дозе света 72 Дж/см^2 обладают препараты №98 и 102 (число погибших клеток после действия препарата со светом соответственно в 7 и 3,6 раза больше, чем после действия одного препарата); препарат №04 не проявляет фотодинамической активности(число выживших или погибших клеток после действия одного препарата и после действия препарата со светом практически одинаковое), а препарат №101 характеризуется умеренной фотодинамической активностью (число погибших клеток после действия препарата со светом примерно в 2 раза больше, чем после действия одного препарата) (табл.2).

С целью выяснения причины прекращения повреждения опухолевых клеток для препаратов 101, 102, 341 при увеличении дозы светового воздействия с 36 Дж/см^2 до 72 Дж/см^2 были проведены исследования изменения концентрации препаратов в клетках в процессе фотооблучения. Для этого до и после светового воздействия регистрировались спектры поглощения препаратов в клетках Hela, выращенных на стеклянных пластинках. Результаты этих исследований представлены на примере препарата 98 (рис.4). Как видно из рисунка, в процессе фотооблучения наблюдается уменьшение оптической плотности в максимуме поглощения образцов. Подсчет клеток непосредственно по завершении фотооблучения показал, что число клеток на пластинках в такие сроки не изменяется. Следовательно, наблюдаемое уменьшение оптической плотности обусловлено уменьшением концентрации красителей в клетках. Из этих данных можно заключить: прекращение повреждения клеток для препаратов 101, 102, 341 при увеличении дозы светового воздействия происходит вследствие расхода красителей в клетках.

Таким образом, первичный отбор in vitro потенциальных фотосенсибилизаторов из группы полиметиновых красителей показал, что по крайней мере 3 (98, 341 и 102) из 5 исследованных препаратов обладают выраженной фотодинамической активностью в отношении опухолевых клеток и заслуживают дальнейшего исследования.

1. Dougharty T.J. Photodynamic therapy // Photochem. Photobiol.1993. V.53. №6. P.895.
2. Соколов В.В., Страданко Е.Ф., Жаркова Н.Н. и др. // Вопр. онкологии. 1995. Т.41. №2. С.134.
3. Воропай Е.С., Самцов М.П. // Тезисы докл. конф. "Лазерная физика и спектроскопия" Гродно., 1995. С.221.
4. Berenbaum M.C., Bonnett R., Scourides P.A. // Br. J. Cancer. 1982. V.45. P.571.
5. Van Gemert J.C., Berenbaum M.C., Gijsberg G.H.M. // Ibid. 1985. V.52. №1. P.43.
6. Yu Y.H, Dong C.D. e.a. // SPIE 1991. V.1616. P.361.
7. Kostenich G.A., Zhuravkin I.N., Gurinovich G.P., Zhavrid E.A. // SPIE 1991. V.1616. P.219.
8. Diwu Z., Lown J.M. // Pharmacol. Ther. 1994. V.63, №1. P.1.
9. Воропай Е.С., Павловская Н.А., Самцов М.П. // Опт. и спектр. 1991. Т.70. №4. С.819.
10. Воропай Е.С., Самцов М.П. // Квант. электрон. (Киев). 1992. №2. С.77.
11. Воропай Е.С., Самцов М.П. // Журн. прикл. спектр. 1995. 62. №2. С.218.
12. Samtsov M.P., Voropai E.S. Influence of structure of cyanine dyes on its photophysikal proporties.Proceedings of the conference "Physics and chemistry of organic luminophors' 95". Kharkov, 1995. P.158.
13. Бутримович О.В., Воропай Е.С., Ксенофонтова Н.М., Самцов М.П. // Журн. прикл. спектр. 1987. Т.46. №2. С.310.
14. Воропай Е.С., Самцов М.П. // Опт. и спектр. 1987. Т.62. №1. С.64.
15. Saxton R.E., Huang M., Foote C. et al. // Proc. Annu. Meet. Am. Assoc. Cancer. Res. 1993. V.34. P.A2131.
16. Воропай Е.С., Самцов М.П. // Современные вопросы оптики, рад. матер.,информ., радиофиз. и электр. Мн. 1996. Ч.1. С.27.
17. Низамов Н., Захидов У., Ищенко А.А. и др. // Журн. прикл. спектр. 1982. Т.34. №3. С.422.

