

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА В АЛГЕБРЕ МНЕМОФУНКЦИИ

Algebra of mnemofunctions with everywhere defined Mellin's transformation is constructed.

В настоящей работе построена алгебра мнемофункций со всюду определенными сверткой и преобразованием Меллина, а также рассмотрены теоремы типа Пэли — Винера для указанной алгебры.

1. Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $a < b$ . Возьмем две монотонные последовательности действительных чисел  $(a_n)$  и  $(b_n)$  такие, что  $a_n \rightarrow a + 0$  и  $b_n \rightarrow b - 0$ . Рассмотрим пространство  $\mu(a, b) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mu_{a_n, b_n}$ , где  $\mu_{a_n, b_n}$  — пространство гладких комплекснозначных функций  $f$ , определенных на  $I = (0, \infty)$ , таких, что  $\sup_{x>0} |k_{a_n, b_n}(x) x^{k+1} f^{(k)}(x)| < \infty$ , а

$$k_{a, b}(x) = \begin{cases} x^{-a}, & 0 < x \leq 1, \\ x^{-b}, & x > 1. \end{cases}$$

На  $\mu_{a_n, b_n}$  вводится топология с помощью семейства полуномр

$$\gamma_{s, n}(f) = \max_{k \leq s} \sup_{x > 0} |k_{a_n, b_n}(x) x^{k+1} f^{(k)}(x)|.$$

Так как если  $a \leq c$  и  $d \leq b$ , то  $\mu_{c, d} \subset \mu_{a, b}$ , и на  $\mu(a, b)$  вводится топология индуктивного предела. Причем определение  $\mu(a, b)$  не зависит от выбора  $(a_n)$  и  $(b_n)$ . Известно [4], что:

- 1)  $\mu_{a_n, b_n}$  — полное, векторное пространство Фреше  $\forall a_n, b_n$ ;
- 2)  $D(I)$  плотно в  $\mu(a, b)$  и  $\mu(a, b)$  полно, следовательно,  $\mu'(a, b) \subset D'(I)$ .

Введем новое пространство  $V(a, b) = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_{-a_n, -b_n}$ ;  $V_{-a_n, -b_n}$  определим как пространство гладких комплекснозначных функций  $\varphi$ , определенных на  $I = (0, \infty)$ , таких, что

$$\sup_{x>0} |k_{-a_n, -b_n}(x) x^k \varphi^{(k)}(x)| < \infty.$$

На  $V_{-a_n, -b_n}$  вводится топология с помощью семейства полуномр

$$V_{s, n}(\varphi) = \max_{k \leq s} \sup_{x > 0} |k_{-a_n, -b_n}(x) x^k \varphi^{(k)}(x)|.$$

На  $V(a, b)$  вводим топологию проективного предела при помощи семейства полуномр  $V_{s, n}$ , где  $s, n \geq 0$ . Определение  $V(a, b)$ , очевидно, не зависит от выбора последовательностей  $(a_n)$  и  $(b_n)$ .

**Теорема 1.**  $V(a, b)$  — пространство Фреше, непрерывно и плотно вложенное в  $\mu(a, b)$ .

На пространстве  $\mu'(a, b)$  можно ввести свертку меллиновского типа [4]. Пусть  $f(x), g(x) \in \mu'(a, b)$ . Сверткой меллиновского типа называется выражение  $f \vee g$ , определенное формулой  $((f \vee g)(x), \varphi(x)) = (f(x), (g(y), \varphi(xy)))$ .

Свертка меллиновского типа на  $\mu'(a, b)$  согласована [4] с обычной сверткой меллиновского типа, которая задается формулой

$$(f, g)(x) = \int_0^{\infty} f(y) g(x/y) 1/y dy, \quad x > 0.$$

**Теорема 2.** Пусть  $f, g \in V(a, b)$ , тогда  $f, g \in V(a, b)$ , причем свертка меллиновского типа непрерывна на  $V(a, b)$ .

Пусть  $f \in \mu'(a, b)$ , тогда преобразование Меллина  $f$  на  $\mu'(a, b)$  задается формулой  $M(f) = (f(t), x^{s-1}) = F(s)$ , где  $M(f)$  — преобразование Меллина  $f$  в  $\mu'(a, b)$ , а  $F(s)$  — аналитическая функция в открытой полосе  $a < \text{Res} < b$  [4].

