Математика и механика

УДК 519.62

В. В. БОБКОВ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Proposed way is based on the monotonic approximations of the spectral function of the transition operator of the linear (witn respect to dependent variable) approximation and admits regulation of the level of approximation on the «soft» and the «hard» sides of the spectrum of Jacobi's matrix.

Пусть в n-мерном векторном пространстве для дифференциального уравнения

$$u' = f(t, u) \tag{1}$$

поставлена задача Коши. Здесь

$$u = (u_1, ..., u_n)^T,\ f = (f_1, ..., f_n)^T,\ f_i = f_i(t, u),\ u_i = u_i(t),\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n.$$

При $n > 1$ (особенно в случае жестких [1] систем) оператор перехода по точному решению на шаге дискретизации может характеризоваться существенной скрытой разномасштабностью составляющих. В классическом разностном подходе к построению методов численного решения таких систем приближение этого многомерного оператора осуществляется опосредованно через аппроксимацию одномерных временных зависимостей, задаваемых исходными дифференциальными уравнениями вида (1). Рассматриваемый ниже способ построения численных методов базируется на ином подходе, одной из особенностей которого является непосредственная аппроксимация самого оператора перехода, что позволяет, в частности, учесть конструктивно разномасштабность его составляющих. Временные же зависимости при этом приближаются опосредованно с существенным использованием законов точного интегрирования, заложенных в условиях локальной согласованности (в частности, вида (8) из [2]) исходной и аппроксимирующей задач. В этом случае используются специальные приемы аппроксимации, в которых (в отличие, скажем, от разностной аппроксимации) уровень приближения не привязан столь существенно к величине шага сетки, что особенно важно для систем большой жесткости, предъявляющих особо высокие требования к качеству аппроксимации старших гармоник.

Чтобы иметь более глубокую информацию о структуре приближаемого оператора перехода, аппроксимируем на шаге дискретизации исходное уравнение (1) последовательностью опять же дифференциальных уравнений вида

$$y'(t+x) = A(x)y(t+x) + p_m(x),\ 0 \leqslant x \leqslant \tau, \tag{2}$$

где $A(x)$ есть квадратная матрица порядка n, а вектор $p_m(x)$ можно искать, например, в форме алгебраического многочлена степени m. Такая аппроксимация может быть осуществлена по-разному. В рамках данной работы матрица A будет предполагаться постоянной и совпадающей в точке t с матрицей Якоби исходной системы (1). Для выбора же $p_m(x)$ можно использовать, скажем, следующий прием, основанный на принципе последовательного повышения порядка точности.

На отрезке $[0, \tau]$ исходное уравнение (1) представим в виде

$$\Delta_1'(t+x) = A\Delta_1(t+x) + a_0 + \varphi_1(x),$$

где $\varphi_1(x) = f[t+x,\ y+\Delta_1(t+x)] - A\Delta_1(t+x) - a_0$, $\Delta_1(t+x) = u(t+x) - y$, $y = u(t)$, а постоянный вектор $a_0 = f(t,\ y)$ выбран из требования $\varphi_1(0) = 0$.

В качестве первого приближения к $\Delta_1(t+x)$ можно взять решение следующей задачи Коши: $\delta_1'(t+x) = A\delta_1(t+x) + a_0$, $\delta_1(t) = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \tau$. Так как разность $\Delta_1(t+x) - \delta_1(t+x) = \Delta_2(t+x)$ есть решение задачи

$$\Delta_2'(t+x) = A\Delta_2(t+x) + a_1 x + \varphi_2(x),\ \Delta_2(t) = 0,$$

где $\varphi_2(x) = \varphi_1(x) - a_1 x$, то в качестве приближения к этой разности можно использовать решение задачи Коши

$$\delta_2'(t+x) = A\delta_2(t+x) + a_1 x,\ \delta_2(t) = 0,$$

в которой значение $a_1 = f_t(t,\ y)$ выбрано на основании требования $\varphi_2'(0) = 0$, при этом по построению выполняется также и равенство $\varphi_2(0) = 0$.

