

УДК 519.4

В. С. КОНЮХ

ИМПРИМИТИВНЫЕ ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ

Imprimitive locally nilpotent linear groups over an arbitrary field are considered: The study of such groups is reduced to the case of primitive groups.

Максимальные локально нильпотентные линейные группы над алгебраически замкнутым полем описаны Д. А. Супруненко [1]; им дано полное описание примитивных локально нильпотентных групп над произвольным полем [2].

В настоящей работе рассматриваются импримитивные локально нильпотентные линейные группы над произвольным полем. Изучение таких групп полностью сведено к изучению примитивных максимальных локально нильпотентных линейных групп.

Основной результат этой работы без доказательства приведен в [3]. В отношении терминологии мы придерживаемся книги [1]. Пусть Γ — максимальная неприводимая импримитивная локально нильпотентная подгруппа $GL(n, P)$,

$$P^n = Q_1 + \dots + Q_s$$

— разложение пространства P^n на системы импримитивности Γ . В силу [2] мы можем считать, что Γ абсолютно неприводима над P , $n = p^t$ — простое число.

Пусть $\psi: \Gamma \rightarrow S_r$ — гомоморфизм группы Γ в симметрическую группу S_r , определяемый этим разложением. Тогда $\psi(\Gamma)$ — транзитивная r -группа. Так как r -подгруппа Силова группы S_r является сплетением циклов длины r , то существует разложение пространства P^n на системы импримитивности группы Γ вида

$$P^n = L_1 + \dots + L_p. \quad (1)$$

Пусть $\phi: \Gamma \rightarrow S_p$ — гомоморфизм, определяемый этим разложением, $G = \ker \phi|_{L_1}$ — ограничение группы $\ker \phi$ на подпространство L_1 , $S_p(G)$ — силовская p -подгруппа группы G , $u_{11}, \dots, u_{1m}$, $m = p^{t-1}$ — базис подпространства L_1 . В качестве базиса пространства P^n возьмем систему векторов

$$u_{11}, \dots, u_{1m}, \dots, u_{p1}, \dots, u_{pm}, \quad (2)$$

где $u_{ki} = a^{k-1} u_{1i}$, $a \in \Gamma$, $a \notin \ker \phi$, $1 < k \leq p$.

Очевидно, в базисе (2) матрица оператора a имеет вид

$$a = h(g) = \begin{bmatrix} 0 & g \\ E_{n-m} & 0 \end{bmatrix}, \quad g \in G. \quad (3)$$

Пусть $b \in \ker \phi$. Тогда $b = \text{diag}[g_1, \dots, g_p]$, где $g_i \in G$, $i = 1, \dots, p$. Так как $\Gamma|_{P^*}$ — p -группа [2], то $b^{p^*} = \lambda \in P$ и, следовательно, $g_i P^* = g_i P^*$, $i = 1, \dots, p$. Отсюда, в силу того, что коммутант группы G - p — группа, следует, что $g_i = g_1 d_i$, $d_i \in S_p(G)$. Пусть H -подгруппа $GL(n, P)$, состоящая из всех матриц вида

$$\text{diag} [g_1 d_1, \dots, g_1 d_p], \quad g_1 \in G, \quad d_i \in S_p(G),$$

а $\Gamma_1 = \{h(g), H\}$ — группа, порожденная подгруппой H и матрицей $h(g)$. Очевидно, $\Gamma_1 P^* — p$ -группа, причем $\Gamma \leq \Gamma_1$. Отсюда и из максимальности группы Γ следует, что $\Gamma = \Gamma_1$, а группа G максимальна среди локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$.

Обозначение. Зафиксируем базис (2) пространства P^n . Пусть G — максимальная абсолютно неприводимая локально нильпотентная подгруппа группы $GL(m, P)$, H — подгруппа $GL(n, P)$, состоящая из всех матриц вида

$$\text{diag} [ad_1, \dots, ad_p], \quad a \in G, \quad d_i \in S_p(G).$$

Подгруппу группы $GL(n, P)$, порожденную матрицей $h(g)$, $g \in G$ и группой H , будем обозначать $\Gamma(g, G)$. Очевидно, (1) — разложение пространства P^n на системы импримитивности группы $\Gamma(g, G)$. Подгруппу группы G , порожденную группой $S_p(G)$ и всеми элементами вида g^p , $g \in G$, обозначим G^p .

Теорема (i). Пусть Γ — максимальная абсолютно неприводимая импримитивная локально нильпотентная подгруппа группы $GL(n, P)$, $n = p^l$. Тогда Γ сопряжена в $GL(n, P)$ с группой $\Gamma(g, G)$.

(ii). Группы $\Gamma_1 = \Gamma(g_1, G)$ и $\Gamma_2 = \Gamma(g_2, G)$ тогда и только тогда сопряжены в $GL(n, P)$, когда $g_1 = g_2^r a$, $1 \leq r < p$, $a \in G^p$.

(iii). Группа $\Gamma(g, G)$ почти всегда максимальна среди локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$. Исключение составляют лишь случаи, когда

1) $n = 2^l$, $g \in G^p$, G — примитивная группа, причем $|S_p(G)| = 2$;

2) $l > 1$, $g \in G^p$, а группа G сопряжена с группой $\Gamma(g_1, G_1)$, $g_1 \in G^p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (i) было доказано выше.

(ii). Пусть

$$g_1 = g_2^r a^p d, \quad 1 \leq r < p, \quad a \in G, \quad d \in S_p(G).$$

Так как $\Gamma(g_1, G) = \Gamma(g_1 d^{-1}, G)$, то мы можем считать, что $d = E_m$. Положим $c = h^r(g_2)(a \cdot E_p)$. Пусть b — матрица перехода от базиса (2) к базису

$$u_{11}, \dots, u_{1m}, cu_{11}, \dots, cu_{1m}, \dots, c^{p-1}u_{1m}.$$

Непосредственно проверяется, что $b^{-1}\Gamma_2 b = \Gamma_1$. Обратно.

Пусть $b\Gamma_1 b^{-1} = \Gamma_2$, H — подгруппа Γ_i , $i = 1, 2$, порожденная всеми матрицами вида

$$\text{diag} [ud_1, \dots, ud_p], \quad u \in G, \quad d_i \in S_p(G).$$

Если $g_1, g_2 \in G^p$, то наше утверждение доказано. Пусть $g_1 \notin G^p$. Тогда

$$bh(g_1)b^{-1} = h^r(g_2)h, \quad h \in H, \quad 0 \leq r < p.$$

Так как Γ_i/P^* — p -группа, то для некоторого числа α

$$[b(g_1 \times E_p)b^{-1}]^{p^\alpha} = (g_1 \times E_p)p^\alpha.$$

Отсюда, в силу того, что коммутант группы Γ_i является p -группой, получаем

$$g_1 \times E_p = (g_2^r \times E_p)h^p d_1, \quad d_1 \in S_p(H).$$

Поэтому $g_1 = g_2^r a^p d$, где $d \in S_p(G)$, $a \in G$, так как $g_1 \notin G^p$, то $r \geq 1$.

(iii). Пусть K — коммутант группы $\Gamma(g, G)$.

Так как группа P^* содержит элемент порядка p , то $|S_p(H)| = |S_p(G)|^p \geq p^p$ и прямые вычисления показывают, что в случаях, когда $p > 2$; $p = 2$, а G — импримитивная группа; $p = 2$, G — примитивная группа, причем $|S_p(G)| > 2$, среди неприводимых частей группы K есть неэквивалентные.

Рассмотрим, например, последний случай. Если $S_p(G) \subset P^*$, то так как центр G равен P^* ; существуют элементы $a \in G$, $d \in S_p(G)$ такие, что $(a, d) = d_1 \neq 1$. Тогда

$$(a \times E_2, \text{diag} [d, E_2^{l-1}]) = \text{diag} [d_1, E_2^{l-1}] \in K$$

и, следовательно, среди неприводимых частей группы K есть неэквива-

лентные. Если же $S_p(G) \subset P^*$, то так как $|S_p(G)| > 2$, группа P^* содержит элемент i порядка 4. Очевидно,

$$(h(g), \text{diag}[iE_2^{t-1}, E_2^{t-2}]) = \text{diag}[-iE_2^{t-1}, iE_2^{t-1}] \in K,$$

и, следовательно, ограничения группы K на подпространства L_i , $i = 1, 2$, неэквивалентны.

Пусть $\Gamma \subset \Gamma_1$, где Γ_1 — локально нильпотентная группа. Поскольку Γ — N -группа [4], то будем считать, что $\Gamma \Delta \Gamma_1$. Рассмотрим отдельно следующие случаи: 1) $g \notin G^p$; 2) G — примитивная группа, причем при $p = 2$, $|S_p(G)| > 2$; 3) $t > 1$, $g \in G^p$, G — импримитивная группа и G не сопряжена с группой $\Gamma(g_1, G_1)$, где $g_1 \notin G^p$.

Случай 1. Пусть $a \in \Gamma_1$, $h \in H$ и $aha^{-1} = h^r(g)h_1$, $h_1 \in H$, $0 \leq r < p$. Так как $\Gamma/P^* \cdot p$ — группа, $K \subset S_p(\Gamma)$, то для некоторого числа l $ah^{p^l}a^{-1} = h^{p^l}$ и, следовательно, $aha^{-1} = h^r(g)h_1 = hd$, $d \in S_p(\Gamma)$. Возводя обе части последнего равенства в степень p , получим $(g^r \times E_p)h^p d_1 = h^p d_2$, $d_i \in S_p(H)$.

Так как $g \notin G^p$, то $r = 0$, $aHa^{-1} = H$. Поэтому для $h \in H$, $h(aL_i) = aL_i$. Так как неприводимые части группы H попарно неэквивалентны, то $aL_1 = L_j$ и, следовательно, $a = h^p(g)b$, где $b = \text{diag}[g_1, \dots, g_p]$. В силу максимальной G , $g \in G$, $a \in \Gamma$, $\Gamma = \Gamma_1$, Γ — максимальна среди локально нильпотентных подгрупп $GL(n, P)$.

Случай 2. Из примитивности группы G следует, что неприводимые части группы $K_1|L_i$ попарно эквивалентны. Очевидно, для

$$a \in \Gamma_1, aKa^{-1} = K.$$

Как отмечалось выше, среди неприводимых частей группы K есть неэквивалентные. Поэтому $aL_i = L_j$. Рассуждения, аналогичные приведенным в конце доказательства случая 1, показывают, что $a \in \Gamma$, $\Gamma = \Gamma_1$.

Случай 3. Так как $K \Delta \Gamma_1$, причем среди неприводимых частей группы K есть неэквивалентные, то Γ_1 — импримитивная группа.

Пусть $P^n = Q_1 + \dots + Q_p$ — разложения пространства P^n на системы импримитивности Γ_1 , $\psi: \Gamma_1 \rightarrow S_p$ — гомоморфизм, определяемый этим разложением, $H_1 = \ker \psi$. Если $H \subset H_1$, то $Q_j = L_j$ и, в силу максимальной G , $H = H_1$, $\Gamma = \Gamma_1$. Пусть $H \not\subset H_1$, $H_2 = H \cap H_1$. Тогда $H:H_2 = p$. Так как представители различных смежных классов H по H_2 линейно независимы над кольцом $\langle H_2 \rangle_p$, а $\langle H_2 \rangle_p : P = p^{2(t-1)+1}$, то $\langle H_2 \rangle_p : P = p^{2(t-1)}$.

Пусть p^r — степень неприводимой части группы H_2 , p^k — число неэквивалентных частей. Из импримитивности группы G следует, что $|S_p(G)| > p$. Так как группа H содержит подгруппу D порядка $|S_p(G)|^p$, а $H:H_2 = p$, то среди неприводимых частей группы H_2 есть неэквивалентные и, следовательно, $k > 0$. Очевидно,

$$p^{2(t-1)} = \langle H_2 \rangle_p : P \leq p^{2r+k}.$$

Отсюда в силу того, что $p+k \leq t$, получаем $p \geq t-2$. Если $p = t-1$, то $Q_j = L_j$, $H \subset H_1$.

Противоречие. Таким образом, $p = t-2$, $k = 2$, неприводимые части группы H абсолютно неприводимы и попарно неэквивалентны. Пусть $L_1 = L_{11} + \dots + L_{1p}$ — разложение L_1 в прямую сумму инвариантных и неприводимых относительно группы H_2 подпространств, $G_1 = GL_{11}$. Тогда группа G сопряжена с группой $\Gamma(g_1, G_1)$. Так как $H:H_2 = p$, то очевидно $g_1 \in G^p$.

Противоречие. Таким образом, в случаях 1—3 Γ максимальна среди локально нильпотентных подгрупп группы $GL(p^t, P)$. Пусть $p = 2$, G — примитивная группа, причем $|S_p(G)| = 2$, $\Gamma = \Gamma(E_p^{t-1}, G)$.