Опишем образ функций, которые являются преобразованием Мелли-

на функций из  $V(a, b)$ . Для этого введем в рассмотрение новое пространство  $H(a, b)$ . Это множество функций, аналитических в открытой полосе  $a < \text{Re } s < b$  и удовлетворяющих условию:  $\sup_{\text{Re } s \in A} |s^k F^{(l)}(s)| < \infty$ , где  $A$  — любое компактное подмножество интервала  $(a, b)$ , а  $k$  и  $l$  — любые целые неотрицательные числа,  $s \in \mathbb{C}$ . На  $H(a, b)$  введем топологию с помощью семейства полунорм:

$$h_{s, v, A}(F) = \max_{k, l, v} \sup_{\text{Re } z \in A} |z^l F^{(k)}(z)|,$$

где  $s, v, i, l \geq 0$  и целые, а  $A$  — любое компактное подмножество интервала  $(a, b)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** Пусть  $M$  — преобразование Меллина, тогда:

- 1)  $M: V(a, b) \rightarrow H(a, b)$  — непрерывный оператор;
- 2)  $M^{-1}: H(a, b) \rightarrow V(a, b)$  — непрерывный оператор.

**Следствие 1.** 1)  $M: V(a, b) \rightarrow H(a, b)$  — биекция;

2)  $M^{-1}: H(a, b) \rightarrow V(a, b)$  — биекция и задается формулой:

$$f(x) = 1/(2\pi i) \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) x^{-s} ds,$$

где  $f(x)$  не зависит от выбора  $\sigma$  в пределах интервала  $(a, b)$ .

Ранее мы установили, что  $V(a, b)$  — векторное пространство Фреше. К сожалению,  $V(a, b)$  не является алгеброй относительно обычного умножения, поэтому введем на  $V(a, b)$  другую операцию умножения:  $\forall f, g \in V(a, b)$ , положим

$$f(x) \text{pg}(x) = f(x)g(x)x^\alpha,$$

где  $\alpha$  — фиксированное число из интервала  $(a, b)$ .

**Теорема 4.** Введенная операция умножения непрерывна на  $V(a, b)$ .

**Замечание.** Если  $a < 0 < b$ , то  $\alpha$  можно взять равным 0, тогда  $f \text{pg} = fg$ , т. е. если  $a < 0 < b$ , то  $V(a, b)$  — алгебра относительно обычной операции умножения!

**Теорема 5.** Справедливы следующие утверждения:

- 1) Множество  $H(a, b)$  является алгеброй и умножение на  $H(a, b)$  — непрерывная операция.
- 2) Дифференцирование на  $H(a, b)$  — непрерывный оператор.
- 3) Умножение на  $z^k$ , где  $z \in \mathbb{C}$ ,  $k \geq 0$  — целое, непрерывный оператор на  $H(a, b)$ .
- 4) Обычное умножение на  $(\ln x)^k$ , где  $k \geq 0$  — целое, а  $x \in I$  — непрерывный оператор на  $V(a, b)$ .
- 5)  $x^k D^k$  — непрерывный оператор на  $V(a, b)$ .
- 6)  $(xD)^k$  — непрерывный оператор на  $V(a, b)$ .

Теперь  $V(a, b)$  — алгебра, непрерывно и плотно вложенная в  $\mu'(a, b)$ . Это значит, что, используя общую теорию построения новых обобщенных функций [1],  $\mu'(a, b)$  можно вложить в некоторую алгебру  $G(V(a, b))$  и таким образом определить (корректно) умножение для функций из  $\mu'(a, b)$ !

Рассмотрим подробнее возможность такого вложения.

2. Обозначим через  $G(H(a, b))$  (соотв.  $G(V(a, b))$ ) множество всех последовательностей из  $H(a, b)$  (соответственно  $V(a, b)$ ).  $G(H(a, b))$  — алгебра с операцией обычного покоординатного умножения.  $G(V(a, b))$  — алгебра с операцией покоординатного умножения  $\text{p.}$  Введем следующие множества:

$$G_M(V(a, b)) =$$

$$= \{ (g_k) \in G(V(a, b)) : \forall \alpha = (s, n) \exists m, c > 0, V_\alpha(g_k) \leq c_\alpha k^m, \forall k \},$$

$$N(V(a, b)) = \{ (g_k) \in G(V(a, b)) : \forall \alpha \forall m \exists c > 0, V_\alpha(g_k) \leq c_\alpha k^{-m}, \forall k \}.$$

Аналогично вводятся множества  $G_M(H(a, b))$  и  $N(H(a, b))$ .

