Доказанная теорема сводит задачу классификации максимальных импримитивных локально нильпотентных подгрупп группы GL(n,P) к аналогичной задаче для групп меньшей размерности и, следовательно, в конечном итоге к классификации примитивных локально нильпотентных линейных групп.

1. С у п р у н е н к о Д. А. Группы матриц. М., 1972.
2. О н ж е // Матем. сб. 1965. Т. 68. № 4. С. 674.
3. К о н ю х В. С. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 3. С. 197.
4. Г а р а щ у к М. С. // Там же. 1960. Т. 4. № 7. С. 276.

Поступила в редакцию 04.05.94.

УДК 517.925

В. Н. ГОРБУЗОВ, П. Б. ПАВЛЮЧИК

О ТРАЕКТОРИЯХ И ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА АЛГЕБРАИЧЕСКИ ВЛОЖИМЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

The notion of algebraic imbeddability of the solutions for autonomous ordinary differential systems with rational right parts is introduced. The conditions of the stability by Lyapunov's function for such type systems and the character of the trajectories are obtained.

В. И. Мироненко [1] разработана методика исследования одного класса обыкновенных дифференциальных систем, которые, по предложению Ю. С. Богданова, получили название вложимых. Дадим решение некоторых поставленных в [1] задач, введя понятия алгебраической вложимости и сильной алгебраической вложимости.

Предметом рассмотрения является автономная обыкновенная дифференциальная система n-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = R(x), \tag{1}$$

где векторная функция векторного аргумента $R\colon D \to C^n$, $D \subset C^n$, представляет собой вектор-столбец $R(x) = \operatorname{colon}\,(R_1(x), \ldots, R_n(x))$, координаты $R_i\colon D \to C$, $i = \overline{1,n}$, которого являются рациональными функциями относительно $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с постоянными коэффициентами, вектор-столбец

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{colon}\left[\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right].$$

Определение 1. Будем называть i-ю компоненту x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, дифференциальной системы (1) алгебраически вложимой, если для каждого решения $x = x(t)$ этой системы можно указать алгебраическое дифференциальное уравнение

$$\sum_{\xi=0}^{m} a_\xi \prod_{k=1}^{s_\xi} \left[u^{(\nu_{k\xi})}\right]^{\mu_{k\xi}} = 0 \tag{2}$$

с постоянными коэффициентами $a_\xi \in C$, $\xi = \overline{0, m}$, решением которого является i-я координатная функция $x_i(t)$ векторной функции $x = x(t)$.

Здесь $\nu_{k\xi}$ и $\mu_{k\xi}$, $k = \overline{1, s_\xi}$, $\xi = \overline{0, m}$, суть целые неотрицательные числа.

Определение 2. Будем называть i-ю компоненту x_i, $i \in \{1,\ldots, n\}$, дифференциальной системы (1) сильно алгебраически вложимой, если для всех решений $x = x(t)$ этой системы можно указать одно алгебраическое дифференциальное уравнение (2), решениями которого будут i-е координатные функции $x_i(t)$ всех этих функций-решений $x = x(t)$.

На основании алгебраической вложимости представляется возможность решать задачи по построению систем (1), составляющие общего решения которых являются функциями-решениями конкретных дифференциальных уравнений. Частные и первые интегралы таких систем (1) определяют связи между этими функциями-решениями и, наоборот, если известны связи между этими функциями-решениями, то представляется возможность установления интегралов системы (1). Обратим внимание на связь такого подхода с задачей униформизации [2].

Так, у автономной полиномиальной дифференциальной системы

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = 6x_1^2 \tag{3}$$

компонента x_1 сильно алгебраически вложима в алгебраическое дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $d^2x_1/dt^2 = 6x^2_1$, интегрируемое в эллиптических функциях Вейерштрасса $x_1 = P(t-C_1, 0, C_2)$ [3], где C_1 и C_2 суть произвольные постоянные. Компонента x_2 является производной этой функции Вейерштрасса: $x_2 = dP/dt$.

Дифференциальная система (3) имеет первый автономный интеграл

$$4x_1^3 - x_2^2 = C, \ C = \text{const}, \tag{4}$$

униформизируемый эллиптической функцией $P(t-C_1, 0, C_2)$ и ее производной dP/dt.

