3. Калинин А.И. // Известия РАН. Техн. кибернетика. 1994. №3. С.104.
4. Габасов Р., Калинин А.И., Кириллова Ф.М. // Докл. АН СССР. 1987. Т.293. №1. С.22.
5. Грибковская И.В., Калинин А.И. // Дифференц. уравнения. 1995. Т.31. №8. С.1275.
6. Они же // Журн. вычисл. математики и мат. физики 1995. Т.35. №9. С.1299.
7. Тихонов А.Н. // Мат. сборник. 1952. Т.31(73). №3. С.575.
8. Hepner S. Analysis of the Planar Intercept and Tracking Problem by Application of Optimal Control and Singular Perturbation Theory. Zurich, 1986.
9. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., 1983.
10. Васильева А.Б. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т.3. №4. С.611.
11. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. // Докл. АН СССР. 1991.Т.320. №6. С.1294.
12. Ракитский Ю.В., Устинов С.М, Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М., 1979.
13. Калинин А.И. // Прикладная математика и механика. 1989. Т.53. Вып.6. С.880.
14. Он же // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т.30. №3. С.366.
15. Он же // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1994. №3. С.57.

УДК 517.956

В.И. КОРЗЮК

МЕТОД ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ И ОПЕРАТОРОВ ОСРЕДНЕНИЯ

At the beginning of the article it is giving a short description of the development of Solvability Theory of Boundry Problems for Partial Linear Differential Equations with using of functional methods. After this general results on the base of energetic inequalities are stated. At the second part of the article it is proven the existence and uniqueness of a strong solution of boundary problems for hyperbolic about given vector field differential equation of the 2-nd order using method of energetic inequalities and averaging operators with variable step. Energetic inequality is derived using Silvester criteria for quadric forms.

1. Проблема постановки и разрешимости задач для дифференциальных уравнений с частными производными давно занимала умы многих математиков. В 30-х гг. Ж.Адамаром было введено понятие корректной задачи [1, 101, 102]. Отыскание корректно поставленных задач и доказательство разрешимости, единственности решений и непрерывной зависимости их от данных задач наряду с численным решением является неотъемлемой частью моделирования различного рода проблем естествознания.

Изучение задачи Коши И.Г.Петровским, результаты которого были опубликованы в 1937 г. [69,70], явилось основополагающим фактором создания современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Теория разрешимости различного рода задач для дифференциальных уравнений и их систем с частными производными получила свое дальнейшее развитие. Многие результаты в теории разрешимости линейных граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными достигнуты в результате применения интегральных преобразований, в первую очередь преобразования Фурье [3, 19–21, 31, 32, 66, 69, 70, 72–74, 77, 80–86, 92, 99, 104–107, 111–113].

С помощью этого подхода и фредгольмовой теории создана стройная эллиптическая теория граничных задач как для гладких [2, 63, 66, 74, 92, 99, 107, 110, 112, 113], так и для разрывных коэффициентов [80–85]. На основе этого построена теория разрешимости граничных задач для параболических уравнений и систем [3, 30–32, 67, 86, 99].

Интегральные преобразования применяются при изучении задач для других классов уравнений. Здесь в первую очередь следует указать задачу Коши для гиперболических уравнений и систем [20, 21, 69, 70, 72, 73, 105, 106], а также и простейшие смешанные задачи [73, 104, 111]. В работах [93, 95–98] использована теория псевдодифференциальных операторов при изучении смешанных задач в цилиндрической области для гиперболических уравнений.

Подход использования интегральных преобразований и псевдодифференциальных операторов требует либо хороших операторов, порожденных рассматриваемыми задачами, либо хороших областей, в которых задаются основные уравнения (системы), либо других существенных ограничений.

В работах [8, 10, 11] предлагается метод Фурье для неотрицательных уравнений в случае цилиндрических областей относительно временной независимой переменной.

В теории разрешимости граничных задач важную роль играют априорные оценки или энергетические неравенства. Предположим, что рассматриваемая задача записывается в виде линейного операторного уравнения

$$Lu = F, \tag{1.1}$$

где оператор L определен в банаховом пространстве B и действует в гильбертово пространство H. Под энергетическим неравенством понимается неравенство вида

$$\|u\|_B \leq C\|Lu\|_H \tag{1.2}$$

для любой функции u из плотной в B области определения $D(L)$ оператора L и некоторой константы $C > 0$, не зависящей от u; $\|\cdot\|_B, \|\cdot\|_H$ — значения норм в пространствах B и H соответственно.

Из неравенства (1.2) немедленно следует единственность решения (если оно существует) в пространстве B уравнения (1.1) или исходной линейной задачи, порождающей (1.1).

Для доказательства существования решения уравнения (1.1) для любого $F \in H$ необходимо показать совпадение множества значений $R(L)$ с H. Как правило, равенство $R(L) = H$ не выполняется, а тем более, если область определения $D(L)$ оператора L представляет множество достаточно гладких функций. В связи с этим делается расширение оператора L. Существуют различные расширения [25–28]: в слабой топологии, в сильной топологии и другие. Реализации этих идей применительно к конкретным рассматриваемым задачам посвящена многочисленная литература [9, 16, 17, 20, 21, 24–28, 36–39, 41–50, 54, 57–62, 71, 90, 91, 100, 103 и др.].

2. Введение обобщенного решения путем расширения оператора в слабой топологии близко к идеям введения обобщенной производной и связано с именами С.Л.Соболева, К.О.Фридрихса, А.А.Дезина и ряда других математиков. Здесь уравнение понимается как равенство функционалов. Хорошей иллюстрацией такого подхода к эллиптическим задачам является глава IV из [64]. В [24] кроме эллиптических задач рассматриваются граничные задачи для гиперболических и параболических уравнений, для которых вводятся обобщенные решения изучаемых задач как расширения соответствующих функционалов. Такой подход использовал Л.Гординг при изучении задачи Коши для линейных гиперболических уравнений [20, 21]. Неотъемлемой частью этого метода, в частности, при доказательстве энергетических неравенств являются операторы осреднения. В [24, 25] для сохранения однородных граничных условий используются операторы осреднения со сдвигом. Для этих целей можно эффективно использовать операторы осреднения переменного шага [12–15, 51–53, 94], сохраняющие граничные условия как однороднные, так и неоднородные для достаточно большой конфигурации областей, которые строятся с помощью разбиения единицы и операторов осреднения С.Л.Соболева [76]. Этой идеи посвящены и работы [23,50], где доказывается существование и единственность обобщенного решения задачи типа Дирихле для некоторых неклассических уравнений 3-го порядка. Под влиянием работы [24] автором данной статьи рассмотрено обобщенное решение в слабой топологии путем расширения оператора до замкнутого смешанной задачи гиперболического относительно заданного векторного поля уравнения второго порядка в случае нецилиндрической области [49]. В книге Ж.-Л.Лионса и Э.Мадженеса [107] отмечена (см. стр.341, пробл.13.7) актуальность изучения задач для уравнений эволюционного типа в нецилиндрических областях. Несмотря на то, что по указанной теме появились работы сравнительно давно (см., например, [22, 29, 87–89, 117–119] и др.), в последние годы эта проблема находится в центре внимания многих математиков, что подтверждается возросшим количеством публикаций [8–11, 33–35, 40, 55, 56, 68, 75, 108, 109, 114–116] и др. Указанные работы относятся к случаю двух независимых переменных или простейших областей. Этот интерес диктуется не только развитием теории дифференциальных уравнений с частными производными, но и изучением задач, возникающих при моделировании конкретных физических и других ситуаций в областях, изменяющихся во времени. Метод энергетических неравенств и операторов осреднения пере-

менного шага позволяет (это показано в [23, 49, 50, 54] и будет показано далее при рассмотрении случая сильного решения) исследовать постановку и разрешимость многих граничных задач для гиперболических, параболических и других уравнений, заданных в нецилиндрических областях достаточно общей структуры.

3. В этом пункте рассмотрим общие положения сильного расширения оператора рассматриваемой задачи путем его замыкания. Затем будет доказано существование и единственность сильного решения граничных задач гиперболического относительно заданного векторного поля уравнения в ограниченной области.

Предположим, что оператор L уравнения (1.1) допускает замыкание $\overline{L}$. Как известно [65,79], линейный оператор $L: B \to H$ допускает замыкание тогда и только тогда, если из соотношений $u_k \to 0$ в B ($u_k \in D(L)$) и $Lu_k \to F$ в H следует $F = 0$.

Определение 1. Решение операторного уравнения

$$\overline{L}u = F, \quad u \in D(\overline{L}), \tag{3.1}$$

называется сильным решением уравнения (1.1).

Теорема 1. Если справедливо энергетическое неравенство (1.2) для оператора $L: B \to H$ и оператор L допускает замыкание $\overline{L}$, то справедливо неравенство

$$\|u\|_B \le C\|\overline{L}u\|_H \tag{3.2}$$

для любого элемента $u \in D(\overline{L})$, где постоянная C та же, что и в (1.2).

Утверждение теоремы 1 является фактически следствием неравенства (1.2) и определения оператора $\overline{L}$. Неравенство (3.2) получается из (1.2) путем предельного перехода для любой функции $u \in D(\overline{L})$.

Следствие 1. Если сильное решение уравнения (1.1) существует, то оно единственно.

Неравенство (1.2) является критерием непрерывности обратного оператора L^{-1}, определенного на множестве значений $R(L)$ оператора L. Непрерывный оператор L^{-1} по непрерывности можно продолжить на множество $\overline{R(L)}$ (замыкание $R(L)$). В результате продолжения получим непрерывный оператор $\overline{L^{-1}}$ на $\overline{R(L)}$.

Теорема 2. Если для оператора $L: B \to H$ справедливо энергетическое неравенство (1.2) и оператор L допускает замыкание $\overline{L}$, то $\overline{R(L)} = R(\overline{L})$ и $\overline{L^{-1}} = \overline{L}^{-1}$, где $\overline{L}^{-1}$ — обратный оператор по отношению к оператору $\overline{L}$, определенный на множестве значений $R(\overline{L})$ оператора $\overline{L}$.

Доказательство. На основании своего определения $R(\overline{L}) \subset \overline{R(L)}$. Докажем обратное включение, т.е. $\overline{R(L)} \subset R(\overline{L})$.

Пусть $F \in \overline{R(L)}$. Тогда существует последовательность $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$, $F_k \in R(L)$, которая сходится к F в H при $k \to \infty$. Последовательность $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной и $F_k = Lu_k$, $u_k \in D(L)$. Из неравенства (1.2) вытекает, что последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной в B. Так как B — банахово пространство, то существует $u \in B$ и $u_k \to u$ в B. А это означает, что, согласно определению сильного решения, $u \in D(\overline{L})$ и $\overline{L}u = F$, т.е. $F \in R(\overline{L})$. Отсюда и из равенства $D\left(\overline{L^{-1}}\right) = D\left(\overline{L}^{-1}\right)$ следует $\overline{L^{-1}} = \overline{L}^{-1}$.

Следствие 2. Для доказательства существования сильного решения уравнения (1.1) при любом $F \in H$ достаточно доказать энергетическое неравенство (1.2), замыкаемость оператора L и плотность множества значений $R(L)$ в пространстве H.

4. Теперь рассмотрим постановку некоторых граничных задач для линейного относительно заданного векторного поля гиперболического уравнения второго порядка, а затем доказательство существования и единственности сильного решения этих задач.

Будем рассматривать функции от независимых переменных $x=(x_1,...,x_n)$ n-мерного евклидова пространства R^n. Предположим, что в R^n задано векторное поле $\aleph$ класса C^{1*}, элементами которого являются единичные векторы $\eta(x)=$ $=(\eta_1(x),...,\eta_n(x)), |\eta(x)|^2=\eta_1^2(x)+...+\eta_n^2(x)=1$.

Рассмотрим линейное дифференциальное с частными производными уравнение второго порядка гиперболического типа относительно векторного поля $\aleph$, которое задается в виде

$$A(x,D)u=\sum_{|\alpha|\le 2}a_\alpha(x)D^\alpha u=f(x), \tag{4.1}$$

где $D^\alpha u=\dfrac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n$, $a_\alpha(x)$, $f(x)$ — заданные функции независимых переменных x в ограниченной области $Q\subset R^n$.

Определение 2. Уравнение (4.1) в точке x относительно направления $\eta(x)$ будем называть гиперболическим, если:

(*i*) характеристический полином $A_0(x,\eta(x))=A_0(x,\eta)=A_0(\eta)=\sum_{|\alpha|=2}a_\alpha(x)\times$ $\times\eta_1^{\alpha_1}(x)...\eta_n^{\alpha_n}(x)$ отличен от нуля (для определенности считаем $A_0(x,\eta)\ge\delta$, δ – некоторое положительное число);

(*ii*) полином $A_0(x,\tau\eta(x)+\xi(x))$ относительно $\tau\in R^1$ имеет два действительных различных корня, где $\xi(x)=(\xi_1(x),...,\xi_n(x))$, $|\xi(x)|=1$, $(\eta(x),\xi(x))=$ $=\sum_{i=1}^{n}\eta_i(x)\xi_i(x)=0$.

Уравнение (4.1) гиперболично в замыкании $\overline{Q}\subset R^n$ области Q, если оно гиперболично в каждой точке $x\in\overline{Q}$ относительно направления $\eta(x)$ из заданного в $\overline{Q}$ векторного поля $\aleph$.

Для удобства уравнение (4.1) будем записывать еще и в виде

$$A(x,D)u=\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)u_{x_i}+a_0(x)u=f(x), \tag{4.1'}$$

где $u_{x_i}=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{x_ix_j}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$, $a_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=1,...,n)$.

Обозначим через $K(x)$ характеристический конус (4.1) или (4.1'), соответствующий точке x, который состоит из совокупности векторов $z(x)=\mu(\tau\eta(x)+\xi(x))$, где $\mu\in[0,\infty)$, $\tau\in(0,\infty)$ и $\tau A_0(x,\eta)\ge -A_0(x;\eta,\xi)+G_\eta^{1/2}(x;\xi)$, $G_\eta(x;\xi)=A_0^2(x;\eta,\xi)-$ $-A_0(x,\eta)A_0(x,\xi)$, $A_0(x;\eta,\xi)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\eta_i(x)\xi_j(x)$, векторы $\eta(x)$ и $\xi(x)$ из определения 2.

Пусть $K^\perp(x)$ – двойственный конус относительно $K(x)$, т.е. $K^\perp(x)=$ $=\left\{\mu(x)=(\mu_1(x),...,\mu_n(x))\,\middle|\,0\le(\mu(x),\zeta(x))=\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x)\zeta_i(x)\right.$ для любого вектора $\left.\zeta(x)\in K(x)\right\}$.

Предположим, что граница ∂Q области Q является кусочно-гладкой. С помощью характеристического полинома, векторов $\eta(x)\in\aleph$ и внешней нормали

---

[*] Векторное поле $\aleph$ – из класса C^1, если функции $\eta_i(x)$ ($i=1,...,n$) элементов его $\eta(x)$ из класса $C^1(R^n)$ (непрерывно дифференцируемы в R^n).

$\nu(x)$ ($x\in\partial Q$) разобьем ∂Q на части, на которых либо задаются условия Коши, либо условие Гурса, либо другие граничные условия, либо отсутствуют условия. Для этого наряду с векторным полем $\mathcal{N}$ введем векторное поле $\mathfrak{R}$ с помощью конуса $K^L(x)$.

Обозначим через $\mathfrak{R}$ векторное поле в R^n элементов $r(x)=(r_1(x),...,r_n(x))$, которое определяется следующими требованиями:

($\mathfrak{R}_1$) для каждой точки $x\in\overline{Q}$ вектор $r(x)$ является внутренним вектором конуса $K^L(x)$;

($\mathfrak{R}_2$) поле $\mathfrak{R}$ из класса C^1.

Пусть $\nu(x)$ — единичный вектор внешнего по отношению к области Q перпендикуляра к гиперповерхности ∂Q в точке $x\in\partial Q$. Обозначим через r_ν скалярное произведение $(r(x),\nu(x))$, т.е. $r_\nu(x)=\sum_{i=1}^{n} r_i(x)\nu_i(x)$.

Предположим, что граница ∂Q состоит из следующих пяти частей:

$S_0=\{\, x\in\partial Q \mid A_0\,(x;\nu(x))\geq\delta,\ r_\nu(x)>0,\ \delta>0 \,\}$;

$S_1=\{\, x\in\partial Q \mid A_0\,(x;\nu(x))=0,\ r_\nu(x)>0 \,\}$;

$S_2=\{\, x\in\partial Q \mid A_0\,(x;\nu(x))\leq-\delta \,\}$;

$S_3=\{\, x\in\partial Q \mid A_0\,(x;\nu(x))=0,\ r_\nu(x)<0 \,\}$;

$S_4=\{\, x\in\partial Q \mid A_0\,(x;\nu(x))\geq\delta,\ r_\nu(x)<0 \,\}$.

К уравнению (4.1) присоединим следующие условия:

$$u\big|_{S_2\cup S_3}=0, \tag{4.2}$$

$$l_0u=u\big|_{S_4}=\varphi(x),\quad l_1u=\frac{\partial u}{\partial p}\Big|_{S_4}=\psi(x),\quad x\in S_4, \tag{4.3}$$

где $\partial/\partial p$ — производная по направлению p из векторного поля $\wp$ класса C^1, которое не является касательным к S_4.

Условие 1. Область Q такова, что существует векторное поле $\mathfrak{R}$, удовлетворяющее требованиям ($\mathfrak{R}_1$) и ($\mathfrak{R}_2$), для которого скалярное произведение $r_\nu(x)\leq0$ для почти всех $x\in S_2$.

Отметим, что конус $K(x)$ можно рассматривать как совокупность векторов $\zeta(x)=\tau\eta(x)+\xi(x)$, где

$$\tau A_0\big(x;\eta(x)\big)\geq -A_0\big(x;\eta,\xi\big)+G_\eta^{1/2}\big(x;\xi\big) \tag{4.4}$$

для любого вектора $\xi(x)\in R^n$, ортогонального $\eta(x)$.

Свойство 1. $K(x)$ — выпуклое множество.