Пусть  $G(V(a, b)) = G_M(V(a, b))/N(V(a, b))$  и  $G(H(a, b)) = G_M(H(a, b))/N(H(a, b))$ .

$b)) / N(H(a, b))$ . Легко устанавливается [2], что  $G(H(a, b))$  и  $G(R(a, b))$  — алгебры и тот факт, что если  $F: V(a, b) \rightarrow H(a, b)$  ( $F: V(a, b) \rightarrow V(a, b)$ ,  $F: H(a, b) \rightarrow H(a, b)$ ) — непрерывный оператор, то он по координатам [2] поднимается до отображения  $F: G(V(a, b)) \rightarrow G(H(a, b))$ , ( $F: G(V(a, b)) \rightarrow G(V(a, b))$ ,  $F: G(H(a, b)) \rightarrow G(H(a, b))$ ).

Теперь, вспоминая теорему 3 и ее следствие, легко получаем:

**Теорема 6.** Если  $M$  — преобразование Меллина на  $G(V(a, b))$ , то:

- 1)  $M: G(V(a, b)) \rightarrow G(H(a, b))$  — биекция,
- 2)  $M^{-1}: G(H(a, b)) \rightarrow G(V(a, b))$  — биекция.

Далее, так как  $V(a, b) \subset \mu'(a, b)$ , а в  $\mu'(a, b)$  преобразование Меллина обладает многими полезными свойствами, то, используя теоремы 2, 3, 5, получаем:

**Теорема 7.** Пусть  $f, g \in G(V(a, b))$  и  $F, G \in G(H(a, b))$ , где  $F = M(f)$ , а  $G = M(g)$ , тогда:

- 1)  $M((xD)^k f(x)) = (-1)^k s^k M(f)(s)$ ,  $s \in \mathbb{C}$ ,
- 2)  $M((\ln x)^k f(x)) = (M(f)(s))^k$ ,
- 3)  $M(f \cdot g) = M(f)M(g)$ ,
- 4)  $M^{-1}(FG) = M^{-1}(F) \cdot M^{-1}(G)$ ,
- 5)  $(xD)^k (f \cdot g) = ((xD)^k f) \cdot g = f \cdot ((xD)^k g)$ ,
- 6)  $M(x^k D^k f(x)) = (-1)^k (s)_k F(s)$ , где  $(s)_k = s(s+1) \dots (s+k-1)$ .

Формулы 1) — 6) имеют смысл, так как отображения, определенные в теореме 5, по координатам поднимаются на пространство  $G(V(a, b))$  ( $G(H(a, b))$ ).

Рассмотрим вопрос о вложении  $\mu'(a, b)$  в  $G'(V(a, b))$ .

**Теорема 8.**  $\mu'(a, b)$  вкладывается в  $G(V(a, b))$  и это вложение инъективно.

Выявим связь между преобразованием Меллина в  $\mu'(a, b)$  и преобразованием Меллина функций из  $\mu'(a, b)$  в  $G(V(a, b))$ . Для этого сформулируем следующую теорему:

**Теорема 9.** Пусть  $g \in \mu'(a, b)$  и  $F(s) = M(g)$  в  $\mu'(a, b)$ , и пусть  $g \rightarrow (g_k) + N(V(a, b))$  в  $G(V(a, b))$  и  $(F_k(s)) + N(H(a, b)) = M((g_k) + N(V(a, b)))$ , тогда  $F_k(s) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F(s)$  точечно для  $\forall s$  таких, что  $\text{Res} \in (a, b)$ .

3. Теоремы Пэли — Винера для алгебры  $G(V(a, b))$ .

Для каждого целого  $n > 0$  обозначим:

$$\underline{Z}(n) = \{ \psi \in H(\mathbb{C}) : \forall k \exists d_k > 0, |z^k \psi(z)| \leq d_k \exp(n|z|), z = x + iy \}$$

$$\underline{Z} = \bigcup_{n > 0} \underline{Z}(n).$$

**Теорема 10.** Множество  $\underline{Z}$  является алгеброй.

$\underline{Z}$  является подалгеброй  $H(a, b)$  для любых  $a < b$ . На  $\underline{Z}$  будем рассматривать топологию из  $H(a, b)$ . Обозначим  $G(\underline{Z})$  (соответственно  $G(D(I))$ ) множество всех последовательностей из  $\underline{Z}$  (соответственно  $D(I)$ ). Введем следующие множества:

$$G_M(D(I)) = G_M(V(a, b)) \cap G(D(I)), \quad G_M(\underline{Z}) = \\ = G_M(H(a, b)) \cap G(\underline{Z}),$$

$$N(D(I)) = G(D(I)) \cap N(V(a, b)), \quad N(\underline{Z}) = N(H(a, b)) \cap G(\underline{Z}).$$