Интеграл (4) доставляет определяющее дифференциальное уравнение

$$4P^3 - \left[\frac{dP}{dt}\right]^2 = C \tag{5}$$

для функции Вейерштрасса P.

Наоборот, из определяющего дифференциального уравнения (5) устанавливаем, что семейство (4) является общим автономным интегралом системы (3).

Относительно траекторий системы (1) с алгебраически вложимыми компонентами справедливы такие закономерности.

Теорема 1. Если у дифференциальной системы (1) некоторая компонента алгебраически вложима, но не сильно алгебраически вложима, то траектории этой системы расположены на алгебраическом многообразии.

Доказательство. Пусть у системы (1) алгебраически вложимая компонента x_i, $i \in \{1, ..., n\}$, не сильно алгебраически вложима. Построим множество скалярных функций векторного аргумента

$$S_i^{(0)}(x) = x_i, \ S_i^{(\theta)}(x) = \frac{d^\theta x_i}{dt^\theta}\Big|_{(1)}, \quad \theta = \overline{1, \nu_{k\xi}}. \tag{6}$$

В соответствии с определением 1 для каждого решения $x = x(t)$ системы (1) существуют числа $a_\xi \in C$, $\nu_{k\xi} \in N_0$, $\mu_{k\xi} \in N_0$, $\xi = \overline{0, m}$, $k = \overline{1, s_\xi}$, такие, что совместно тождество

$$\sum_{\xi=0}^{m} a_\xi \prod_{k=1}^{s_\xi} \left\{ S_i^{(\nu_{k\xi})}(x(t)) \right\}^{\mu_{k\xi}} \equiv 0. \tag{7}$$

Если тождество (7) не является общим тождеством для всех решений $x = x(t)$ системы (1), то траектория этой системы расположена на алгебраическом многообразии

$$\sum_{\xi=0}^{m} a_\xi \prod_{k=1}^{s_\xi} \left\{ S_i^{(\nu_{k\xi})}(x) \right\}^{\mu_{k\xi}} = 0. \tag{8}$$

Это обосновано тем, что в противном случае равенство (8) обращается в тождество, что соответствует сильной алгебраической вложимости компоненты x_i системы (1). Теорема 1 доказана.

Подобным образом доказывается

Теорема 2. Пусть у дифференциальной системы (1) существует такое решение $x = x(t)$, что координатная функция $x_i(t)$ векторной функции $x = x(t)$ является решением алгебраического дифференциального уравнения (2), а i-я компонента x_i системы (1) не сильно алгебраически вложима.

Тогда траектория, соответствующая решению $x = x(t)$, расположена на алгебраическом многообразии (8).

Далее систему (1) и уравнение (2) будем считать вещественными, т. е. $a_\xi \in R$, $\xi = \overline{0, m}$, рациональные функции R_i: $D \to R$, $D \subset R^n$, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 3. Если у вещественной автономной дифференциальной системы (1) второго порядка (случай $n=2$) хотя бы одна компонента алгебраически вложима, но не сильно алгебраически вложима, то эта система не имеет предельных циклов.

Это следует из того, что по теореме 1 все траектории системы (1) при $n=2$ суть алгебраические кривые.

Обратим внимание на то, что, когда для системы (1) при $n=2$ имеет место сильная алгебраическая вложимость, то предельные циклы могут существовать.

Например, у системы

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 - x_1^3, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1$$

компоненты x_1 и x_2 сильно алгебраически вложимы в алгебраические дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 3x_1^2\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0$$

и

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \left[\frac{dx_2}{dt}\right]^3 - \frac{dx_2}{dt} + x_2 = 0$$

соответственно и существует один предельный цикл, который является устойчивым [4].

Пусть у системы (1) компонента x_i, $i\in\{1,\dots,n\}$, сильно алгебраически вложима в дифференциальное уравнение

$$x_i^{(r)} = b_0x_i + b_1x_i^1 + \dots + b_{r-1}x_i^{(r-1)} + Q\left(x_i, x_i^1, \dots, x_i^{(r-1)}\right), \tag{9}$$

где $Q\colon \mathbf{R}^r\to\mathbf{R}$ суть полином степени $\deg Q\geqslant 2$, коэффициенты $b_\tau\in\mathbf{R}$, $\tau = \overline{0, r-1}$.