Доказательство. Пусть $\zeta(x)=(\tau\eta+\xi)(x)$ и $\widetilde{\zeta}(x)=\big(\widetilde{\tau}\eta+\widetilde{\xi}\big)(x)$ — произвольные точки конуса $K(x)$. Согласно (4.4),

$$\tau(x)A_0(x;\eta)\geq -A_0(x;\eta,\xi)+G_\eta^{1/2}(x;\xi), \tag{4.5}$$

$$\widetilde{\tau}(x)A_0(x;\eta)\geq -A_0\big(x;\eta,\widetilde{\xi}\big)+G_\eta^{1/2}\big(x;\widetilde{\xi}\big), \tag{4.5'}$$

где $(\xi,\eta)=0$ и $\big(\widetilde{\xi},\eta\big)=0$, $\xi,\widetilde{\xi}\in R^n$. Множество $M(x)=\big\{\xi(x)\in R^n \big| (\xi,\eta)=0\big\}$ является векторным подпространством пространства R^n. Из определения 2 следует, что выражение $G_\eta^{1/2}(x;\xi)$ является нормой относительно элемента $\xi(x)\in M(x)$ и выполняется неравенство Коши–Буняковского

$$\Big|G_\eta\big(x;\xi,\widetilde{\xi}\big)\Big|\leq G_\eta^{1/2}(x;\xi)\cdot G_\eta^{1/2}\big(x;\widetilde{\xi}\big) \tag{4.6}$$

для скалярного произведения

$$G_\eta\big(x;\xi,\widetilde{\xi}\big)=A_0(x;\eta,\xi)A_0\big(x;\eta,\widetilde{\xi}\big)-A_0(x,\eta)A_0\big(x;\xi,\widetilde{\xi}\big) \tag{4.7}$$

относительно элементов $\xi,\widetilde{\xi}\in M(x)$. То что (4.7) – скалярное произведение следует из определения 2 гиперболичности уравнения (4.1). Таким образом, согласно (4.4) и определения выпуклых множеств для доказательства свойства 1, достаточно доказать неравенство

$$\left(\lambda\tau(x)+(1-\lambda)\tilde{\tau}(x)\right)\cdot A_0(x,\eta)\geq -A_0\left(x;\eta,\lambda\xi+(1-\lambda)\tilde{\xi}\right)+G_\eta^{1/2}\left(x,\lambda\xi+(1-\lambda)\tilde{\xi}\right) \quad (4.8)$$

для любого числа $0\leq\lambda\leq 1$.

Легко проверить, что

$$A_0\left(x,\eta,\lambda\xi+(1-\lambda)\tilde{\xi}\right)=\lambda A_0(x;\eta,\xi)+(1-\lambda)A_0(x;\eta,\xi), \quad (4.9)$$

$$G_\eta\left(x,\lambda\xi+(1-\lambda)\tilde{\xi}\right)=\lambda^2 G_\eta(x;\xi)+2\lambda(1-\lambda)G_\eta\left(x;\xi,\tilde{\xi}\right)+(1-\lambda)^2 G_\eta\left(x;\tilde{\xi}\right). \quad (4.10)$$

Отсюда и из неравенств (4.5),(4.5'), используя (4.6), следует и доказываемое неравенство (4.8).

Следствие 3. Так $K^*(x)$ — двойственный конус по отношению к конусу $K(x)$ и $K(x)$ — выпуклое множество, то и $K^*(x)$ представляет собой также выпуклое множество.

Свойство 2. Векторное поле $\mathfrak{R}$, определенное относительно оператора $A(x,D)$, таково, что для любого $x\in\overline{Q}$ каждый перпендикулярный к $r(x)\in\mathfrak{R}$ вектор $q(x)=(q_1(x),...,q_n(x))$ удовлетворяет неравенству $A_0(x,q)\leq-\delta_1<0$, где $|q(x)|=1$.

Утверждение этого свойства следует из определений множеств $\mathfrak{R}$ и $K^*(x)$ и требований $(\mathfrak{R}_1)$ и $(\mathfrak{R}_2)$.

Задачу (4.1)–(4.3) можно рассматривать как операторное уравнение

$$Lu=\left(A(x,D)u,l_0u,l_1u\right)=F \quad (4.11)$$

с областью определения $D(L)=\left\{u\in C^2(\overline{Q})\,\middle|\, u|_{S_2\cup S_3}=0\right\}$ оператора L, где $C^2(\overline{Q})$ — множество непрерывно дифференцируемых до второго порядка функций в $\overline{Q}$. Для доказательства существования и единственности сильного решения задачи (4.1)–(4.3) введем пространства B и H.

Обозначим через $S(x)$ сечение области Q, проходящее через точку $x\in\overline{Q}$ и такое, что:

1. $A_0(y,\nu(y))\geq\delta>0$ для почти всех точек $y\in S(x)$, где $\nu(y)$ — единичный вектор нормали к поверхности $S(x)$ в точке $y\in S(x)$.

2. $S(x)$ является кусочно-гладкой гиперповерхностью и такой, что гладкие части ее являются поверхностями класса C^1.

3. Совокупность сечений $\{S(x)\}_{x\in\overline{Q}}$ такова, что два различные сечения из этого множества не пересекаются ни в одной точке $x\in\overline{Q}$, т.е. точки одного сечения находятся по одну сторону по отношению к другому сечению.

Каждому сечению $S(x)$ поставим в соответствие параметр t и обозначим S^t. Считаем, что $\overline{Q}=\bigcup_{0\leq t\leq 1}S^t$, для разных $t\neq\tilde{t}$ $(t,\tilde{t}\in[0,1])$ $S^t\cap S^{\tilde{t}}=\varnothing$ ($\varnothing$ — пустое множество), гиперповерхности S_4 и S_0 входят в семейство $\{S(x)\}_{x\in\overline{Q}}$ и $S_4=S^0$, $S_0=S^1$.

Обозначим через B банахово пространство, полученное замыканием множества $D(L)$ по норме

$$\|u\|_B=\sup_{0\leq t\leq 1}\sum_{|\alpha|\leq 1}\left\|D^\alpha u\right\|_{L_2(S^t)}, \quad (4.12)$$

где $\|\cdot\|_{L_2(S^t)}$ — норма пространства квадратично суммируемых по Лебегу функций, заданных на гиперповерхности S^t. Обозначим через H гильбертово пространство

$$H=L_2(Q)\times H^1_{\text{гр}}(S_4)\times L_2(S_4), \quad (4.13)$$

где $L_2(Q)$ — пространство квадратично суммируемых по Лебегу функций в Q, $L_2(S_4)$ — то же пространство функций, заданных на S_4, $H^1_{\text{гр}}(S_4)$ — пополнение $D(L)$ по норме пространства $H^1(S_4)$, $H^1(S_4)$ — пространство Соболева квадратично суммируемых по Лебегу вместе с квадратично суммируемыми обобщенными производными первого порядка функций, заданных на S_4.

Условие 2. Коэффициенты $a_\alpha(x)$ уравнения (4.1) таковы, что $a_\alpha(x)\in C^2(\overline{Q})$ для $|\alpha|=2$ и $a_\alpha(x)$ измеримы и ограничены для $|\alpha|=1$.

Теорема 3. При выполнении условий 1 и 2 для оператора задачи (4.1)–(4.3) справедливо энергетическое неравенство, т.е.

$$\|u\|_B \le C\|Lu\|_H$$

для любого $u\in D(L)$, где постоянная $C>0$ не зависит от u, пространства B и H определены с помощью (4.12)и (4.13).

Доказательство. Каждое сечение $S^t(0<t<1)$ область Q делит на две подобласти Q^t и $Q^{\tilde{t}}$. К Q^t условимся относить ту подобласть, для которой внешняя нормаль $\nu(x)$ к гиперповерхности S^t в точках $x\in S^t$, как к части границы ∂Q^t, составляет острый угол с вектором $r(x)$, т.е. $r_\nu(x)>0$.

Выражение $2A(x,D)u\dfrac{\partial u}{\partial r}$, где $\dfrac{\partial u}{\partial r}=u_r=\sum\limits_{i=1}^{n} r_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, проинтегрируем по Q^t. Воспользуемся записью оператора $A(x,D)$ из уравнения (4.1'). Чтобы применить формулу Остроградского, главную часть представим в виде дивергенции, а именно:

$$2\left(A(x,D)u,\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{L_2(Q^t)} = \sum_{i,j,k=1}^{n}\int_{Q^t}\left\{\left(a_{ij}r_k u_{x_j}u_{x_k}\right)_{x_i} - \right.$$
$$\left. -\left(a_{ij}r_k u_{x_i}u_{x_j}\right)_{x_k} + \left(a_{ij}r_k u_{x_i}u_{x_k}\right)_{x_j}\right\}dx + \int_{Q^t}\Phi(u)dx, \tag{4.14}$$

где $\Phi(u)$ — билинейная форма от функции u и ее производных первого порядка, т.е.

$$\Phi(u) = 2\sum_{i,k=1}^{n} a_i r_k u_{x_i}u_{x_k} + 2\sum_{k=1}^{n} a_0 r_k u u_{x_k} -$$
$$-\sum_{i,j,k=1}^{n}\left\{\left(a_{ij}r_k\right)_{x_i}u_{x_j}u_{x_k} - \left(a_{ij}r_k\right)_{x_k}u_{x_i}u_{x_j} + \left(a_{ij}r_k\right)_{x_j}u_{x_i}u_{x_k}\right\}.$$

В силу формулы Остроградского

$$2\left(A(x,D)u,u_r\right)_{L_2(Q^t)} = \mathfrak{Z}\left(Q^t\right) + \int_{Q^t}\Phi(u)dx,$$

$$\mathfrak{Z}\left(Q^t\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\partial Q^t} a_{ij}\left[u_{x_j}u_r\nu_i - u\nu_i - u_{x_j}r_\nu + u_{x_i}u_r\nu_j\right]ds.$$