УДК 530.12; 530.145

Г.В. ШИШКИН, У.Х. АБДЕЛЬ САЛАМ (Палестина)

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ВОЛКОВА НА ФОНЕ ГРАВИТАЦИИ

New exact solutions of the Dirac equation for the case of the external wave fields on the background of gravitation are presented.

Широко известно, что классическая задача Волкова — электрон в поле плоской электромагнитной волны [1] — была обобщена в случае частицы с произвольным спином в работах Ф.И. Федорова с соавторами [2]. В частности, в этих работах впервые учтен аномальный момент частицы, взаимодействующей с волновым полем. Проблема Волкова на фоне статистических электрических и магнитных полей рассматривалась В.Г.Багровым и др. [3]. В работах [4–7] эта проблема обобщена на случай волновых полей произвольной тензорной структуры. Дальнейшим естественным обобщением проблемы является задача о взаимодействии дираковской частицы с волновыми полями на фоне гравитации. Используя алгебраический метод разделения переменных в уравнении Дирака, нам удалось найти ряд точных решений этой проблемы и указать гравитационные метрики, на фоне которых они возможны. Здесь мы представляем эти решения.

1. Скалярная плоская волна $S(z-t)$**.** Уравнение Дирака для частицы, взаимодействующей со скалярной волной на фоне гравитации, при диагональной калибровке тетрады имеет следующий вид:

$$\left\{\frac{\gamma^x}{a_x^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial_x a_x}{4a_x}\right)+\frac{\gamma^y}{a_y^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial_y a_y}{4a_y}\right)+\frac{\gamma^z}{a_z^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial_z a_z}{4a_z}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma^t}{a_t^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial_t a_t}{4a_t}\right)+m_0+S(z-t)\right\}\Psi=0. \tag{1}$$

Принимая матрицы Дирака в виде

$$\gamma^x=\begin{pmatrix}0&\sigma_3\\ \sigma_3&0\end{pmatrix},\quad \gamma^y=\begin{pmatrix}I&0\\ 0&-I\end{pmatrix},\quad \gamma^z=\begin{pmatrix}0&\sigma_1\\ \sigma_1&0\end{pmatrix},\quad \gamma^t=i\begin{pmatrix}0&\sigma_2\\ \sigma_2&0\end{pmatrix}, \tag{2}$$

где σ_k — матрицы Паули,

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\ 1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\ i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\ 0&-1\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}1&0\\ 0&1\end{pmatrix}, \tag{3}$$

нам удалось получить следующее точное решение уравнения (1):

$$\Psi=\left\{a_x(x)b_y(y)\right\}^{1/4}\begin{pmatrix}-\Phi_1(u)&\Theta_1(x)&\Theta_1(y)\\ \Phi_2(u)&\Theta_1(x)&\Theta_2(y)\\ \Phi_1(u)&\Theta_2(x)&\Theta_1(y)\\ -\Phi_2(u)&\Theta_2(x)&\Theta_2(y)\end{pmatrix}\exp(ik_v v), \tag{4}$$

где $v=z+t,\quad u=z-t,$

$$\Phi_1=c^{1/4}(u)\exp\left\{\frac{1}{4ik_v}\int\left[(m_0+S(u))^2c(u)-k^2\frac{c(u)}{d(u)}\right]du\right\}, \tag{5}$$

$$\Phi_2=\frac{1}{2ik_v}\left\{[m_0+S(u)]c^{1/2}(u)-k\left[\frac{c(u)}{d(u)}\right]^{1/2}\right\}\Phi_1, \tag{6}$$

$$\Theta_1(x)=a_x^{1/4}(x)\exp\left\{\pm\left(K^2-k^2\right)^{1/2}\int a_x^{1/2}(x)dx\right\}, \tag{7}$$

$$\Theta_2(x)=(K-k)^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\Theta_1(\xi),\quad \xi=\int a_x^{1/2}(x)dx, \tag{8}$$

$$\Theta_1(y)=b_y^{1/4}(x)\exp\left\{-k\int b_y^{1/2}(y)dy\right\}, \tag{9}$$

$$\Theta_2(y)=b_y^{1/4}(y)\exp\left\{k\int b_y^{1/2}(y)dy\right\}. \tag{10}$$

Эти решения реализуются в метриках вида

$$ds^2=d(z-t)\left\{a_x(x)(dx)^2+b_y(y)(dy)^2\right\}+c(z-t)\left\{(dz)^2-(dt)^2\right\}. \tag{11}$$

2. Векторная (электромагнитная) волна $\gamma^x A_x(z-t)$**.** Снова работая в диагональной калибровке тетрады, для уравнения Дирака имеем

$$\left\{\frac{\gamma^x}{a_x^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial_x a_x}{4a_x}+iA_x(z-t)\right)+\frac{\gamma^y}{a_y^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial_y a_y}{4a_y}\right)+\frac{\gamma^z}{a_z^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial_z a_z}{4a_z}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma^t}{a_t^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial_t a_t}{4a_t}\right)+m_0\right\}\Psi=0. \tag{12}$$

Соответствующее точное решение имеет следующий вид (для матриц Дирака снова используется представление (2)):

$$\Psi=\exp\left\{i(k_x x+k_y y)b_y^{1/2}(y)\right\}\begin{pmatrix}\Phi_1(u) & \Theta_1(y)\\ \Phi_2(u) & \Theta_2(y)\\ \Phi_1(u) & \Theta_1(y)\\ \Phi_2(u) & \Theta_2(y)\end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$\Phi_1(u)=a^{1/4}(u)\exp\left\{-\frac{1}{4ik_y}\int\left[\left(A_x(u)-k_x\right)^2-k^2c(u)\right]\frac{a(u)}{c(u)}du\right\}, \tag{14}$$

$$\Phi_2(u)=\frac{1}{2ik_y}\left[\frac{a(u)}{c(u)}\right]^{1/2}\left\{A_x(u)-k_x-kc^{1/2}(u)\right\}\Phi_1(u), \tag{15}$$

$$\Theta_1(y)=\exp\left\{\pm\left(m_0^2-k^2\right)^{1/2}\int b_x^{1/2}(y)dy\right\}. \tag{16}$$

$$\Theta_2(y)=\frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-m_0\right)\Theta_1(\xi),\quad \xi=\int b_y^{1/2}(y)dy. \tag{17}$$

Решения вида (13) ассоциированы с метрикой

$$ds^2=c(z-t)(dx)^2+b_y(y)(dy)^2+a(z-t)\left\{(dz)^2-(dt)^2\right\}. \tag{18}$$

3. Аксиальная волна $\gamma^x\gamma^5A_x(z-t)$**.** Соответствующее уравнение Дирака имеет вид

$$\left\{\frac{\gamma^x}{a_x^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial_x a_x}{4a_x}+\gamma^5A_x(z-t)\right)+\frac{\gamma^y}{a_y^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial_y a_y}{4a_y}\right)+\frac{\gamma^z}{a_z^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial_z a_z}{4a_z}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma^t}{a_t^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial_t a_t}{4a_t}\right)+m_0\right\}\Psi=0. \tag{19}$$

Анализ показывает, что попарное разделение переменных u,v от x,y здесь невозможно. В итоге точные решения могут быть получены лишь для случая конформно плоских метрик вида

$$ds^2=a_x(x)(dx)^2+b_y(y)(dy)^2+(dz)^2-(dt)^2, \tag{20}$$

которые посредством локального координатного преобразования

$$x'=\int a_x^{1/2}(x)dx,\quad y'=\int b_y^{1/2}(y)dy \tag{21}$$

приводятся к виду

$$ds^2=(dx')^2+(dy')^2+(dz)^2-(dt)^2. \tag{22}$$

Точные решения уравнения (19) в метриках (20) подробно исследованы в работах [5,6].

4. Псевдоскалярная волна $\gamma^5P(z-t)$**.** В этом случае уравнение Дирака при диагональной калибровке тетрады имеет следующий вид:

$$\left\{\frac{\gamma^x}{a_x^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial_x a_x}{4a_x}\right)+\frac{\gamma^y}{a_y^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial_y a_y}{4a_y}\right)+\frac{\gamma^z}{a_z^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial_z a_z}{4a_z}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma^t}{a_t^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial_t a_t}{4a_t}\right)+m_0+\gamma^5 P(z-t)\right\}\Psi=0. \tag{23}$$

Для точного решения этого уравнения в представлении (2) мы получили

$$\Psi=\left\{a_x(x)b_y(y)\right\}^{1/4}\begin{pmatrix}-\Phi_1(u) & \Theta_1(x)\\ \Phi_2(u) & \Theta_1(x)\\ \Phi_1(u) & \Theta_2(x)\\ -\Phi_2(u) & \Theta_2(x)\end{pmatrix}\exp\left\{ik_y y+\int b_y^{1/2}(y)dy\right\}, \tag{24}$$

где

$$\Phi_1(u)=c^{1/4}(u)\exp\left\{\int\left[P^2(u)-k^2\right]\frac{c(u)}{4ik_y}du\right\}, \tag{25}$$

$$\Phi_2(u)=\frac{1}{2ik_y}\left[P(u)+k\right]c^{1/2}(u)\Phi_1(u), \tag{26}$$

$$\Theta_2(x)=\exp\left\{\pm\left(m_0^2+K^2-k^2\right)^{1/2}\int a_x^{1/2}(x)dx\right\}, \tag{27}$$

$$\Theta_1(x)=(m_0+k)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-K\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\Theta_2(\xi),\quad \xi=\int a_x^{1/2}(x)dx. \tag{28}$$

Эти решения возможны для метрик вида

$$ds^2=a_x(x)(dx)^2+b_y(y)(dy)^2+c(z-t)\left\{(dz)^2-(dt)^2\right\}. \tag{29}$$

Далее мы представляем точные решения уравнения Дирака, соответствующие взаимодействию частицы с тензорным волновым полем на фоне гравитации.

Физическое содержание, с которым может быть ассоциировано тензорное взаимодействие, находится в прямой зависимости от геометрии реализации такого взаимодействия. Например, с внешним полем, включенным посредством члена, пропорционального $\gamma^x\gamma^y T_{xy}$, может быть связано неминимальное взаимодействие магнитного момента частицы с магнитной напряженностью электромагнитного поля, т.е. с тензором электромагнитного поля. Аналогично тензорная структура $\gamma^x\gamma^t T_{xt}$ ассоциируется с неминимальным взаимодействием электрического диполя, с электрической напряженностью электромагнитного поля. И хотя экспериментальные данные [8] указывают на чрезвычайно малую величину дипольного электрического момента элементарных частиц, решения со связью $\gamma^x\gamma^t T_{xt}$ представляют несомненный математический интерес, хотя бы потому, что они существенно отличаются от соответствующих решений со связью $\gamma^x\gamma^y T_{xy}$. В частности, имеют место различные возможности точных решений уравнений Дирака для частицы нулевой массы. Заметим, что собственно включение тензорного поля предполагает участие всех компонент T_{ik}. Конкретная же физическая реализация диктуется при этом свойствами частицы, взаимодействующей с полем, как, например, в случае электромагнитной волны. Частица может иметь или не иметь отличный от нуля электрический заряд, иметь или не иметь магнитный либо электрический моменты: соответственно взаимодействие может осуществляться минимальным либо не минимальным, либо смешанным образом.

Здесь рассмотрено два случая включения тензорной связи.

5. Тензорная волна $\gamma^x\gamma^y T_{xy}(z-t)$. Уравнение Дирака при диагональной калибровке тетрады в этом случае имеет следующий вид:

$$\left\{\frac{\gamma^x}{a_x^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial_x a_x}{4a_x}\right)+\frac{\gamma^y}{a_y^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial_y a_y}{4a_y}\right)+\frac{\gamma^z}{a_z^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial_z a_z}{4a_z}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma^t}{a_t^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial_t a_t}{4a_t}\right)+m_0+2ig\gamma^x\gamma^y T_{xy}(z-t)\right\}\Psi=0. \tag{30}$$

Здесь g — магнитный момент частицы.

Принимая матрицы Дирака в представлении (2), (3) для решения уравнения (30), получаем

$$\Psi = \{a_x(x) b_y(y)\}^{1/4} \begin{pmatrix} -\Phi_1(u) & \Theta_1(x) \\ \Phi_2(u) & \Theta_1(x) \\ \Phi_1(u) & \Theta_2(x) \\ -\Phi_2(u) & \Theta_2(x) \end{pmatrix} \exp\left\{ik_y y + \int b_y^{1/2}(y)dy\right\}. \tag{31}$$

Здесь

$$\Phi_1(u) = c^{1/4}(u)\exp\left\{-\frac{1}{4ik_y}\int\left[2igT_{xy}(u) - k\right]^2 c(u)du\right\}, \tag{32}$$

$$\Phi_2(u) = \frac{1}{2ik_y}\left[k - 2igT_{xy}(u)\right]c^{1/2}(u)\Phi_1(u), \tag{33}$$

$$\Theta_2(x) = \exp\left\{\pm\left(m_0^2 + K^2 - k^2\right)^{1/2}\int a_x^{1/2}(x)dx\right\}, \tag{34}$$

$$\Theta_1(x) = (m_0 + k)^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} - K\right)\Theta_2(\xi), \quad \xi = \int a_x^{1/2}(x)dx. \tag{35}$$

Решение (31) реализуется в метриках вида

$$ds^2 = a_x(x)(dx)^2 + b_y(y)(dy)^2 + c(z-t)\left\{(dz)^2 - (dt)^2\right\}. \tag{36}$$

Заметим, что решение (31) получено для общего случая отличной от нуля массы покоя частицы. Естественно, что этот результат применим и к случаю $m_0 = 0$.

Однако в случае $m_0 = 0$ возникает дополнительное решение вида (31), где вместо (32), (33) необходимо принять

$$\Phi_1(u) = c^{1/4}(u)\exp\left\{-\frac{1}{4ik_y}\int\left[2igT_{xy}(u)c^{1/2}(u) - k\left[\frac{c(u)}{d(u)}\right]^{1/2}\right]^2 du\right\}, \tag{37}$$

$$\Phi_2(u) = \frac{1}{2ik_y}\left[k\left[\frac{c(u)}{d(u)}\right]^{1/2} - 2igT_{xy}(u)c^{1/2}(u)\right]\Phi_1(u). \tag{38}$$

Соответствующая метрика оказывается более общей, чем (36):

$$ds^2 = d(z-t)\left\{a_x(x)(dx)^2 + b_y(y)(dy)^2\right\} + c(z-t)\left\{(dz)^2 - (dt)^2\right\}. \tag{39}$$

6. Тензорная волна $\gamma^z\gamma^t T_{zt}(z-t)$. Уравнение Дирака в этом случае в диагональной калибровке тетрады принимает вид

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{\gamma^x}{a_x^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial_x a_x}{4a_x}\right) + \frac{\gamma^y}{a_y^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial_y a_y}{4a_y}\right) + \frac{\gamma^z}{a_z^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial_z a_z}{4a_z}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{\gamma^t}{a_t^{1/2}}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial_t a_t}{4a_t}\right) + m_0 + 2\tilde{g}\gamma^z\gamma^t T_{zt}(z-t)\right\}\Psi = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Здесь $\tilde{g}$ — дипольный электрический момент частицы.

Для решения уравнения (40) в представлении (2), (3) получаем:

$$\Psi' = \{a_x(x) b_y(y)\}^{1/4} \begin{pmatrix} -\Phi_1(u) & \Theta_1(x) & \Theta_1(y) \\ \Phi_2(u) & \Theta_1(x) & \Theta_2(y) \\ \Phi_1(u) & \Theta_2(x) & \Theta_1(y) \\ -\Phi_2(u) & \Theta_2(x) & \Theta_2(y) \end{pmatrix} \exp(ik_y y), \tag{41}$$

$$\Phi_1(u) = c^{1/2}(u)\exp\left\{\frac{1}{4ik_v}\int\left[m_0^2 c(u) - \left[2\tilde{g}T_{zt}(u)c^{1/2}(u) + k\left[\frac{c(u)}{d(u)}\right]^{1/2}\right]^2\right]du\right\}, \tag{42}$$

$$\Phi_2(u) = \frac{1}{2ik_v}\left\{m_0 c^{1/2}(u) - \left[2\tilde{g}T_{zt}(u)c^{1/2}(u) + k\left[\frac{c(u)}{d(u)}\right]^{1/2}\right]\right\}\Phi_1(u), \tag{43}$$

$$\Theta_1(x) = a_x^{1/4}(x)\exp\left\{\pm\left(K^2 - k^2\right)^{1/2}\int a_x^{1/2}(x)dx\right\}, \tag{44}$$

$$\Theta_2(x) = (K-k)^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\Theta_1(\xi), \quad \xi = \int a_x^{1/2}(x)dx, \tag{45}$$

$$\Theta_1(y) = b_y^{1/4}(x)\exp\left\{-k\int b_y^{1/2}(y)dy\right\}, \tag{46}$$

$$\Theta_2(y) = b_y^{1/4}(y)\exp\left\{k\int b_y^{1/2}(y)dy\right\}. \tag{47}$$

Эти решения реализуются в метриках вида

$$ds^2 = d(z-t)\left\{a_x(x)(dx)^2 + b_y(y)(dy)^2\right\} + c(z-t)\left\{(dz)^2 - (dt)^2\right\}. \tag{48}$$

Дополнительных решений для случая $m_0 = 0$, в отличие от предыдущего случая, не возникает.

Таким образом, в настоящей работе получены новые точные решения уравнения Дирака для случая частицы, взаимодействующей с волновыми полями различной тензорной структуры на фоне гравитации, а также указаны метрики, на фоне которых эти решения реализуются.

Естественно, что полученные метрики (11), (18), (29), (36), (39), (48) оказались конформно плосковолновыми. Соответствующим координатным преобразованием они приводятся к плоско-волновым. Такой результат не является неожиданным. Классическое решение задачи Волкова обладает "плоской" симметрией (плоские волны) и включение гравитации не должно "портить" начальной симметрии. В противном случае оказывается невозможным даже разделение переменных, имевшее место в отсутствие гравитации.

Метрики, указанные в настоящей работе, по своей структуре и симметрии оказываются конформно подобными известным решениям Тауба [9], Мак-Вити [10], Бонди [11,12], Розена [13]. Заметим также, что в частном случае не волнового плоского гравитационного поля $\left(c(z-f) = d(z-f) = 1\right)$ при специальном подборе функций $a_x(x)$ и $b_y(y)$ в указанных нами метриках содержится вырожденный случай решения Казнера [14], что согласуется с нашим частным результатом, полученным ранее [7]. Заметим вскользь, что Вебер [15] не согласен с трактовкой решений [9–13] как плоских гравитационных волн [10], опираясь при этом на известный анализ, данный Боннором [16].

Что касается самих точных решений уравнения Дирака, представленных в настоящей работе, то все они удовлетворяют требованию предельного перехода к свободным спинорным волнам, если удалить из уравнения Дирака волновые и гравитационное поля. Некоторый промежуточный предельный переход для представленных здесь решений в присутствии волновых полей на фоне гравитации к соответствующим решениям без гравитации (см. [4–6]) также имеет место.

1. Волков Д.М. // ЖЭТФ. 1937. Т.7. С.1286.
2. Федоров Ф.И. (библиографический указатель). Мн., 1981.
3. Багров В.Г. и др. Точные решения релятивистских волновых уравнений. Новосибирск, 1982
4. Shishkin G.V. // Nuovo Cim. 1991. V.106B. P.1137.
5. Shishkin G.V., Yasin M.A. // Int.J.Mod.Phys. 1991. V.6. P.4831.
6. Шишкин Г.В., Ясин М.А. // ЯФ. 1991. Т.53. С.858.
7. Шишкин Г.В. // Гравитационная энергия и гравитационные волны / Под ред. Н.А. Черникова. Дубна, 1993. С.112.
8. Particle properties data booklet // Phys. Rev. D. 1992. V.45. P.1.
9. Taub A.H. // Ann. d. Math. 1951. V.53. P.472.
10. Mcvittie G.C. // J. Rat. Mech. a. Anal. 1955. V.4. P.201.
11. Bondi H., Pirani F.A.E., Robinson L. // Proc. Roy. Soc. 1959. V.A251. P.519.
12. Bondi H. // Nature. 1957. V.179. P.1072.
13. Rosen N. // Bull. Res. Coucil Israel. 1953. V.3. P.328.
14. Kasner E. // Amer. J. Math. 1921. V.43. P.1234.
15. Weber J. General Relativity and Gravitational Waves. New York, 1961.
16. Bonnor W.B. // Ann. Henri Poincare. 1957. V.15. P.146.