Если среди корней алгебраического уравнения

$$\lambda^r - \sum_{\tau=0}^{r-1} b_\tau\lambda^\tau = 0 \tag{10}$$

существует хотя бы один с положительной вещественной частью, то [5, с. 33] существует квадратичная форма $V(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1})$ и положительное число α такие, что

$$\frac{dv}{dt}\Big|_{(9)} = \alpha V\left(x_i, x_i^1, \dots, x_i^{r-1}\right) + \sum_{\tau=0}^{r-1}\left\{x_i^{(\tau)}\right\}^2 +$$

$$+ U\left(x_i, x_i^1, \dots, x_i^{(r-1)}\right).$$

При этом функция $V\colon \mathbf{R}^r\to\mathbf{R}$, не будет знакоотрицательной, а $U\colon \mathbf{R}^r\to\mathbf{R}$ суть полином степени $\deg U\geqslant 3$.

Тогда с учетом представлений (6) имеем, что

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(1)} = \alpha V\left[S_i^{(0)}(x), S_i^{(1)}(x), \dots, S_i^{(r-1)}(x)\right] +$$

$$+ \sum_{\tau=0}^{r-1}\left\{S_i^{(\tau)}(x)\right\}^2 + U\left[S_i^{(0)}(x), S_i^{(1)}(x), \dots, S_i^{(r-1)}(x)\right], \tag{11}$$

и справедлива

Теорема 4. Пусть i-я компонента x_i, $i\in\{1,\dots,n\}$, вещественной дифференциальной системы (1) сильно алгебраически вложима в уравнение (9), уравнение (10) имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью.

Тогда существует квадратичная форма $V(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1})$, не являющаяся знакоотрицательной в окрестности точки $\omega_0 = \omega_1 = \dots = \omega_{r-1} = 0$, и положительное число α такое, что имеет место соотношение (11).

Если все корни уравнения (10) имеют отрицательные вещественные части, то [5, с. 31] существует определенно положительная квадратичная форма $V(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1})$ такая, что

$$\frac{dV}{dt}|_{(9)} = -\sum_{r=0}^{r-1} \left\{ x_i^{(r)} \right\}^2 + U\left(x_i,\ x_i^1,\ \ldots,\ x_i^{(r-1)} \right),$$

где у полинома U: $\mathbf{R}^r \to \mathbf{R}$ степень deg $U \geqslant 3$.

Отсюда с учетом (6) имеем, что

$$\frac{dV}{dt}|_{(1)} = -\sum_{r=0}^{r-1} \left\{ S_i^{(r)}(x) \right\}^2 + U\left[S_i^{(0)}(x),\ S_i^1(x),\ \ldots,\ S_i^{(r-1)}(x) \right], \quad (12)$$

и справедлива

Теорема 5. Пусть i-я компонента x_i, $i \in (1, \ldots, n)$, вещественной дифференциальной системы (1) сильно алгебраически вложима в уравнение (9), а все корни уравнения (10) имеют отрицательные вещественные части.

Тогда существует квадратичная форма $V(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{r-1})$, определенно положительная в проколотой окрестности точки $\omega_0 = \omega_1 = \ldots = \omega_{r-1} = 0$, такая, что имеет место соотношение (12).

Возможность использования утверждений, сформулированных в теоремах 4 и 5, покажем на примерах.

Систему

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2^5,\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_1^2 + x_2^3 \quad (13)$$

умножением ее правых частей на $\mu = x_2^{-2}$ (множитель вложимости) приводим к системе (13), у которой компонента x_1 сильно алгебраически вложима в уравнение

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 3\frac{dx_1}{dt} - 3x_1 + 3x_1^2. \quad (14)$$

Уравнение (10) для (14) имеет корни $\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому, согласно теореме 4, для системы (13) существуют незнакоотрицательная в окрестности точки O(0; 0) квадратичная форма $V(x_1, x_3^2)$ и положительное число α такие, что

$$\frac{dV}{dt}|_{(13)} = x_2^2 \left\{ \alpha V\left(x_1,\ x_2^3 \right) + x_1^2 + x_2^6 + U\left(x_1,\ x_2^3 \right) \right\}.$$

Стало быть, по теореме 7.5.4 из [6, с. 248], состояние равновесия O(0;0) системы (13) неустойчиво.