Для оценки $\mathfrak{J}(Q^t)$ воспользуемся локальной декартовой системой ν, τ, μ, $\tau^{(1)},\dots,\tau^{(n-3)}$. В названной локальной системе координат одну ось направим по вектору $\nu(x)$, вторую — по перпендикулярному к нему вектору $\tau(x)\in\pi_0(x)$, где $\pi_0(x)$ — двумерная плоскость, содержащая векторы $\nu(x)$ и $r(x)$.Остальные координаты выбираем следующим образом. Три гиперплоскости, проходящие через точку x, где одна перпендикулярна вектору $\nu(x)$, вторая — $\operatorname{grad} u(x)$, третья — $\tau(x)$, пересекаются по плоскости размерности не менее $n-3$. В этом пересечении выберем ортогональные координатные векторы $\tau^{(1)}(x),\dots,\tau^{(n-3)}(x)$. Векторами $\nu(x)$, $\tau(x)$, $\tau^{(1)}(x),\dots,\tau^{(n-3)}(x)$ определяется перпендикулярный им последний до полной системы вектор $\mu(x)$. В силу такого выбора

$$u_{\tau^{(s)}}(x)=0,\quad s=1,\dots,n-3.$$

Переразлагая производные в подынтегральном выражении по новым направлениям, $\mathfrak{J}(Q^t)$ можно записать в виде

$$
\Im\left(Q^t\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\partial Q^t} a_{ij}\Big[\left(u_\nu\nu_j+u_\tau\tau_j+u_\mu\mu_j\right)\left(u_\nu r_\nu+u_\tau r_\tau+u_\mu r_\mu\right)\nu_i-
$$

$$
-\left(u_\nu\nu_i+u_\tau\tau_i+u_\mu\mu_i\right)\left(u_\nu\nu_j+u_\tau\tau_j+u_\mu\mu_j\right)r_\nu+
$$

$$
+\left(u_\nu\nu_i+u_\tau\tau_i+u_\mu\mu_i\right)\left(u_\nu r_\nu+u_\tau r_\tau+u_\mu r_\mu\right)\nu_j\Big]ds=\int_{\partial Q^t}\Big[r_\nu A_0(\nu)u_\nu^2+ \tag{4.15}
$$

$$
+\left(2r_\tau A_0(\nu,\tau)-r_\nu A(\tau)\right)u_\tau^2+\left(2r_\mu A_0(\nu,\mu)-r_\nu A_0(\mu)\right)u_\mu^2+2r_\tau A_0(\nu)u_\nu u_\tau+
$$

$$
+2r_\mu A_0(\nu)u_\nu u_\mu+2\left(r_\mu A_0(\nu,\tau)+r_\tau A_0(\nu,\mu)-r_\nu A_0(\tau,\mu)\right)u_\tau u_\mu\Big]ds=\int_{\partial Q^t}\Phi_0(u)ds,
$$

где $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_n)$, $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$, $r_\zeta=(r,\zeta)=\sum r_k\zeta_k$, $\zeta\in\{\nu,\tau,\mu\}$ в системе координат $x_1,\dots,x_n$; $r=\{r_\nu,r_\tau,r_\mu,0,\dots,0\}$ в системе координат ν, τ, μ, $\tau^{(1)},\dots,\tau^{(n-3)}$;

$$
A_0(\zeta,\xi)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\zeta_i\xi_j,\quad A_0(\zeta,\zeta)=A_0(\zeta)=A_0(x,\zeta).
$$

Интеграл (4.15) разобьем на сумму с учетом заданных условий (4.2) и (4.3), а именно:

$$
\Im\left(Q^t\right)=\int_{S^t}\Phi_0(u)ds+\sum_{m=1}^{4}\int_{\partial Q^t\cap S_m}\Phi_0(u)ds=\sum_{m=0}^{4}\Im_m\left(Q^t\right) \tag{4.16}
$$

В силу условия (4.2) на S_3 $u_r=u_\mu=0$. В этом случае $\Phi_0(u)=u_\nu^2A_0(\nu)r_\nu$. Но для $x\in S_3$ $A_0(\nu)=0$. Следовательно,

$$
\Im_3\left(Q^t\right)=\int_{\partial Q^t\cap S_3}\Phi_0(u)ds=0. \tag{4.17}
$$

Для $x\in S_2$ также $u_\tau=u_\mu=0$ (см. (4.2)). И так как, в силу условия 1, $r_\nu\le 0$ и для $x\in S_2$ $A_0(\nu)<0$, то $\Phi_0(u)\ge 0$ для $x\in S_2$ и, следовательно,

$$
\Im_2\left(Q^t\right)=\int_{\partial Q^t\cap S_2}\Phi_0(u)ds\ge 0. \tag{4.18}
$$

Значения $\mathcal{I}_0(Q^t)$ и $\mathcal{I}_1(Q^t)$ похожи друг на друга тем, что отсутствуют граничные условия на $S(t)$ и S_1. В этих интегралах подынтегральное выражение будем рассматривать как квадратичную форму относительно производных u_ν, u_τ и u_μ. Для оценки снизу (4.14) воспользуемся критерием Сильвестра [18 (с.276–279)] относительно квадратичной формы $\Phi_0(u)$, матрицу которой можно записать в виде

$$
\begin{pmatrix}
r_\nu A_0(\nu) & r_\tau A_0(\nu) & r_\mu A_0(\nu)\\
r_\tau A_0(\nu) & 2r_\tau A_0(\nu,\tau)-r_\nu A_0(\tau) & r_\mu A_0(\nu,\tau)+r_\tau A_0(\nu,\mu)-r_\nu A_0(\tau,\mu)\\
r_\mu A_0(\nu) & r_\mu A_0(\nu,\tau)+r_\tau A_0(\nu,\mu)-r_\nu A_0(\tau,\mu) & 2r_\mu A_0(\nu,\mu)-r_\nu A_0(\mu)
\end{pmatrix}. \tag{4.19}
$$

Так как для $x\in S_1$ $A_0(\nu)=0$, то для этих x

$$
2r_\tau A_0(\nu,\tau)-r_\nu A_0(\tau)=-\frac{1}{r_\nu}A_0(q), \tag{4.20}
$$

где вектор $q(x)=r_\tau(x)\nu(x)-r_\nu(x)\tau(x)$ и представляет собой поворот вектора $r(x)$ на 90° в плоскости $\pi_0(x)$. Аналогично,

$$
2r_\mu A_0(\nu,\mu)-r_\nu A_0(\mu)=-\frac{1}{r_\nu}A_0(\chi), \tag{4.21}
$$

$$r_\mu A_0(\nu,\tau)+r_\tau A(\nu,\mu)-r_\nu A_0(\tau,\mu)=-\frac{1}{r_\nu}A_0(q,\chi), \tag{4.22}$$

где $\chi(x)=r_\mu(x)\nu(x)-r_\nu(x)\mu(x)$ и представляет собой поворот на 90° вектора $r(x)$ в двумерной плоскости, содержащей векторы $r(x)$ и $\mu(x)$. Таким образом, для любого $x\in S_1$

$$\Phi_0(u)=-\frac{1}{r_\nu(x)}\left[A_0(q)u_\tau^2+2A_0(q,\chi)u_\tau u_\mu+A_0(\chi)u_\mu^2\right](x).$$

Согласно свойству 2,

$$A_0(x;q(x)),\quad A_0(x;\chi(x))\le -C_1<0. \tag{4.23}$$

Применяя схему доказательства неравенства Коши–Буняковского (см., напр., [78], с.41–42), можно доказать неравенство

$$A_0(x;q(x))A_0(x;\chi(x))-A_0^2(x;q(x),\chi(x))\ge C_2>0. \tag{4.24}$$

Действительно, $A_0(x;q(x))\le -C_3<0$, так как $q(x)$ перпендикулярен $r(x)$ (см. свойство 2). Нетрудно видеть, что $r_\mu(x)=0$, так как $\mu(x)$ перпендикулярен $\nu(x)$ и $r(x)$. Следовательно, вектор $\chi(x)$ перпендикулярен $r(x)$. Линейная комбинация $q(x)-\lambda\chi(x)$, где λ число, представляет собой вектор, перпендикулярный $r(x)$. Тогда

$$0>-C_4\ge A_0(x;q(x)-\lambda\chi(x))=A_0(x;q(x))-2A_0(x;q(x),\chi(x))+\lambda^2A_0(x;\chi(x))$$

для любого числа λ. А это возможно лишь тогда, если дискриминант отрицателен, т.е. выполняется неравенство (4.24).

