$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -2\frac{dx_1}{dt} - 2x_1 + 2x_1^2. \qquad (17)$$

Уравнение (10) для (17) имеет корни $-1 \pm i$. Тогда, по теореме 5, для системы (16) существует определенно положительная в проколотой окрестности точки O(0; 0) квадратичная форма $V(x_1, x_2^2)$ такая, что

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(16)} = x_2 \left\{ -x_1^2 - x_2^4 + U(x_1, x_2^2) \right\}.$$

Согласно теореме 7.5.4. из [6, с. 248], это означает неустойчивость состояния равновесия O(0; 0) системы (16).

1. Мироненко В. И. Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. Мн., 1981.
2. Неванлинна. Р. Униформизация. М., 1955.
3. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939. С. 442.
4. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М., 1986. С. 174.
5. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М., 1970.
6. Бибиков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991.

Поступила в редакцию 18.05.94.

УДК 519.6

В. П. КИРЛИЦА

ТОЧНЫЕ D- И A-ОПТИМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПЛАНЫ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ НЕРАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Exact A-optimal linear designs are constructed under variance changing linearly. Problem of exact D- and A-optimal linear designs is investigated.

Рассмотрим простейшую линейную модель неравноточных наблюдений:

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

где y_i — наблюдаемые значения; θ_0, θ_1 — неизвестные параметры; x_i— контролируемые переменные из отрезка $[-1,1]$; $\varepsilon(x_i)$ — некоррелированные ошибки наблюдений с нулевым средним и дисперсией

$$D\{\varepsilon(x_i)\} = ax_i + b. \qquad (2)$$

В (2) a и b константы, $|a| < b$, $b > 0$.

Известно, [1], что для множественной линейной регрессии с равноточными наблюдениями непрерывные D-оптимальные планы являются и A-оптимальными. В [2] показано, что планы

$$\varepsilon_{2s}^0 = \left\{ \begin{matrix} -1; & 1 \\ s; & s \end{matrix} \right\},\quad \varepsilon_{2s+1}^0 = \left\{ \begin{matrix} -1; & 1 \\ s; & s+1 \end{matrix} \right\},\quad \varepsilon_{2s+1}^0 = \left\{ \begin{matrix} -1; & 1 \\ s+1; & s \end{matrix} \right\} \qquad (3)$$

являются одновременно точными D- и A-оптимальными для модели (1) с равноточными наблюдениями ($a = 0$). В статье [3] доказано, что планы (3) остаются точными D-оптимальными для модели неравноточных наблюдений (1), (2).

Однако, как будет показано ниже, структура точных A-оптимальных планов для модели наблюдений (1), (2) будет зависеть от коэффициента $k = a/b$, $|k| < 1$.

Лемма. Точки спектра точного A-оптимального плана для модели наблюдений (1), (2) лежат на концах интервала [-1, 1].

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что точки спектра плана $x_i, i = \overline{1, n-1}$ фиксированы, а точка $x_n = x$ — «плавающая», $x \in [-1, 1]$. Вводя обозначения

$$c = \sum_{i=1}^{n-1} (1 + kx_i)^{-1},\quad d = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 (1 + kx_i)^{-1},\quad e = \sum_{i=1}^{n-1} x_i (1 + kx_i)^{-1}, \qquad (4)$$

след дисперсионной матрицы плана эксперимента можно записать в виде:

$$\mathrm{tr}M^{-1} = \frac{1}{b}\left\{c + d + \frac{1+x^2}{1+kx}\right\} / \left\{\left[c + \frac{1}{1+kx}\right]\left[d + \frac{x^2}{1+kx}\right] - \left[e + \frac{x}{1+kx}\right]^2\right\} = t(x)/b,$$

где

$$t(x) = \frac{x^2 + k(c+d)x + c + d + 1}{cx^2 + \left[(cd - e^2)k - 2e\right]x + d + cd - e^2}. \qquad (5)$$

Учитывая, что $x_i \in [-1, 1]$, $i = \overline{1, n-1}$, из (4) заключаем, что

$$c \geqslant 0,\ d \geqslant 0,\ d \leqslant c,\ |e| \leqslant c. \qquad (6)$$

Лемма будет доказана, если показать, что для любых c, d, e минимальное значение $t(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ достигается при $x^0 = \pm 1$. Для этого надо показать, что

$$t(x) \geqslant t(-1),\ x \in [-1, 1], \qquad (7)$$

если

$$t(-1) \leqslant t(1), \qquad (8)$$

либо

$$t(x) \geqslant t(1),\ x \in [-1, 1], \qquad (9)$$

если

$$t(1) \leqslant t(-1). \qquad (10)$$

Для определенности положим, что реализуется ситуация, описываемая соотношениями (7), (8). Ситуация, соответствующая (9), (10), рассматривается аналогично.

Учитывая, что для всех $x \in [-1, 1]$ знаменатель в (5) положителен, нетрудно показать, что (8) эквивалентно

$$\beta = k(c^2 + d^2 + 2e^2) + 2e(d + c + 2) \geqslant 0, \qquad (11)$$

а неравенство (7) — неравенству

$$\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \geqslant 0,\ x \in [-1, 1], \qquad (12)$$

где

$$\alpha = 2e - (1-k)(c^2 + e^2) + d - c, \qquad (13)$$

$$\gamma = 2e + (c+e)^2 + (e+d)^2 - (1-k)(e^2 + d^2) + c - d.$$

Итак, покажем, что будет выполняться неравенство (12) при условии, что имеет место неравенство (11).