Легко устанавливается следующий факт:

**Теорема 11.** Множество  $G_M(D(I))$  (соответственно  $G_M(\underline{Z})$ ) является подалгеброй в  $G_M(V(a, b))$  (соответственно  $G_M(H(a, b))$ ), а  $N(D(I))$  (соответственно  $N(\underline{Z})$ ) является идеалом в  $G_M(D(I))$  (соответственно  $G_M(\underline{Z})$ ).

Определим алгебры мнемофункций:

$$G(D(I)) = G_M(D(I)) / N(D(I)), \quad G(\underline{Z}) = G_M(\underline{Z}) / N(\underline{Z}).$$

Определим вложения:

$$j_{DV}:G(D(I)) \ni u = (u_k) + N(D(I)) \rightarrow$$

$$\rightarrow (u_k) + N(V(a, b)) \in G(V(a, b)),$$

$$j_{ZH}:G(\underline{Z}) \ni u = (u_k) + N(\underline{Z}) \rightarrow (u_k) + N(H(a, b)) \in G(H(a, b)).$$

**Теорема 12.** Отображения  $j_{DV}$  и  $j_{ZH}$  инъективны.

**Доказательство.** Пусть  $u, v \in G(D(I))$  и  $j_{DV}(u) = j_{DV}(v)$ . Это означает, что  $(u_k - v_k) \in N(V(a, b))$ . Но поскольку

$$u, v \in G(D(I)), \text{ то } (u_k - v_k) \in G(D(I)).$$

Таким образом,

$$(u_k - v_k) \in N(V(a, b)) \cap G(D(I)) = N(D(I)),$$

но тогда  $u = v$ . Точно так же доказывается, что  $j_{ZH}$  — инъекция. В связи с этим  $G(D(I)) \subset G(V(a, b))$  и  $G(\underline{Z}) \subset G(H(a, b))$ .

Как уже было сказано,  $G(D(I)) \subset G(V(a, b))$ , значит, можно определить сужение преобразования Меллина на  $G(D(I))$ .

**Теорема 13.** Преобразование Меллина отображает биективно  $G(D(I))$  на  $G(\underline{Z})$ .

**Доказательство.** Согласно теореме Пэли — Винера [3,4], преобразование  $M: D(I) \rightarrow \underline{Z}(R)$  биективно. Поэтому биективно отображение  $M: G(D(I)) \ni (u_k) \rightarrow (Mu_k) \in G(\underline{Z})$ . Из непрерывности  $M: V(a, b) \rightarrow H(a, b)$  немедленно вытекает биективность следующих отображений:

$$M: G_M(D(I)) \rightarrow G_M(\underline{Z}), \quad M: N(D(I)) \rightarrow N(\underline{Z}).$$

Отсюда следует, что биективно  $M: G(D(I)) \rightarrow G(\underline{Z})$ .

Эта теорема является расширением теоремы Пэли — Винера на алгебру мнемифункций  $G(V(a, b))$ .

Пусть  $E'(R)$  — пространство распределений с компактным носителем. Мы имеем естественные вложения [4]:  $E'(R) \subset \mathcal{C}'(a, b) \subset G(V(a, b))$ .

Если  $u \in E'(R) \subset G(V(a, b))$ , то обозначим  $M_{Eu}$  преобразование Меллина от  $u$  в  $E'(R)$ .

**Теорема 14.** Пусть  $u \in E'(R) \subset G(V(a, b))$ . Тогда  $Mu \in G(H(a, b))$ . Причем  $(\mu u)_k \rightarrow M_{Eu}$  для любых  $s$  из полосы  $a < \text{Res} < b$ .

Эта теорема является аналогом теоремы Пэли — Винера — Шварца для алгебры мнемифункций  $G(V(a, b))$ .

1. Антонович А. Б., Радыно Я. В. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 2. С. 267.

2. Радыно Я. В., Нго Фухань, Сабра Рамадан // Докл. РАН. 1992. Т. 327. № 1. С. 21.

3. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М., 1965.

4. Землян А. Г. Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1974.