Так как $r_\nu(x)>0$, $A_0(x;\nu(x))=0$ и в силу неравенств (4.23) и (4.24) для всех $x\in S_1$ $\Phi_0(u)\ge 0$, т.е

$$\Im_1(Q^t)=\int\limits_{\partial Q^t\cap S_1}\Phi_0(u)ds\ge 0. \tag{4.25}$$

Сделаем оценки для $\Im_0(Q^t)$. Рассмотрим главные миноры матрицы (4.19) для случая $x\in S(t)$. Запишем их в удобной для исследования форме

$$d_1(x)=r_\nu(x)\,A_0(x;\nu(x)), \tag{4.26}$$

$$d_2(x)=-A_0(x;\nu(x))\,A_0(x;q(x)), \tag{4.27}$$

$$d_3(x)=\frac{A_0(\nu)}{r_\nu}\begin{vmatrix}1 & r_\nu A_0(\nu) & r_\mu A_0(\nu)\\ 0 & -A_0(q) & -A_0(q,\chi)\\ 0 & -A_0(q,\chi) & A_0(\chi)\end{vmatrix}(x)=$$
$$=\frac{A_0(x;\nu(x))}{r_\nu(x)}\left[A_0(x;q(x))A_0(x;\chi(x))-A_0^2(x;q(x),\chi(x))\right]. \tag{4.28}$$

Из формул (4.26)–(4.28) видно, что, используя свойство векторов $q(x)$ и $\chi(x)$ в виде неравенств (4.23),(4.24) и неравенство

$$r_\nu(x),\ A_0(x;\nu(x))\ge C_5>0$$

для любого $x\in S(t)$,

$$d_p(x)\ge C_6>0,\ p=1,2,3. \tag{4.29}$$

Таким образом, из неравенств (4.29) следует:

$$\Im_0(Q^t)=\int\limits_{S(t)}\Phi_0(u)ds\ge C_7\int\limits_{S(t)}\left[u_\nu^2+u_\tau^2+u_\mu^2\right](x)ds,$$

где положительная константа C_7 не зависит от u. Но

$$u_\nu^2+u_\tau^2+u_\mu^2\ge C_8\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2$$

или

$$\Im_0(Q^t) \geq C_9 \sum_{i=1}^{n} \left\| u_{x_i} \right\|^2_{L_2(S(t))}. \qquad (4.30)$$

Оценивая сверху выражение $\Im_4(Q^t)$, мы получим неравенство

$$\Im_4(Q^t) = \int_{S_0} \Phi_0(u) ds \leq C_{10} \left(\left\| l_0 u \right\|^2_{H^1_{\text{гр}}(S_4)} + \left\| l_1 u \right\|^2_{L_2(S_4)} \right). \qquad (4.31)$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, легко сделать оценки

$$\left| \int_{Q^t} \Phi(u) ds \right| \leq C_{11} \left\| u \right\|^2_{H^1(Q^t)}, \qquad (4.32)$$

$$2 \left| (Au, u_t)_{L_2(Q^t)} \right| \leq C_{12} \left(\left\| Au \right\|^2_{L_2(Q)} + \left\| u \right\|^2_{H^1(Q^t)} \right). \qquad (4.33)$$

Равенства (4.14)–(4.17) и оценки (4.18), (4.23)–(4.25), (4.30)–(4.33) в совокупности порождают неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| u_{x_i} \right\|^2_{L_2(S(t))} \leq C_{13} \left\| Lu \right\|^2_H + C_{14} \left\| u \right\|^2_{H^1(Q^t)}. \qquad (4.34)$$

В левую часть (4.34) введем функцию u. Для этого проинтегрируем по Q^t выражение $(u^2)_t = 2uu_t$ и проведем соответствующие преобразования и оценки. В результате получим

$$\int_{S(t)} u^2 ds \leq C_{15} \left(\left\| l_0 u \right\|^2_{H^1_{\text{гр}}(S_4)} + \left\| l_1 u \right\|^2_{L_2(S_4)} + \left\| u \right\|^2_{H^1(Q^t)} \right). \qquad (4.35)$$

Неравенства (4.34) и (4.35) сложим. Получим новое неравенство, к которому можно применить неравенство Гронуолла (см. [21,41]). В результате получим соотношение

$$\int_{S(t)} \left[u^2 + \sum_{i=1}^{n} u^2_{x_i} \right] ds \leq C_{16} \left\| Lu \right\|^2_H, \qquad (4.36)$$

из которого легко следует доказываемое энергетическое неравенство, если в левой части (4.36) перейти к верхней грани.

Лемма 1. Оператор L задачи (4.1)–(4.3) как оператор из B в H допускает замыкание.

Доказательство. Пусть $u_k \to 0$ в B при $k \to \infty$, $u_k \in D(L)$. Так как $\left\| l_0 u_k \right\|^2_{H^1_{\text{гр}}(S_4)} \leq C \left\| u_k \right\|_B$ и $\left\| l_1 u_k \right\|^2_{L_2(S_4)} \leq C \left\| u_k \right\|_B$, $C > 0$, то отсюда следует $l_0 u_k \to 0$ в $H^1_{\text{гр}}(S_4)$ и $l_1 u_k \to 0$ в $L_2(S_4)$ при $k \to \infty$.

Рассмотрим скалярное произведение $(Au_k, v)_{L_2(Q)}$ для любой функции $v \in C_0^\infty(Q)$*.

Интегрируя по частям последнее выражение, получим

$$(A(x,D)u_k, v)_{L_2(Q)} = \left(u_k, \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} v_j)_{x_i} \right)_{L_2(Q)} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i (u_k)_{x_i} + a_0 u_k, v \right)_{L_2(Q)} \qquad (4.37)$$

Из предположения $\left\| u_k \right\|_B \to 0$ следует, что $\left\| u_k \right\|_{L_2(Q)} \to 0$ и $\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} u_k + a_0 u_k \right\|_{L_2(Q)} \to 0$ при $k \to \infty$. Поскольку множество $C_0^\infty(Q)$ плотно в $L_2(Q)$, то из последних соотношений и равенства (4.37) следует и $A(x,D)u_k \to 0$ в $L_2(Q)$.

---

* $C_0^\infty(Q)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций в Q с компактным носителем.

Условие 3. Область Q такова, что существует разбиение ее сечениями $S(t)$ на конечное число подобластей $Q_i\left(\bigcup_{i=1}^{i_0}\overline{Q_i}=\overline{Q}\right)$, при котором для каждой отдельно такой подобласти $Q_i\,(i=1,\dots,i_0)$ можно выбрать векторное поле $\mathfrak{R}$ элементов $r(x)=(r_1(x),\dots,r_n(x))$ из характеристического конуса $K^{\perp}(x)$ для каждой точки $x\in\overline{Q_i}$, удовлетворяющее следующим требованиям:

1. Выполняются условия $(\mathfrak{R}_1)-(\mathfrak{R}_2)$ относительно Q_i.

2. Для любой точки $x\in S_2\cap\overline{Q_i}$ $\;r_\nu(x)=\left(r(x),\nu(x)\right)=0$, где $\nu(x)$ — единичный вектор внешней относительно Q_i нормали в точке $x\in S_2\cap\overline{Q_i}$.

3. Q_i является выпуклым относительно поля $\mathfrak{R}$ в следующем смысле. Поле $\mathfrak{R}$, элементы которого в каждой точке $x\in R^n$ определяются единственным образом, порождает совокупность линий $\{\rho\}$, к которым оно является касательным. Множество Q_i будем называть выпуклым относительно $\mathfrak{R}$, если Q_i с любой линией ρ, к которому $\mathfrak{R}$ касательно, может пересекаться только по односвязному множеству.

Теорема 4. При выполнении условий 1–3 и $S_0\cup S_1\neq\varnothing$, $S_4\cup S_3\neq\varnothing$ ($\varnothing$ — пустое множество) для любого $F\in H$ существует и единственно сильное решение $u\in B$ (см. (4.12)) задачи (4.1)–(4.3) и справедлива оценка

$$\|u\|_B\le C\|F\|_H. \tag{4.38}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 1 следует оценка (4.38), из следствия 1 — единственность сильного решения, если оно существует.

Для доказательства существования сильного решения, согласно следствию 2, теореме 3 и лемме 1, достаточно доказать плотность множества значений $R(L)$ оператора L в пространстве H. Рассмотрим сначала случай оператора $L_0=(A_0(x,D),l_0,l_1)$ с областью определения $D(L_0)=D(L)$.

Пусть элемент $V=(v(x),v_0(x),v_1(x))\in H$ ортогонален $R(L_0)$. Это означает, что

$$\left(A_0u,v\right)_{L_2(Q)}+\left(l_0u,v_0\right)_{H^1(S_4)}+\left(l_1u,v_1\right)_{L_2(S_4)}=0 \tag{4.39}$$

для любого $u\in D(L)$. Полагая в (4.39), в частности, что u равно любому элементу из множества $D_0(L)=\left(u\in D(L)\middle| l_0u=l_1u=0\right)\subset D(L)$, получим равенство

$$\left(A_0(x,D)u,v\right)_{L_2(Q)}=0 \tag{4.40}$$

для всех $u\in D_0(L)$. В (4.40) вместо u возьмем J_ku, где J_k — операторы осреднения переменного шага, а $u\in C_0^\infty(Q)\subset D_0(L)$. Так как $u\in C_0^\infty(Q)$, то $J_ku\in C_0^\infty(Q)$ при любых $\delta_{mk}<2^{-4-m}$ (см. обозначения и утверждения в [51–53]). Теперь равенство (4.40) можно представить в виде

$$\begin{gathered}\left(A_0J_ku,v\right)_{L_2(Q)}=\left(J_kA_0u,v\right)_{L_2(Q)}+\left(A_0J_ku-J_kA_0u,v\right)_{L_2(Q)}=\left(A_0u,J_k^*v\right)_{L_2(Q)}+\\+\left(Ku,v\right)_{L_2(Q)}=\left(u,A_0J_k^*v\right)_{L_2(Q)}+\left(u,K_0^*v\right)_{L_2(Q)}-\sum_{i=1}^n\left(u,\frac{\partial}{\partial x_i}K_i^*v\right)_{L_2(Q)},\end{gathered} \tag{4.41}$$

где J_k^* — сопряженный оператор к оператору J_k [51]. Распишем более подробно коммутатор $K=A_0J_k-J_kA_0$. Итак,

$$Ku=K_0u+\sum_{i=1}^nK_i\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

где

$$\begin{gathered}K_0u=\sum_{m=0}^\infty\sum_{i,j=1}^n\left\{\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial\psi_m}{\partial x_j}J_{\delta_{mk}}u+a_{ij}\frac{\partial^2\psi_m}{\partial x_i\partial x_j}J_{\delta_{mk}}u-\right.\\\left.-\psi_m(x)\frac{1}{\delta_{mk}^n}\int_Q\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right)\left(\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial a_{ij}(y)}{\partial y_i}\right)\right]u(y)dy\right\}.\end{gathered}$$

$$K_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ 2a_{ij} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_j} J_{\delta_{mk}} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \right.$$

$$\left. - \psi_m(x) \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_Q \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}} \right) \left(a_{ij}(x) - a_{ij}(x) \right) \right] \frac{\partial u}{\partial y_i} dy \right\}.$$

Таким образом, для любой функции $u \in C_0^\infty(Q)$ получаем равенство

$$\left(u, A_0 J_k^* v + K_0^* v - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} K_i^* v \right)_{L_2(Q)} = 0, \tag{4.42}$$

которое с помощью предельного перехода распространяется на любую функцию $u \in L_2(Q)$.