Далее аналогично предыдущему можно записать:

$$\delta_3'(t+x) = A\delta_3(t+x) + a_2 x^2,\ \delta_3(t) = 0,\ \varphi_3(0) = \varphi_3'(0) = \varphi_3(\tau) = 0,$$

$$a_2 = [f(t+\tau,\ y+\delta_1(t+\tau)+\Delta_2(t+\tau)) - A(\delta_1(t+\tau)+\Delta_2(t+\tau)) - a_0 - a_1\tau]/\tau^2.$$

Так как в точках $t+\alpha\tau$ при $\alpha \neq 0$ мы не располагаем даже локально точной информацией об интересующем нас решении, то вместо a_2 пока можно использовать лишь приближающий его вектор

$$\overset{[1]}{a_2} = [f(t+\tau,\ y+\delta_1(t+\tau)+\delta_2(t+\tau)) - A(\delta_1(t+\tau)+\delta_2(t+\tau)) - a_0 - a_1\tau]/\tau^2.$$

Это позволяет взамен $\delta_3(t+x)$ найти приближение $\overset{[4]}{\delta_3}(t+x)$ к $\Delta_3(t+x) = \Delta_2(t+x) - \delta_2(t+x)$ через решение задачи Коши

$$\overset{[4]}{\delta_3}{}'(t+x) = A\overset{[4]}{\delta_3}(t+x) + \overset{[1]}{a_2}x^2,\ \overset{[4]}{\delta_3}(t) = 0.$$

Таким образом, на рассмотренной стадии процесса последовательного уточнения решения будем иметь (обозначения см. в [3]):

$$u(t+x) \approx \overset{[4]}{y}(t+x) = y + \delta_1(t+x) + \delta_2(t+x) + \overset{[4]}{\delta_3}(t+x).$$

На следующем этапе этого процесса вместо требования $\varphi_3(\tau) = 0$, однозначно определившего вид вектора a_2, можно для нахождения значения нового параметра a_3 поставить условие $\varphi_3'(\tau) = 0$. Вместо точки $x = \tau$ на двух следующих стадиях можно взять, например, точку $x = \tau/2$. Полученное при этом приближение будет иметь вид:

$$\overset{[7]}{y}(t+x) = y + \delta_1(t+x) + \delta_2(t+x) + \overset{[7]}{\delta_3}(t+x) + \ldots + \overset{[7]}{\delta_6}(t+x).$$

Так как в рамках данной работы мы сможем (из-за большого объема информации) рассмотреть специализированные методы численного решения систем вида (2) лишь в случае $m = 0$, то и при описании процесса построения таких систем ограничимся лишь изложенной выше общей схемой.

Как и в [2], приближение к спектральной функции $\exp(\lambda x)$ оператора $\exp(Ax)$ для случая системы (см. (2) при $m = 0$)

$$u'(t+x) = Au(t+x) + a,\ 0 \leqslant x \leqslant \tau, \tag{3}$$

при любом фиксированном значении шага будем искать в виде многочлена по переменной λ, изменяющейся на отрезке, границы которого привязаны к границам спектра матрицы A (изложение будет ориентировано на случай устойчивой недефектной матрицы с вещественным спектром).

Если рассматриваемые в [2] численные методы характеризуются высоким уровнем приближения оператора перехода только в «жесткой» части спектра матрицы A (и в силу этого хорошо приспособлены для расчета погранслоя), то ниже внимание будет уделено как методам с акцентом в аппроксимации на «мягкую» часть этого спектра, так и таким методам, в которых с изменением во времени характеристик численно наблюдаемой траектории соотношение между уровнями аппроксимации в обеих частях спектра можно регулировать.

При $E(A, x) = \exp(Ax)$ (см. (3)) требования локальной согласованности операторов (8) из [2], естественно, выполняются и имеет место равенство $E(A,x) = I + A\int_0^x E(A, \xi)d\xi$, на основе которого можно организовать итерационную процедуру

$$E_{(k+1)}(A, x) = I + A\int_0^x E_{(k)}(A, \xi)d\xi, \quad k = 0, 1, ..., \tag{4}$$

порождающую заданием $E_{(0)}(A, x)$ семейство численных методов вида

$$\hat{y} = y + S_{(k)}(A, \tau)(Ay + a), \tag{5}$$

где

$$y \approx u(t), \quad \hat{y} \approx u(t+\tau), \quad S_{(k)}(A, \tau) = \int_0^\tau E_{(k)}(A, \xi)d\xi. \tag{6}$$

Аналогичные (4), (6) равенства можно записать и для спектральных функций $E_{(j)}(\lambda, x)$ и $S_{(j)}(\lambda, x)$ соответствующих операторов.