Положим

$$a = \begin{bmatrix} E_p^{t-1} & E_p^{t-1} \\ E_p^{t-1} & -E_p^{t-1} \end{bmatrix}, \quad p = 2.$$

Очевидно, $a^2 = 2$, $aGa^{-1} = \Gamma$, группа Γ_1 , порожденная элементом a и группой Γ , локально нильпотентна, $\Gamma \subset \Gamma_1$.

Непосредственно проверяется, что группа $\Gamma(E_p^{t-1}, G)$, где $G = \Gamma(g_1, G_1)$, $g_1 \notin G_1^p$, сопряжена с собственной подгруппой группы $\Gamma(g_1 \times E_p G_2)$, где $\Gamma(E_p^{t-2}, G_1)$. Теорема доказана.

Доказанная теорема сводит задачу классификации максимальных импримитивных локально нильпотентных подгрупп группы $GL(n, P)$ к аналогичной задаче для групп меньшей размерности и, следовательно, в конечном итоге к классификации примитивных локально нильпотентных линейных групп.

1. Супруненко Д. А. Группы матриц. М., 1972.
2. Он же // Матем. сб. 1965. Т. 68. № 4. С. 674.
3. Конюх В. С. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 3. С. 197.
4. Гаращук М. С. // Там же. 1960. Т. 4. № 7. С. 276.

Поступила в редакцию 04.05.94.

УДК 517.925

В. Н. ГОРЕУЗОВ, П. Б. ПАВЛЮЧИК

О ТРАЕКТОРИЯХ И ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА АЛГЕБРАИЧЕСКИ ВЛОЖИМЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

The notion of algebraic imbeddability of the solutions for autonomous ordinary differential systems with rational right parts is introduced. The conditions of the stability by Lyapunov's function for such type systems and the character of the trajectories are obtained.

В. И. Мироненко [1] разработана методика исследования одного класса обыкновенных дифференциальных систем, которые, по предложению Ю. С. Богданова, получили название вложимых. Дадим решение некоторых поставленных в [1] задач, введя понятия алгебраической вложимости и сильной алгебраической вложимости.

Предметом рассмотрения является автономная обыкновенная дифференциальная система n -го порядка

$$\frac{dx}{dt} = R(x), \quad (1)$$

где векторная функция векторного аргумента $R: D \rightarrow C^n$, $D \subset C^n$, представляет собой вектор-столбец $R(x) = \text{colon } (R_1(x), \dots, R_n(x))$, координаты $R_i: D \rightarrow C$, $i = \overline{1, n}$, которого являются рациональными функциями относительно $x = (x_1, \dots, x_n)$ с постоянными коэффициентами, вектор-столбец

$$\frac{dx}{dt} = \text{colon} \left[\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right].$$

Определение 1. Будем называть i -ю компоненту x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, дифференциальной системы (1) алгебраически вложимой, если для каждого решения $x = x(t)$ этой системы можно указать алгебраическое дифференциальное уравнение

$$\sum_{\xi=0}^m a_{\xi} \prod_{k=1}^{s_{\xi}} \left[u^{(\nu_{k\xi})} \right]^{\mu_{k\xi}} = 0 \quad (2)$$

с постоянными коэффициентами $a_{\xi} \in C$, $\xi = \overline{0, m}$, решением которого является i -я координатная функция $x_i(t)$ векторной функции $x = x(t)$.

Здесь $\nu_{k\xi}$ и $\mu_{k\xi}$, $k = \overline{1, s_{\xi}}$, $\xi = \overline{0, m}$, суть целые неотрицательные числа.

Определение 2. Будем называть i -ю компоненту x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, дифференциальной системы (1) сильно алгебраически вложимой, если для всех решений $x = x(t)$ этой системы можно указать одно алгебраическое дифференциальное уравнение (2), решениями которого будут i -е координатные функции $x_i(t)$ всех этих функций-решений $x = x(t)$.

На основании алгебраической вложимости представляется возможным решать задачи по построению систем (1), составляющие общего решения которых являются функциями-решениями конкретных дифференциальных уравнений. Частные и первые интегралы таких систем (1) определяют связи между этими функциями-решениями и, наоборот, если известны связи между этими функциями-решениями, то представляется возможность установления интегралов системы (1). Обратим внимание на связь такого подхода с задачей униформизации [2].