Возвращаемся к равенству (4.39), где опять вместо u берем $J_k u$, а $u \in D_0(L)$. Перебрасывая операторы осреднения и дифференцирования с u на v похожим образом, как это сделано в (4.41), получим

$$\left(u, A_0 J_k^* v + K_0^* v - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} K_i^* v \right)_{L_2(Q)} + M(u, v; \partial Q) = 0, \tag{4.43}$$

где $M(u,v;\partial Q)$ — совокупность граничных слагаемых, которые получаются в результате интегрирования по частям выражения $\left(A_0 u, J_k^* v \right)_{L_2(Q)} + \left(Ku, v \right)_{L_2(Q)}$.
Из равенств (4.42),(4.43) следует, что

$$M(u, v; \partial Q) = 0. \tag{4.44}$$

Граничные слагаемые $M(u,v;\partial Q)$ можно выписать в явном виде. Варьируя функцией u в пределах множества $D_0(L)$, можно показать, что (4.44) выполняется для любого $u \in D_0(L)$ тогда и только тогда, если $v \in L_2(Q)$ таково, что

$$J_k^* v \Big|_{S_0 \cup S_1 \cup S_2} = \frac{\partial}{\partial \nu} J_k^* v \Big|_{S_0} = 0, \quad K_i^* v \Big|_{S_0 \cup S_1} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.45}$$

Отметим, что предыдущие рассуждения, начиная с (4.43), справедливы, вообще говоря, для нелинейных операторов осреднения, т.е. параметры $\delta_{mk} = \delta_{mk}(u, v)$ в операторах осреднения J_k выбираются в зависимости от u и v так, чтобы имели смысл граничные условия.

Обозначим через $\widetilde{Q}^t$ дополнение к $Q^t \cup S(t)$ области Q. Величина t выбрана таким образом, что $\widetilde{Q}^t$ представляет собой выпуклое множество относительно выбранного векторного поля $\Re$ по множеству Q_i (например $i = i_0$, согласно условию 3). Отметим, что $S_0 \subset \overline{Q}_{i_0}$. Введем обозначение $\left(\partial \widetilde{Q}^t \right)^- = \left\{ x \in \partial \widetilde{Q}^t \middle| r_\nu(x) < 0 \right\}$, где $\nu(x)$ — единичный вектор внешней нормали. Аналогично, $\left(\partial \widetilde{Q}^t \right)^+ = \left\{ x \in \partial \widetilde{Q}^t \middle| r_\nu(x) > 0 \right\}$. Обозначим через $Iv(x)$ криволинейный интеграл

$$Iv(x) = \int_{\widetilde{x}}^{x} J_k^* v \, ds, \tag{4.46}$$

где интегрирование ведется по кривой ρ, к которой векторное поле $\Re$ является касательным, x и $\widetilde{x}$ находятся на этой кривой и $\widetilde{x} \in \left(\partial \widetilde{Q}^t \right)^-$, $x \in \overline{\widetilde{Q}^t}$. Из определения интеграла (4.46) и условий (4.45) следует, что

$$J_k^* v \Big|_{\left(\partial \widetilde{Q}^t \right)^+ \cup \left(S_2 \cap \partial \widetilde{Q}^t \right)} = 0, \quad Iv \Big|_{\left(\partial \widetilde{Q}^t \right)^- \cup \left(S_2 \cap \partial \widetilde{Q}^t \right)} = 0. \tag{4.47}$$

$$J_k^* v(x) = \frac{\partial}{\partial r} Iv(x).$$

В равенстве (4.42) выбираем u по формуле

$$u(x) = \begin{cases} Iv(x), & x \in \widetilde{Q}^t \\ 0, & x \in Q^t \end{cases}. \quad (4.48)$$

Подставляя в (4.42) выбранную по формуле (4.48) функцию $u(x)$, получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\widetilde{Q}^t} Iv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial r} Iv \right) ds = \sum_{i=1}^{n} \left(Iv, \frac{\partial}{\partial x_i} K_i^* v \right)_{L_2(\widetilde{Q}^t)} - \left(Iv, K_0^* v \right)_{L_2(\widetilde{Q}^t)}. \quad (4.49)$$

Левую часть (4.49) проинтегрируем по частям, используя формулу Остроградского. Для этого подынтегральное выражение преобразуем к следующему дивергентному виду

$$\sum_{i,j=1}^{n} Iv \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial r} Iv \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} Iv \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial r} Iv \right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\Psi_0(v) - \Psi_1(v), \quad (4.50)$$

$$\Psi_0(v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} Iv \frac{\partial}{\partial x_j} Iv,$$

$$\Psi_1(v) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial r} Iv \frac{\partial}{\partial x_j} Iv + \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} Iv \frac{\partial}{\partial x_k} Iv.$$

В силу условий (4.47)

$$\int_{\widetilde{Q}^t} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} Iv \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial r} Iv \right) dx = 0. \quad (4.51)$$

Равенство (4.49) с учетом (4.50) и (4.51) можно записать так:

$$-\int_{\partial\widetilde{Q}^t} \Psi_0(v) r_\nu ds = \int_{\widetilde{Q}^t} \Psi_1(v) dx - 2\left(Iv, K_0^* v \right)_{L_2(\widetilde{Q}^t)} - 2\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} Iv, K_i^* v \right)_{L_2(\widetilde{Q}^t)}. \quad (4.52)$$

Рассмотрим более подробно левую часть (4.52). В силу условия 3 и (4.47)

$$\int_{(S_2 \cup S_3) \cap \partial\widetilde{Q}^t} \Psi_0(v) r_\nu ds = 0. \quad (4.53)$$

В точке $x \in S(t)$ выберем локальную декартову систему координат $\{\nu, \tau^2, \ldots, \tau^n\}$. В этой системе справедливо представление производной

$$\frac{\partial}{\partial x_i} Iv = \frac{\partial}{\partial \nu} Iv \nu_i + \frac{\partial}{\partial \tau^2} Iv \tau_i^2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial \tau^n} Iv \tau_i^n.$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial r} Iv = \frac{\partial}{\partial \nu} Iv r_\nu + \frac{\partial}{\partial \tau^2} Iv r_{\tau^2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial \tau^n} Iv r_{\tau^n}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} Iv = \frac{\nu_i}{r_\nu} J_k^* v + \left(\tau_i^2 - \frac{r_{\tau^2}}{r_\nu} \nu_i \right) \frac{\partial}{\partial \tau^2} Iv + \ldots + \left(\tau_i^n - \frac{r_{\tau^n}}{r_\nu} \nu_i \right) \frac{\partial}{\partial \tau^n} Iv = \frac{\nu_i}{r_\nu} J_k^* v.$$

Таким образом,

$$-\int_{S(t)} \Psi_0(v) r_\nu ds = -\int_{S(t)} \frac{1}{r_\nu} \left(J_k^* v \right)^2 A_0(x; \nu(x)) ds \geq C_1 \left\| J_k^* v \right\|_{L_2(S(t))}^2. \quad (4.54)$$

Рассмотрим теперь $\Psi_0(v)$ на $\left(\partial\widetilde{Q}^t\right)^+$. Здесь для почти всех x в локальной декартовой системе координат $\{r, q^2, \ldots, q^n\}$ справедливо представление производных

$$\frac{\partial}{\partial x_i} Iv = \frac{\partial}{\partial r} Iv r_i + \frac{\partial}{\partial q^2} Iv q_i^2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial q^n} Iv q_i^n = \sum_{k=2}^{q} q_i^k \frac{\partial}{\partial q^k} Iv. \quad (4.55)$$

Согласно свойству 2 и в силу представления (4.55) и того, что $r_\nu \geq \delta > 0$, для $x \in \left(\partial\widetilde{Q}'\right)^+$, $(r,\theta)=0$, $\theta = \left(\sum_{k=2}^{q} q_1^k \frac{\partial}{\partial q^k} Iv, \ldots, \sum_{k=2}^{q} q_n^k \frac{\partial}{\partial q^k} Iv \right)$,

$$
\begin{aligned}
&- \int_{(\partial\widetilde{Q}')^+} \Psi_0(v) r_\nu ds = -\sum_{k=2}^{n} \int_{(\partial\widetilde{Q}')^+} r_\nu(x) A_0(x,\theta) ds \geq \\
&\geq C_2 \sum_{k=2}^{n} \int_{(\partial\widetilde{Q}')^+} \left(\sum_{k=2}^{n} q_i^k \frac{\partial}{\partial q^k} Iv \right)^2 ds \geq C_3 \sum_{i=1}^{n} \int_{(\partial\widetilde{Q}')^+} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} Iv \right)^2 ds.
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

Вернемся к равенству (4.52). Левую часть его оцениваем снизу с помощью оценок (4.54) и (4.56), а правую часть сверху с помощью неравенства Коши–Буняковского. Затем, чтобы применить неравенство Гронуолла наряду с интегралом Iv, введем интеграл

$$
\widetilde{I}v(x) = \int_{x}^{\widetilde{\widetilde{x}}} J_k^* v ds,
$$

где интегрирование проводится по тем же линиям, что и в Iv. Здесь $\widetilde{\widetilde{x}} \in \left(\partial\widetilde{Q}'\right)^-$.