Если, как и в [2], выбрать $E_{(0)}(\lambda, x) = \exp(-\mu x)$, где $\mu > 0$, то, согласно (4), будем иметь:

$$E_{(0)}(\lambda, x) = \rho_0(-\mu x), \tag{7}$$

$$E_{(k+1)}(\lambda, x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}(\lambda x)^i + (\lambda x)^{k+1}\rho_{k+1}(-\mu x).$$

Здесь

$$\rho_{k+1}(-\mu x) = \left[\rho_k(-\mu x) - \frac{1}{k!}\right]/(-\mu x), \quad \rho_0(-\mu x) = \exp(-\mu x). \tag{8}$$

Справедливость равенств (7), (8) с учетом (4) проверяется непосредственно, если принять во внимание соотношение

$$\int_0^x \xi^k \rho_k(-\mu\xi)d\xi = x^{k+1}\rho_{k+1}(-\mu x), \tag{9}$$

легко доказываемое по индукции.

Можно показать (см. (4)), что для функций (7) верны рекуррентные формулы

$$E_{(k+1)}(\lambda, x) = E_{(k)}(\lambda, x) + \lambda^k(\lambda + \mu)x^{k+1}\rho_{k+1}(-\mu x). \tag{10}$$

Из (10) следует, что

$$E_{(k+1)}(\lambda, x) - E_{(k)}(\lambda, x) = \tag{11}$$

$$= \lambda x\left[E_{(k)}(\lambda, x) - E_{(k-1)}(\lambda, x)\right]\rho_{k+1}(-\mu x)/\rho_k(-\mu x).$$

С учетом (6), (9) и для функций $S_{(k)}(\lambda, x)$ также можно записать равенства, аналогичные (4), (10), (11).

Можно показать (см. (8), (9)), что отношения $\rho_{k+1}(-\mu x)/\rho_k(-\mu x)$ при $k \to \infty$ стремятся к нулю значительно медленнее, чем их составляющие, в связи с чем вместо (8) можно использовать следующие рекурсивные равенства:

$$\rho_{k+1}(-\mu x)/\rho_k(-\mu x) = \frac{1}{k} + \frac{1}{\mu x}\left[\frac{1}{k}\cdot\rho_{k-1}(-\mu x)/\rho_k(-\mu x) - 1\right]. \tag{12}$$

Так как (см. (8)) $\rho_{k+1}(-\mu\tau) \to 1/(k+1)!$ при $\tau \to 0$, то норма локальной погрешности метода (5) является (см. (7)) малой величиной порядка τ^{k+2}. Значительно больший интерес представляют аппроксимационные характеристики, даваемые формулами

$$E_{k+1}(-\mu, \tau) = \exp(-\mu\tau), \quad \partial^i E_{k+1}(0, \tau)/\partial\lambda^i = \tau^i, \quad i = 0, 1, ..., k, \tag{13}$$

верными при любом фиксированном значении τ (см. (4), (7), (10)).

В случае $\mu \geq \|A\|$ при любом $k>0$ пара функций $E_{(k-1)}(\lambda, x)$ и $E_{(k)}(\lambda, x)$ в пределах спектра матрицы A образуют вилку (см. (7), (10)) для $\exp(\lambda x)$. Чтобы эта вилка с ростом k сужалась, достаточно (см. (11)) выполнения условия $\rho_k(-\mu x)/\rho_{k+1}(-\mu x) \geq \|A\|x$. Как уже отмечалось в [2], выбором k следует добиваться не только обеспечения требований к локальной погрешности метода, но также положительности и монотонного по λ возрастания в пределах спектра матрицы A границ указанной вилки. Сделать это можно по-разному. Один из способов сводится к непосредственной проверке при $\lambda = -\|A\|$ в случае $\mu \geq \frac{k}{k-1}\|A\| \ (k>1)$ знаков нижней и производной по λ верхней границ новой вилки.

Заметим, что наряду с описанной выше реализацией метода (5) можно использовать и другие способы его реализации, например вариант, основанный на представлении (7) в виде

$$E_{(k+1)}(\lambda, x) =$$

$$= \left(1 + \frac{\lambda x}{1}\left(1 + \frac{\lambda x}{2}\left(1 + \ldots + \frac{\lambda x}{k}\left(1 + \frac{\lambda x}{k+1}(k+1)!\rho_{k+1}(-\mu x)\right)\right)\ldots\right)\right),$$

при этом взамен (12) можно использовать равенства (см. (8))

$$(k+1)!\rho_{k+1}(-\mu x) = (1 - k!\rho_k(-\mu x))(k+1)/(\mu x).$$

Используем, далее, оператор $E_{m+1}(A, x)$ из [2] в качестве исходного в (4). Тогда (на уровне спектральных функций) можно записать равенства вида $E_{m+1+(k)}(\lambda, x) = 1 + \lambda S_{m+1+(k-1)}(\lambda, x)$, где

$$S_{m+1+(k-1)}(\lambda, x) = \int_0^x E_{m+1+(k-1)}(\lambda, \xi)d\xi,$$

$$E_{m+1+(-1)}(\lambda, x) = E^*_m(\lambda, x), \ E_{1+(k)}(\lambda, x) = E_{(k+1)}(\lambda, x).$$

Тем самым взамен (5) получаем метод

$$\hat{y} = y + S_{m+1+(k-1)}(A, \tau)(Ay + a), \qquad (14)$$

который при $m = o$ переходит в (5), а при $k = 0$ совпадает с методом (15) из [2]. Очевидно, что порядок точности метода (14) на m единиц выше в сравнении с (5) (см. также (13)).

Теперь взамен (11) можно записать уже два типа соотношений:

$$E_{m+1+(k)}(\lambda, x) - E_{m+1+(k-1)}(\lambda, x) = \qquad (15)$$

$$= \frac{a_{m,\,k+1}}{a_{m,\,k}}\lambda\left[E_{m+1+(k-1)}(\lambda, x) - E_{m+1+(k-2)}(\lambda, x)\right],$$

$$E_{m+1+(k)}(\lambda, x) - E_{m+(k)}(\lambda, x) = \qquad (16)$$

$$= \frac{a_{m,\,k+1}}{a_{m-1,\,k+1}}(\lambda + \mu)\left[E_{m+(k)}(\lambda, x) - E_{m-1+(k)}(\lambda, x)\right].$$

Здесь

$$a_{m,\,k+1} = \int_0^x a_{m,\,k}(\xi)d\xi, \quad a_{m,\,0} = \frac{x^m}{m!}\rho_0(-\mu x), \ a_{0,\,k} = x^k\rho_k(-\mu x). \qquad (17)$$

Из (17) следует, что

$$\mu a_{m,\,k} = a_{m-1,\,k} - a_{m,\,k-1}, \ k>0, \ m>0. \qquad (18)$$

Для нахождения коэффициентов в правых частях равенств (15), (16) вместо (18), как и ранее, лучше применять расчетные правила для отношений. Например, в случае (15) можно использовать рекурсивные формулы (см. (18))

$$\frac{a_{i+1,\,j+1}}{a_{i+1,\,j}} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{a_{i,\,j+1}}{a_{i,\,j}}\left(\mu + \frac{a_{i+1,\,j-1}}{a_{i+1,\,j}}\right) - 1\right].$$

Аналогичные формулы можно записать и применительно к (16).