Из (7) следует, что $\varphi(-1) = 0$. Если $\alpha \leqslant 0$, то неравенство (12) имеет место, поскольку, в силу (11), $\varphi(1) = 2\beta \geqslant 0$.

Если $\alpha > 0$, то с учетом того, что $\varphi(-1) = 0$, неравенство (12) будет выполняться, если $d\varphi(x)/dx|_{x=-1+0} = \beta - 2\alpha > 0$, или, с учетом (11), (13), если

$$\beta - 2\alpha = 2c^2 - kc^2 + kd^2 + 2e^2 + 2e(c+d) + 2(c-d) > 0. \qquad (14)$$

Убедимся, что неравенство (14) имеет место. По предположению $\alpha > 0$. Отсюда, с учетом неравенств (6), легко получаем, что

$$e > \left[(1-k)(c^2 + e^2) + c - d\right]/2 > 0. \qquad (15)$$

Учитывая неравенства (6), (15), легко показать выполнимость неравенства (14). Лемма доказана.

Теорема. Точный A-оптимальный план для модели наблюдений (1), (2) имеет вид:

$$\varepsilon_n^0(k) = \left\{ \begin{matrix} -1; & 1 \\ s^0; & n-s^0 \end{matrix} \right\}, \tag{16}$$

где

$$s^0 = \arg \min_{s \in \{1, \ldots, n-1\}} t_n(s, k), \tag{17}$$

а функция

$$t_n(s, k) = [2sk + n - nk]/[s(n-s)]. \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно доказанной лемме, точный A-оптимальный план должен иметь структуру:

$$\varepsilon_n(k) = \left\{ \begin{matrix} -1; & 1 \\ s; & n-s \end{matrix} \right\}, \tag{19}$$

где s — число -1 в спектре плана, $s \in \{0, \ldots, n\}$. След дисперсионной матрицы плана (19) равен: $t_n(s, к)/b$, следовательно, оптимальное значение S^0, определяющее точный A-оптимальный план, должно удовлетворять (17). Теорема доказана.

Основываясь на результатах работы [3] и доказанной теореме, можно утверждать, что для модели наблюдений (1), (2) структура точных D-оптимальных планов «груба», устойчива к изменению параметра к, $|к|<1$, так как эти планы не зависят от к. В то же время, структура точных A-оптимальных планов чувствительна к изменению параметра к.

В формуле (2) слагаемое ax, $|x|\leqslant 1$, можно рассматривать как линейное искажение дисперсии b равноточных наблюдений. Естественно, возникает задача определения уровня искажения, при котором финкционал качества точного оптимального плана будет устойчивым. Устойчивость функционала качества характеризуется коэффициентом

$$\lambda = |\Phi(M(k)) - \Phi(M(0))|/\Phi(M(0)),$$

где $M(k)$ — информационная матрица плана, зависящая от k (при отсутствии искажения $k=0$), $\Phi(\cdot)$ — функционал, для D - оптимальных планов $\Phi(M) = |M|$, для A - оптимальных планов $\Phi(M) = \operatorname{tr} M^{-1}$.

Соответствующий критерий качества точного оптимального плана будет устойчивым относительно искажения kx дисперсии равноточных наблюдений, если $\lambda \leqslant \varepsilon$, где ε — некоторый заданный уровень, $0<\varepsilon<1$.

Пример. Пользуясь формулами (16), (17), можно показать, что

$$\text{для } -1 \leqslant k \leqslant -\frac{9}{12},\ \varepsilon_6^0(k) = \left\{ \begin{matrix} -1; & 1 \\ 5; & 1 \end{matrix} \right\}; \text{ для } -9/11 \leqslant k \leqslant -1/3,$$

$$\varepsilon_6^0(k) = \left\{ \begin{matrix} -1; & 1 \\ 4; & 2 \end{matrix} \right\}; \text{ для } |k| \leqslant 1/3,$$

$$\varepsilon_6^0(k) = \left\{ \begin{matrix} -1; & 1 \\ 3; & 3 \end{matrix} \right\}; \text{ для } 1/3 \leqslant k \leqslant 9/11,$$

$$\varepsilon_6^0(k) = \left\{ \begin{matrix} -1; & 1 \\ 2; & 4 \end{matrix} \right\}; \text{ для } 9/11 \leqslant k \leqslant 1,\quad \varepsilon_6^0(k) = \left\{ \begin{matrix} -1; & 1 \\ 1; & 5 \end{matrix} \right\}.$$

Таким образом, для $|k| \leqslant 1/3$ точные D- и A-оптимальные планы для модели наблюдений (1), (2) совпадают; для $1/3<|k|<1$ структура этих планов различна.

Нетрудно подсчитать, что соответствующие функционалы качества точных планов $\varepsilon_6^0(k)$ будут устойчивы при $|k| \leqslant \varepsilon/(1+\varepsilon)$ для D-оптимальных планов и для A-оптимальных планов при $|k| \leqslant 1/3$.

1. Ф е д о р о в В. В. Теория оптимального эксперимента. М., 1968.
2 К и р л и ц а В. П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1990. № 2. С. 36.
3. К и р л и ц а В. П. // Проблемы компьютерного анализа данных и моделирования. Мн., 1991. С. 68.

Поступила в редакцию 16.03.94.