Из определения I и $\widetilde{I}$ следует, что между ними имеется связь $Iv(x) + \widetilde{I}v(x) = \widetilde{I}v(\widetilde{x})$. Из равенства (4.52) в силу (4.53),(4.54), (4.56) и после замены I на $\widetilde{I}$ получим неравенство

$$
\begin{aligned}
&C_1 \left\| J_k^* v \right\|^2_{L_2(S(t))} + C_3 \sum_{i=1}^{n} \int_{(\partial\widetilde{Q}')^-} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \widetilde{I}v \right)(\widetilde{x}) \beta(\widetilde{x}) ds \leq \\
&\leq \left| -\left(\widetilde{I}v(\widetilde{x}) - \widetilde{I}v(x), K_o^* v \right)_{L_2(\widetilde{Q}')} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \widetilde{I}v(\widetilde{x}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \widetilde{I}v(x), K_i^* v \right)_{L_2(\widetilde{Q}')} - \int_{\widetilde{Q}'} \Psi_1(v) dx \right|.
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

Функция $\beta(\widetilde{x})$ появилась в результате замены области интегрирования и $\beta(\widetilde{x}) \geq \widetilde{C} > 0$.

Наряду с (4.57) рассмотрим равенство

$$
\frac{1}{2} \int_{(\partial\widetilde{Q}')^-} \left(\widetilde{I}v\right)^2 (\widetilde{x}) \nu_r(\widetilde{\widetilde{x}}) \beta_1(\widetilde{x}) ds = \int_{\widetilde{Q}'} J_k^* v(x) \left[\widetilde{I}v(\widetilde{x}) - \widetilde{I}v(x) \right] dx \tag{4.58}
$$

которое получается из соотношения

$$
\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (Iv)(x) = J_k^* v(x) Iv(x)
$$

путем интегрирования его по области $\widetilde{Q}'$. Здесь также $\beta_1(\widetilde{x}) \geq \widetilde{C} > 0$ для некоторой константы $\widetilde{C}$. Из (4.58) очевидно следует неравенство

$$
C_4 \left\| \widetilde{I}v \right\|^2_{L_2\left((\widetilde{Q}')^-\right)} \leq \int_{\partial\widetilde{Q}'} J_k^* v(x) \left[\widetilde{I}v(\widetilde{x}) - \widetilde{I}v(x) \right] dx. \tag{4.59}
$$

Неравенства (4.57) и (4.59) складываем друг с другом. В левой части получим неотрицательное выражение. Для оценки правой части применяем неравенство Коши–Буняковского. Здесь также пользуемся и оценками [53]

$$
\left\| K_i^* v \right\|^2_{L_2(\widetilde{Q}')} \leq C_5 \left\| v \right\|_{L_2(\widetilde{Q}')} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).
$$

В результате получим

$$\left\|J_k^* v\right\|^2_{L_2(S(t))} + \left\|\widetilde{I} v\right\|_{L_2\left(\left(\partial\widetilde{Q}^t\right)^-\right)} + \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{I} v\right\|_{L_2\left(\left(\partial\widetilde{Q}^t\right)^-\right)} \le C_6(\varepsilon_0)\times$$

$$\times\left[\int_{\widetilde{Q}^t}\left\{\left(\widetilde{I} v\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{I} v\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}(\widetilde{x})dx + \left\|J_k^* v\right\|_{L_2(\widetilde{Q}^t)} + \left\|\widetilde{I} v\right\|_{L_2(\widetilde{Q}^t)} + \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{I} v\right\|_{L_2(\widetilde{Q}^t)}\right] + \quad (4.60)$$

$$+\varepsilon_0\|v\|_{L_2(\widetilde{Q}^t)},$$

где $C_6(\varepsilon_0)$ увеличивается обратно пропорционально уменьшению $\varepsilon_0>0$. Для первых слагаемых правой части (4.60) можно сделать такую оценку

$$\int_{\widetilde{Q}^t}\left\{\left(\widetilde{I} v\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{I} v\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}(\widetilde{x})dx \le C_7\tau\left[\left\|\widetilde{I} v\right\|_{L_2\left(\left(\partial\widetilde{Q}^t\right)^-\right)} + \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{I} v\right\|_{L_2\left(\left(\partial\widetilde{Q}^t\right)^-\right)}\right],$$

где τ уменьшается с уменьшением области $\widetilde{Q}^t$ по линиям ρ, т.е. $S(t)$ выбираем таким, чтобы линии ρ области $\widetilde{Q}^t$ были достаточно малой длины. Выберем τ_0 так, чтобы

$$2C_7C_6(\varepsilon_0)\tau_0 \le 1, \quad 4T^{1/2}\varepsilon_0 e^{2C_6(\varepsilon_0)\tau_0} \le 1, \tag{4.61}$$

где T — максимальная длина линий ρ по области $\widetilde{Q}_{i_0}$. Теперь для всех $0\le\tau\le\tau_0$ следует неравенство

$$w(t) \le 2C_6(\varepsilon_0)\int_{\widetilde{x}}^{\widetilde{\widetilde{x}}} w(x)ds + 2\varepsilon_0\|v\|_{L_2(\widetilde{Q}^t)} \tag{4.62}$$

в силу (4.61) и того, что

$$w(t) \le \left\|J_k^* v\right\|^2_{L_2(S(t))} + \left\|\widetilde{I} v\right\|_{L_2\left(\left(\partial\widetilde{Q}^t\right)^-\right)} + \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{I} v\right\|_{L_2\left(\left(\partial\widetilde{Q}^t\right)^-\right)},$$

где

$$w(t) = \left\|J_k^* v\right\|^2_{L_2(S(t))} + \left\|\widetilde{I} v\right\|_{L_2(S(t))} + \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\widetilde{I} v\right\|_{L_2(S(t))}.$$

К неравенству (4.62) применяем неравенство Гронуолла. В результате получим

$$w(t) \le 2\varepsilon_0 e^{2C_6(\varepsilon_0)\tau_0}\|v\|_{L_2(\widetilde{Q}^t)} \tag{4.63}$$

или

$$\frac{1}{T^{1/2}}\left\|J_k^* v\right\|_{L_2(\widetilde{Q}^{t_0})} \le \left\|J_k^* v\right\|_{L_2(S(t))} \le \frac{1}{4T^{1/2}}\|v\|_{L_2(\widetilde{Q}^{t_0})}, \tag{4.64}$$

$\widetilde{Q}^{t_0} \subset \widetilde{Q}_{i_0}$. Переходя к пределу при $k\to\infty$ в (4.64), имеем, $\|v\|_{L_2(\widetilde{Q}^{t_0})} \le 0$, т.е. $v=0$ в $L_2(\widetilde{Q}^{t_0})$.

Продолжая этот процесс дальше, за конечное число шагов докажем $v=0$ в верхнем выпуклом по $\mathfrak{R}$ множестве $\widetilde{Q}_{i_0}$. Двигаясь дальше сверху вниз за конечное число шагов покажем, что $v=0$ почти всюду во всей области Q.

Возвращаемся опять к (4.39). Отсюда теперь имеем соотношение

$$(l_0u, v_0)_{H^1(S_4)} + (l_1u, v)_{L_2(S_4)} = 0 \tag{4 .65}$$

для любого $u \in D(L)$. Так как l_0 и l_1 линейно независимы и множества $\{l_0 u\}$ и $\{l_1 u\}$ плотны в $H^1_{\text{гр}}(S_4)$ и $L_2(S_4)$ соответственно, если u пробегает все множество $D(L)$, то равенство (4.65) порождает $v_0=0$ в $H^1_{\text{гр}}(S_4)$ и $v_1=0$ в $L_2(S_4)$. Таким образом, доказана плотность $R(L_0)$ в H.

В общем случае доказать плотность $R(L)$ в H можно с помощью продолжения по параметру (см. доказательство теоремы в [42]).

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М., 1978.
2. Агранович М.С. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления / ВИНИТИ. 1990. Т.63. С.5.
3. Агранович М.С., Вишик М.И. // Успехи мат. наук. 1964. Т.19. №3 (117). С.53.
4. Ахиев С.С., Саниева С.Н. // Докл. АН СССР. 1991. Т.316. №3. С.524.
5. Бадерко Е.А. // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27. №1. С.17.
6. Он же // Там же. 1992. Т.28. №1. С.17.
7. Гасанова И.А. // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук 1988. Т.9. №1. С.34.
8. Бриш Н.И. // Дифференц. уравнения. 1965. Т.1. №4. С.523.
9. Он же // Там же. 1969. Т.5. №12. С.2200.
10. Бриш Н.И., Валешкевич И.Н. // ДАН СССР. 1962. Т.146. №6. С.1247.
11. Они же // Дифференц. уравнения. 1965. Т.1. №3. С.393.
12. Буренков В.И. // Труды МИ АН СССР. 1974. Т.131. С.39.
13. Он же // Там же. 1979. Т.150. С.24.
14. Он же // Там же. 1987. Т.180 С.68.
15. Он же // Дифференциальные уравнения и функциональный анализ / УДН М.,1987.
16. Валешкевич И.Н. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук. 1963. №3. С.14.
17. Врагов В.Н. // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск, 1978. С.5.
18. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1967.
19. Гасымов Э.А. // Дифференц. уравнения. 1992. Т.28. №3. С.521.
20. Гординг Л. // Математика. Сб. переводов иностр. ст. 1958. Т.2:1. С.81.
21. Он же. Задача Коши для гиперболических уравнений. М., 1961.
22. Гринберг Г.А. // Прикл. математика и механика 1967. Т.31. Вып. 2. С.193.
23. Дайняк В.В., Корзюк В.И. // Дифференц. уравнения. 1987. Т.23 №5. С.867.
24. Дезин А.А. // Успехи мат. наук. 1959. Т.14. Вып. 3(87). С.21.
25. Он же // Мат. сборник. 1976. Т.100. №2. С.117.
26. Он же // Мат. заметки. 1978. Т.24. №5. С.687.
27. Он же. Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.
28. Он же // Мат. сб. 1986 Т.129. В.3. С.397.
29. Драгиева Н.А. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т.15. №4. С.946.
30. Житарашу Н.В. // Мат. исслед. Дифференц. уравнения и динам. системы. 1985. №80. С.74.
31. Он же // Мат. сб. 1985. Т.128(170). №4(12). С.451.
32. Он же // Мат. исслед. (Кишинев). 1990. №112. С.104.
33. Жумабеков Л. // Дифференц. уравнения. 1990 Т.26. №8. С.1454.
34. Он же // Известия АН Респ. Казахстан. Сер. физ.-мат. наук. 1992. №3. С.32.
35. Камышников А.И. // Применение методов функционального анализа к неклассич. уравнениям мат. физ. Новосибирск, 1989. С.116.
36. Кастильо Ф.А., Корзюк В.И. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1985. №5. С.11.
37. Они же // Там же. 1986. №1. С.47.
38. Кожанов А.И. // Дифференц. уравнения. 1989. Т.25. №12. С.2143.
39. Кожанов А.И., Ларькин Н.А., Яненко Н.Н. // Сиб. мат. журн. 1981. Т.22. №6. С.81.
40. Койлышев У.К. // Теорет. и. прикл. вопр. мат. моделирования. Алма-Ата, 1990. С.35.
41. Корзюк В.И. // Дифференц. уравнения. 1968. Т.4. №10. С.1854.
42. Он же // Там же. 1970. Т.6. №2. С.343.
43. Он же // Там же. 1971. Т.7. №4. С.750.
44. Он же // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1971. №3. С.39.
45. Он же // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1971. №2. С.25.
46. Он же // Там же. 1972. №2. С.10.
47. Он же // Успехи мат. наук. 1985. Т.40. Вып.5(245). С.208.
48. Он же // Дифференц. уравнения. 1991. Т.27. №6. С.1014.
49. Он же // Там же. 1992. Т.28. №5. С.847.
50. Корзюк В.И., Дайняк В.В. // Там же. 1992. Т.28 №6. С.1056.
51. Корзюк В.И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1992. №2. С.49.
52. Он же // Там же. №3. С.63.
53. Он же // Там же. 1996. №2. С.32
54. Корзюк В.И., Чеб Е.С. // Дифференц. уравнения. 1994. Т.30 №8. С.1396.
55. Курта В.В., Шишков А.Е. // Докл. АН УССР. А. 1990. №1. С.28.
56. Они же // Укр. мат. журн. 1990. Т.42. №7. С.924.
57. Ладыженская О.А. // Докл. АН СССР. 1954. Т.97. №3. С.395.
58. Она же // Мат. сб. 1956. Т.39(81):4. С.491.
59. Она же // Там же. 1958. Т.45. №2. С.123.
60. Она же. Краевые задачи математической физики. М., 1973.
61. Ладыженская О.А., Ступялис Л. // Тр. Мат. ин-та АН СССР 1971. Т.116. С.101.
62. Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е. Фильтрация шумов. Киев, 1979.

63. Мазья В.Г., Пламенский Б.А. // Mathematische Nachrichten. 1978. Bd.81. P.25.
64. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976.
65. Нагумо М. Лекции по современной теории уравнений в частных производных. М., 1967.
66. Назаров С.А., Пламенский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М., 1991.
67. Намазов Г.К. // Докл. АН СССР. 1962. Т.145. №6. С.1228.
68. Остапенко В.А. // Дифференц. уравнения и их прил. в физ. Днепропетровск, 1989. С.4.
69. Петровский И.Г. // Мат. сб. 1937. Т.2(44). С.815.
70. Он же // Там же. 1939. Т.5(47). С.3.
71. Радыно Я.В., Юрчук Н.И. // Дифференц. уравнения. 1976. Т.12. №2. С.331.
72. Ройтберг Я.А. // Докл. АН СССР. 1991. Т.316. №2. С.300.
73. Он же // Там же. Т.318. №4. С.820.
74. Ройтберг Я.А., Шефтель Э.Г. // Мат. сб. 1969. Т.78. №3. С.446.
75. Рустамов А.С. // Тр. Ин-та математики и механики. АН АзССР. 1988. №3. С.82.
76. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950.
77. Солонников В.А. // Тр. Мат. ин-та АН СССР: Краевые задачи математической физики. 3. 1965. Т.83. С.3.
78. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., 1980.
79. Хермандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. М., 1959.
80. Чан Дык Ван, Корзюк В.И. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1976. №3. С.39.
81. Они же // Там же. 1976. №4. С.53.
82. Они же // Там же. 1978. №6. С.30.
83. Чан Дык Ван, Корзюк В.И., Мозолевский И.Е. // Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию со дня рождения И.Г.Петровского. (27–31 января 1976 г.) М., 1978. С.477.
84. Шефтель З.Г. // Успехи мат. наук. 1964. Т.19. №4. С.230.
85. Он же // Сиб. мат. журн. 1965. Т.6. №3. С.639.
86. Эйдельман С.Д. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНИТИ. 1990. Т.63. С.201.
87. Эскин Г.И. // Мат. сб. 1962. Т.59(101) С.67.
88. Он же // Там же. С.105.
89. Он же // Сиб. мат. журн. 1962. Т.3. №6. С.882.
90. Юрчук Н.И. // Дифференц. уравнения. 1977. Т.8. №4. С.626.
91. Он же //Там же. 1978. Т.14. №12. С.2196.
92. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. // Comm. Pure. Appl. Math. 1959. V.12. P.623; Comm. Pure. Appl. Math. 1964. V.17. P.35 (перевод: Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы для решений эллиптических уравнений в частных производных, удовлетворяющих общим граничным условиям. М., 1965).
93. Bennish J. // J. Math. Anal. and Appl. 1990. V.153. №2. P.506.
94. Burenkov V.I. // Nonlinear analysin, Function Spaces and Applications. Leipzig, 1982. Bd. 49. V.2. P.5.
95. Eskin G. // J. d'Analyse Math. 1981. V.40. P.43.
96. Eskin G. // Comm. in PDE. 1985. V.10(10). P.1117.
97. Eskin G. // Comm. Part. Differ. Equat. 1987. V.12. №5. P.503.
98. Eskin G // Ibid. 1992. V.17. №1–2. P.99.
99. Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. Prentice-Hall, 1964 (перевод: Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968).
100. Friedrichs K. // Comm. Pure. Appl. Math. 1954. V.7. №2. P.345.
101. Hadamard J. // Tohuku Math. J. 1933. V.37. P.133.
102. Hadamard J. // L'enseignement mathematique. 1936. V.35. P.5.
103. Jannelli E. // Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. 1985(1986). V.79. №5. P.113.
104. Kreiss H.O. // Comm. Pure. Appl. Math. V.23. P.277 (перевод: Математика. Сб. переводов. 1970. Т.14. №4. С.98).
105. Leray J. Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients. Prinston, 1952.
106. Leray J. Hyperbolic differential equations. New York, 1955 (перевод: Лерс Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. М., 1984).
107. Lions J.-L., Magenes E. Problemes aux limites non homogenes et applications. Paris, 1968. V.1 (перевод: Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971).
108. Messano B. // Rend. mat. e appl. 1992. V.12. №2. P.521.
109. Papi G. // Boll. Unione mat. ital. 1986. V.5. №1. P.139.
110. Peetre J. // Comm pure appl. Math. 1961. V.14. №4. P.711 (перевод: Математика. Сб. переводов. 1963. 7:1. С.43).
111. Sakamoto R. // Math Kyoto Univ. 1970. V.10. P.349 (перевод: Математика. Сб. переводов. 1972. V.16. №1. С.62).
112. Schechter M. // Comm. pure appl. Math. 1959. V.12. P.457 (перевод: Математика. Сб. переводов. 1960. 4:5. С.93).
113. Schechter M. // Comm. pure appl. Math. 1959. V.12. №4. P.561 (перевод: Математика. Сб. переводов. 1960. 4:6. С.3).
114. Sikorav J. // C.r. Acad. sci. Ser. 1. 1989. V.308. №12. P.345.
115. Sikorav J. // J. Math. Anal. and Appl. 1990. V.153. №2. P.533.
116. Suzuki Fukuzo // Tokyo J. Math. 1991. V.14. №1. P.17.
117. Thomee V. // Math. Scand. 1955. V.3. P.115.
118. Thomee V. // Math. Scand. 1957. V.5. P.93.
119. Thomee V. // Math. Scand. 1958. V.6. P.5.