Подобно случаю вилки (11), условием сужения вилки (15) в пределах спектра матрицы A будет, очевидно, выполнение неравенства $a_{m,k}/a_{m,\,k+1} \geqslant \|A\|$. Нетрудно убедиться (см. (17)), что $a_{m,\,k}/a_{m,\,k+1} \to \infty$ как при $k\to\infty$, так и при $m\to\infty$. В случае же равенств (16) можно показать (см. 18)), что при любых значениях $k\geqslant 0$ и $m\geqslant 1$ множитель перехода $(\lambda+\mu)a_{m,\,k+1}/a_{m-1,\,k+1}$ будет принадлежать $[0,1)$, если выбрать $\mu\geqslant\|A\|$. Это обеспечивает монотонный характер процедуры (16) приближения $\exp(\lambda x)$ при любых фиксированных $x>0$ и $k\geqslant 0$. Комбинируя (15), (16) и обеспечивая при этом, как и в случае метода (5), положительность и монтонное по λ возрастание соответствующих приближений к $\exp(\lambda x)$, можно строить специально ориентированные варианты вычислительных алгоритмов метода (14).

В заключение отметим, что в случае этого метода функция

$$\varepsilon_{m+1+(k)}(\lambda,\ x)=\exp(\lambda x)-E_{m+1+(k)}(\lambda,\ x)$$

в пределах спектра матрицы A монотонна по x, так как для любых $x>0$ по построению $\partial\varepsilon_{m+1+(k)}(\lambda,\ x)/\partial x=\lambda\varepsilon_{m+1+(k-1)}(\lambda,\ x)$, а $\varepsilon_{m+1+(k-1)}(\lambda,\ x)$ при $\mu\geqslant\|A\|$ сохраняет знак на отрезке $[-\|A\|,\ 0]$ изменения λ. Очевидно, например, что привычное требование L-устойчивости (см. [4]) приводит к численным методам, которые таким важным свойством (монотонности локальной погрешности по шагу) не обладают.

1. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем. М., 1979.
2. Бобков В. В., Бобкова Н. А. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1994. № 2. С. 47.
3. Бобков В. В. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1967. № 4. С. 27.
4. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений: Пер. с англ.. М., 1979.

Поступила в редакцию 08.02.94

УДК 517.948.32:517.544

Л. А. КОРЗАН

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛОСЫ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

This paper gives solutions of fundamental boundary problems of flat theory of elasticity in case of the field is occuped by solid in the strip with rectilineal sections lieing on the real axis.

1. Пусть упругая полоса, занимающая область $\{|\mathrm{Im}z|<h\}$ плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, разрезана вдоль n отрезков $[a_k,\ b_k]$ действительной оси, причем выполняется $-\infty<a_1<b_1<a_2<b_2<\ \ldots\ <\ <a_n<b_n<+\infty$. Напряжения и смещения в плоской задаче теории упругости описываются потенциалами Колосова—Мусхелишвили $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, связанными равенствами:

$$\sigma_x+\sigma_y=4\mathrm{Re}\Phi(z),\ z=x+iy, \tag{1}$$

$$\sigma_y-i\tau_{xy}=\Phi(z)+\Omega(\bar z)+(z-\bar z)\overline{\Phi'(z)}, \tag{2}$$

$$2\mu\left(\frac{\partial y}{\partial x}+i\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\kappa\Phi(z)-\Omega(\bar z)-(z-\bar z)\overline{\Phi'(z)}, \tag{3}$$

где σ_x, σ_y, $\tau_{x,\,y}$ — компоненты тензора напряжений, u и v — компоненты вектора смещений, κ, μ — заданные постоянные. Функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ однозначны и аналитичны в полосе $\{|\mathrm{Im}z|<h\}$, кроме возможных разрывов на вещественной оси.

Пусть на краях полосы для функций Φ и Ω выполнены условия периодичности, т. е.

$$\Phi(x-ih)=\Phi(x+ih),\ \ -\infty<x<+\infty,$$
$$\Omega(x-ih)=\Omega(x+ih),\ \ -\infty<x<+\infty.$$

Чтобы сделать задачу более определенной, необходимо задать асимптотику неизвестных функций при $|\mathrm{Re}z|\to+\infty$. С этой целью потребуем, чтобы было:

$$\Phi(z)=\begin{cases} o(1), & \mathrm{Re}z\to+\infty \\ O(1), & \mathrm{Re}z\to-\infty\end{cases},$$