Аналогичным образом систему

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2^5,\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_1^2 - x_2^3 \quad (15)$$

посредством множителя вложимости $\mu = x_2^{-2}$ приводим к системе (15) с сильно алгебраически вложимой компонентой x_1. Уравнение (10) в этом случае будет иметь корни $-\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Согласно теореме 5, для системы (15) существует определенно положительная в проколотой окрестности точки O(0; 0) квадратичная форма $V\left(x_1,\ x_2^3 \right)$ такая, что

$$\frac{dV}{dt}|_{(15)} = x_2^2 \left\{ -x_1^2 - x_2^6 + U\left(x_1,\ x_2^3 \right) \right\}.$$

По теореме 7.5.3 из [6, с. 247] с учетом того, что прямая $x_2 = 0$ не является траекторией системы (15), заключаем об асимптотической устойчивости состояния равновесия O(0; 0).

Систему

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2^3,\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_1^2 - x_2^2 \quad (16)$$

с помощью множителя вложимости $\mu = x_2^{-1}$ приводим к системе (16), у которой компонента x_1 сильно алгебраически вложима в уравнение

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -2\frac{dx_1}{dt} - 2x_1 + 2x_1^2. \qquad (17)$$

Уравнение (10) для (17) имеет корни $-1\pm i$. Тогда, по теореме 5, для системы (16) существует определенно положительная в проколотой окрестности точки O(0; 0) квадратичная форма $V(x_1, x_2^2)$ такая, что

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(16)} = x_2\left\{-x_1^2 - x_2^4 + U(x_1, x_2^2)\right\}.$$

Согласно теореме 7.5.4. из [6, с. 248], это означает неустойчивость состояния равновесия O(0; 0) системы (16).

1. Мироненко В. И. Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений. Мн., 1981.
2. Неванлинна. Р. Униформизация. М., 1955.
3. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939. С. 442.
4. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М., 1986. С. 174.
5. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М., 1970.
6. Бибиков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991.

Поступила в редакцию 18.05.94.

УДК 519.6

В. П. КИРЛИЦА

ТОЧНЫЕ D- И А-ОПТИМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПЛАНЫ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ НЕРАВНОТОЧНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Exact A-optimal linear designs are constructed under variance changing linearly. Problem of exact D- and A-optimal linear designs is investigated.

Рассмотрим простейшую линейную модель неравноточных наблюдений:

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + \varepsilon(x_i),\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n, \qquad (1)$$

где y_i — наблюдаемые значения; θ_0, θ_1 — неизвестные параметры; x_i— контролируемые переменные из отрезка $[-1,1]$; $\varepsilon(x_i)$ — некоррелированные ошибки наблюдений с нулевым средним и дисперсией

$$D\{\varepsilon(x_i)\} = ax_i + b. \qquad (2)$$

В (2) a и b константы, $|a|<b$, $b>0$.

Известно, [1], что для множественной линейной регрессии с равноточными наблюдениями непрерывные D-оптимальные планы являются и А-оптимальными. В [2] показано, что планы

$$\varepsilon_{2s}^0 = \left\{\begin{matrix} -1; & 1 \\ s; & s\end{matrix}\right\},\quad \varepsilon_{2s+1}^0 = \left\{\begin{matrix} -1; & 1 \\ s; & s+1\end{matrix}\right\},\quad \varepsilon_{2s+1}^0 = \left\{\begin{matrix} -1; & 1 \\ s+1; & s\end{matrix}\right\} \qquad (3)$$

являются одновременно точными D- и А-оптимальными для модели (1) с равноточными наблюдениями ($a = 0$). В статье [3] доказано, что планы (3) остаются точными D-оптимальными для модели неравноточных наблюдений (1), (2).

Однако, как будет показано ниже, структура точных А-оптимальных планов для модели наблюдений (1), (2) будет зависеть от коэффициента $k = a/b$, $|k|<1$.

Лемма. Точки спектра точного А-оптимального плана для модели наблюдений (1), (2) лежат на концах интервала [-1, 1].

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что точки спектра плана $x_i, i = \overline{1, n-1}$ фиксированы, а точка $x_n = x$ — «плавающая», $x\in[-1, 1]$. Вводя обозначения

$$c = \sum_{i=1}^{n-1}(1+kx_i)^{-1},\quad d = \sum_{i=1}^{n-1}x_i^2(1+kx_i)^{-1},\quad e = \sum_{i=1}^{n-1}x_i(1+kx_i)^{-1}, \qquad (4)$$

след дисперсионной матрицы плана эксперимента можно записать в виде: