{x,\ y}$ — компоненты тензора напряжений, u и v — компоненты вектора смещений, κ, μ — заданные постоянные. Функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ однозначны и аналитичны в полосе $\{|\mathrm{Im}z| < h\}$, кроме возможных разрывов на вещественной оси.

Пусть на краях полосы для функций Φ и Ω выполнены условия периодичности, т. е.

$$\Phi(x - ih) = \Phi(x + ih),\ -\infty < x < +\infty,$$
$$\Omega(x - ih) = \Omega(x + ih),\ -\infty < x < +\infty.$$

Чтобы сделать задачу более определенной, необходимо задать асимптотику неизвестных функций при $|\mathrm{Re}z| \to +\infty$. С этой целью потребуем, чтобы было:

$$\Phi(z) = \begin{cases} o(1), & \mathrm{Re}z \to +\infty \\ O(1), & \mathrm{Re}z \to -\infty \end{cases},$$

$$\Omega(z)=\begin{cases} o(1), & \mathrm{Re}z\to+\infty \\ O(1), & \mathrm{Re}z\to-\infty \end{cases}.$$

Заметим, что решения должны допускать интегрируемые особенности при $z\to a_k$ и $z\to b_k$.

2. Перейдем теперь к решению первой основной задачи, т. е. будем считать заданными значения $\sigma_y^{\pm}$, $\tau_{xy}^{\pm}$ на $L=\bigcup\limits_{k=1}^{n}(a_k,\ b_k)$. Знаками «+» и «−» отмечены, как всегда, граничные значения, принимаемые соответственно на верхнем и нижнем краях разрезов.

На основании формулы (2) граничные условия примут вид:

$$\sigma_y^+(x)-i\tau_{xy}^+(x)=\Phi^+(x)+\Omega^-(x),\ x\in L, \tag{4}$$

$$\sigma_y^-(x)-i\tau_{xy}^-(x)=\Phi^-(x)+\Omega^+(x),\ x\in L. \tag{5}$$

Складывая и вычитая (4) и (5), получим:

$$[\Phi(x)+\Omega(x)]^+ + [\Phi(x)+\Omega(x)]^- = p(x),\ x\in L, \tag{6}$$

$$[\Phi(x)-\Omega(x)]^+ - [\Phi(x)-\Omega(x)]^- = q(x),\ x\in L, \tag{7}$$

где $p(x)$, $q(x)$ — заданные на L функции:

$$p(x)=\sigma_y^+ +\sigma_y^- -i(\tau_{xy}^+ +\tau_{xy}^-),$$

$$q(x)=\sigma_y^+ -\sigma_y^- -i(\tau_{xy}^+ -\tau_{xy}^-).$$

Считаем, что $p(x)$, $q(x)$ удовлетворяют на L условию H и их асимптотика такая, как и асимптотика функций Φ и Ω.

Общее решение граничной задачи (7) дается формулой:

$$\Phi(z)-\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{q(\tau)de^{\lambda\tau}}{e^{\lambda\tau}-e^{\lambda z}}, \tag{8}$$

где в качестве аналога ядра Коши взято выражение:

$$\frac{de^{\lambda\tau}}{e^{\lambda\tau}-e^{\lambda z}},\quad \lambda=\frac{\pi}{h},$$

так как правая часть (7) исчезает при $x\to+\infty$.

Далее, полагая

$$\chi(z)=\frac{1}{\sqrt{\prod\limits_{k=1}^{n}(e^{\lambda z}-e^{\lambda a_k})(e^{\lambda z}-e^{\lambda b_k})}}, \tag{9}$$

факторизуем коэффициент задачи (6). В результате этого придем к задаче о «скачке»:

$$\left[\frac{\Phi(x)+\Omega(x)}{\chi(x)}\right]^+ - \left[\frac{\Phi(x)+\Omega(x)}{\chi(x)}\right]^- = \frac{p(x)}{\chi^+(x)},\quad x\in L. \tag{10}$$

Аналог ядра Коши, с помощью которого можно решить задачу (10), должен быть таким, чтобы сходился интеграл типа Коши с этим ядром и с плотностью $\dfrac{p(x)}{\chi^+(x)}$. Такое ядро удобно взять в следующем виде:

$$\frac{e^{n\lambda z}+1}{e^{n\lambda\tau}+1}\ \frac{de^{\lambda\tau}}{e^{\lambda\tau}-e^{\lambda z}}. \tag{11}$$

Беря интеграл типа Коши с ядром (11) и вышеуказанной плотностью, умножая его на $\chi(z)$, получим общее решение задачи (6):

$$\Phi(z)+\Omega(z)=\frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{n\lambda z}+1}{e^{n\lambda\tau}+1}\ \frac{p(\tau)}{\chi^+(\tau)}\ \frac{de^{\lambda\tau}}{e^{\lambda\tau}-e^{\lambda z}}. \tag{12}$$

Из формул (8) и (12) следует:

$$\Phi(z)=\frac{\chi(z)}{4\pi i}\int\limits_L \frac{p(\tau)}{\chi^+(\tau)}\ \frac{e^{n\lambda z}+1}{e^{n\lambda\tau}+1}\ \frac{de^{\lambda\tau}}{e^{\lambda\tau}-e^{\lambda z}}+\frac{1}{4\pi i}\int\limits_L \frac{q(\tau)de^{\lambda\tau}}{e^{\lambda\tau}-e^{\lambda z}},$$

$$\Omega(x)=\frac{\chi(z)}{4\pi i}\int_L \frac{p(\tau)}{\chi^+(\tau)}\frac{e^{n\lambda z}+1}{e^{n\lambda\tau}+1}\frac{de^{\lambda\tau}}{e^{\lambda\tau}-e^{\lambda z}}-\frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{q(\tau)de^{\lambda\tau}}{e^{\lambda\tau}-e^{\lambda z}}.$$

Таким образом, задача решена.

3. Рассмотрим теперь вторую основную задачу, т. е. будем считать, что на L заданы значения смещений $u^+(x)$, $v^-(x)$ на верхнем крае разрезов и $u^-(x)$, $v^-(x)$ на нижнем крае.

Согласно формуле (3), граничные условия запишутся так:

$$\left.\begin{aligned}\kappa\Phi^+(x)-\Omega^-(x)=2\mu(u^{+\prime}+iv^{+\prime}),\\ \kappa\Phi^-(x)-\Omega^+(x)=2\mu(u^{-\prime}+iv^{-\prime})\end{aligned}\right\}.$$

Складывая и вычитая, получим:

$$[\kappa\Phi(x)-\Omega(x)]^+ + [\kappa\Phi(x)-\Omega(x)]^- = f(x),\ x\in L, \tag{13}$$

$$[\kappa\Phi(x)+\Omega(x)]^+ - [\kappa\Phi(x)+\Omega(x)]^- = g(x),\ x\in L, \tag{14}$$

где $f(x)$, $g(x)$ — заданные на $\bigcup\limits_{k=1}^{n}(a_k,\ b_k)$ функции:

$$\left.\begin{aligned}f(x)=2\mu[(u^{+\prime}+u^{-\prime})+i(v^{+\prime}+v^{-\prime})],\\ g(x)=2\mu[(u^{+\prime}-u^{-\prime})+i(v^{+\prime}-v^{-\prime})]\end{aligned}\right\}.$$

Считаем, что эти функции удовлетворяют на L условию H.

Аналогично предыдущему общие решения граничных задач (13), (14) даются соответственно формулами:

$$\kappa\Phi(z)-\Omega(z)=\frac{\chi(z)}{2\pi i}\int_L \frac{e^{n\lambda z}+1}{e^{n\lambda\tau}+1}\frac{f(\tau)de^{\lambda\tau}}{\chi^+(\tau)(e^{\lambda\tau}-e^{\lambda z})}, \tag{15}$$

$$\kappa\Phi(z)+\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)de^{\lambda\tau}}{e^{\lambda\tau}-e^{\lambda z}}, \tag{16}$$

где $\chi(z)$ есть функция, определяемая формулой (9).

Складывая и вычитая (15) и (16), получим выражения для функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$.

4. В заключение решим смешанную задачу. В ней задаются внешние напряжения, приложенные, скажем, к верхним краям разрезов, и смещения на нижних краях. На основании формул (2), (3) граничные условия запишутся так:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_y^+-i\tau_{xy}^+=\Phi^+(x)+\Omega^-(x),\\ 2\mu\left(\frac{\partial u^-}{\partial x}+i\frac{\partial v^-}{\partial x}\right)=\kappa\Phi^-(x)-\Omega^+(x)\end{aligned}\right\}.$$

Умножая второе из этих равенств сначала на $-\frac{i}{\sqrt{\kappa}}$, а затем на $+\frac{i}{\sqrt{\kappa}}$ и складывая с первым, получаем условия на L:

$$\left[\Phi(x)+\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\Omega(x)\right]^+ - i\sqrt{\kappa}\left[\Phi(x)+\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\Omega(x)\right]^- = f_1(x), \tag{17}$$

$$\left[\Phi(x)-\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\Omega(x)\right]^+ + i\sqrt{\kappa}\left[\Phi(x)-\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\Omega(x)\right]^- = f_1(x). \tag{18}$$

Таким образом, функции $\Phi(z)+\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\,\Omega(z)$, $\Phi(z)-\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\,\Omega(z)$ определяются решением граничных задач (17) и(18), представляющих собой частные случаи задачи сопряжения $F^{+}(t)=G(t)F^{-}(t)+f(t)$, $t\in L$. Для задачи (17) $G(t)=i\sqrt{\kappa}$, для задачи (18) $G(t)=-i\sqrt{\kappa}$. Решая эти задачи по способу, указанному в [1], получаем:

$$\Phi(z)+\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\,\Omega(z)=\frac{\chi_1(z)}{2\pi i}\int_L \frac{f_1(\tau)}{\chi_1^{+}(\tau)}\,\frac{e^{n\pi z}+1}{e^{n\pi\tau}+1}\,\frac{de^{\pi\tau}}{e^{\pi\tau}-e^{\pi z}}, \qquad (19)$$

$$\Phi(z)-\frac{i}{\sqrt{\kappa}}\,\Omega(z)=\frac{\chi_2(z)}{2\pi i}\int_L \frac{f_2(\tau)}{\chi_2^{+}(\tau)}\,\frac{e^{n\pi z}+1}{e^{n\pi\tau}+1}\,\frac{de^{\pi\tau}}{e^{\pi\tau}-e^{\pi z}}, \qquad (20)$$

$$\chi_1(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{-\gamma_1}(z-b_k)^{\gamma_1-1},$$

$$\chi_2(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{-\gamma_2}(z-b_k)^{\gamma_2-1},$$

причем

$$\gamma_1=\frac{\ln(i\sqrt{\kappa})}{2\pi i}=\frac{1}{4}-\frac{i\ln\kappa}{4\pi},$$

$$\gamma_2=\frac{\ln(-i\sqrt{\kappa})}{2\pi i}=\frac{3}{4}-\frac{i\ln\kappa}{4\pi}.$$

Складывая и вычитая формулы (19) и (20), получаем явные выражения для $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, которые здесь не выписываем.

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966. С. 391.

Поступила в редакцию 25.05.94.

УДК 514.75

О. Г. ДУШКЕВИЧ

ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ НАД ОДНОРОДНЫМ Ф-ПРОСТРАНСТВОМ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ ЛИ

A connection between some properties such as regularity, reductivity, existence of invariant normalization of Ф-space and special vector fiber bundle over the Ф-space is studied.

1. Группа Ли VG

Пусть G — линейная группа Ли, а **g** — ее алгебра Ли. Будем рассматривать **g** и как группу Ли относительно операции сложения.

Aut(**g**, +) — группа автоморфизмов группы Ли (**g**, +).

Зададим действие (·) группы Ли G на **g**:

$$(\cdot):G\times\mathbf{g}\to\mathbf{g}.$$

Будем полагать, что отображение (·) удовлетворяет следующим условиям:

1) $e\cdot X=X$,
2) $v\cdot(u\cdot X)=(vu)\cdot X$,
3) $u\cdot(X+Y)=u\cdot X+u\cdot Y$, где $u, v\in G$, $X\in\mathbf{g}$, e — единица G.

Это означает, что отображение $\bar{A}$, связанное с (·) следующим образом:

$$\bar{A}_u=(u\cdot),$$

является, во-первых, гомоморфизмом (условия 1, 2), а, во-вторых, образ $\bar{A}$ лежит в Aut(**g**, +) (условие 3).

Пространство Aut(**g**, +) совпадает с полной линейной группой GL(**g**), поэтому отображение $\bar{A}$ есть линейное представление группы Ли G в **g**.