УДК 517.948.32:517.544

О.В. ТИМОХОВИЧ

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О МОДУЛЕ ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

The original problem is reduced to a nonlinear conjugation problem on torus. Then the solutions which satisfy the symmetry condition are being constucted.

Рассмотрим круговое кольцо M, ограниченное окружностями радиусов 1 и $h < 1$. На ∂M зададим множество $\Lambda = \{t_1\}$.

Пусть $g(t)$ – гельдеровская на $\partial M \setminus \Lambda$ функция. В точке t_1 она может иметь разрыв 1-го рода. Считаем, что $g(t) > 0$, включая предельные значения в точке t_1.

Рассмотрим следующую задачу: найти все функции $\varphi(z)$, голоморфные на $M \setminus \partial M$, непрерывно продолжимые на $\partial M \setminus \Lambda$, ограниченные в окрестности точек Λ, не имеющие нулей на $M \setminus \partial M$, по краевому условию:

$$|\varphi(t)| = g(t),\ t \in \partial M \setminus \Lambda. \qquad (1)$$

Отметим, что рассмотрение произвольного конечного числа точек разрыва не оказало бы существенного влияния на решение задачи.

Методом перехода к дублю [1] сведем исходную задачу к задаче нелинейного сопряжения на римановой поверхности. Рассмотрим кольцо $\widetilde{M}$, симметричное M относительно единичной окружности. С помощью функции $p = \ln z$ отобразим $M \cup \widetilde{M}$ на прямоугольник R, который, со склеенными противоположными сторонами, представляет собой поверхность, гомеоморфную тору – замкнутой римановой поверхности рода 1. Ветвь логарифма зафиксируем таким образом, чтобы выполнялось неравенство: $0 \le \operatorname{Im} \ln z < 2\pi$. Введем обозначения: $R^+ = (\ln(M \setminus \partial M))$, $L = (\ln(\partial M))$, $R^- = R \setminus (R^+ \cup L)$, $\widetilde{\Lambda} = \{\ln t_1\}$.

Контур L ориентируем таким образом, чтобы при обходе в положительном направлении R^+ оставалась слева.

Задача (1) перейдет в следующую задачу на R:

$$|\widetilde{\varphi}(s)| = g(e^s), \quad s \in L \setminus \widetilde{\Lambda}. \qquad (1')$$

Функция $\widetilde{\varphi}(p)$ должна быть голоморфна в R^+, непрерывно продолжима на L, ограничена в окрестности точки $\ln t_1$.

Точку поверхности R, симметричную точке p относительно мнимой оси, обозначим $\hat{p}$. Пусть $\widetilde{\varphi}(p)$ – решение задачи (1'). Введем функцию

$$\Phi(p) = \widetilde{\varphi}(p),\ p \in R^+ \ \text{и}\ \Phi(p) = \overline{\widetilde{\varphi}(\hat{p})},\ p \in R^-.$$

$\Phi(p)$ принадлежит классу B_0 поверхности R [2], т.е. не имеет нулей и полюсов. На контуре L выполняется условие:

$$\Phi^+(s)\Phi^-(s) = \left(g(e^s)\right)^2,\ s \in L \setminus \widetilde{\Lambda}. \qquad (2)$$

Контур L является двуразбивающимся [2]. Задачу (2) следует решать в классе B_0. Выбрав среди решений задачи (2) те, которые удовлетворяют условию симметрии $\Phi(p) = \overline{\Phi(\hat{p})}$, получим решение задачи (1'). Однако проверка выполнения условий симметрии является делом весьма сложным. Поэтому сначала мы займемся решением вспомогательной задачи

$$\widetilde{\Phi}^+(s)\widetilde{\Phi}^-(s) = g(e^s), \quad s \in L \setminus \widetilde{\Lambda}. \qquad (3)$$

Будем решать задачу (3) в классе B_0. Введем функцию

$$\chi(p)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln f(\tau)\zeta(p-\tau)d\tau-\left(\int_{\tilde p}^{p_1}\zeta(p-\tau)d\tau-2\pi i\,\tilde m u(p)\right)\right\}, \qquad (4)$$

где $f(\tau)=g\left(e^{\tau}\right)$; $u(p)=\dfrac{p}{2\ln 1/h}$ – комплексно-нормированный абелев интеграл 1-го рода; $\tilde p$ – произвольная фиксированная точка поверхности; штрих означает, что путь интегрирования не пересекает канонических сечений, точка p_1 и целое число $\tilde m$ – решение проблемы обращения Якоби:

$$u(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln f(\tau)du(\tau)+\tilde n+B\tilde m; \qquad (5)$$

$\zeta(p)$ – дзета-функция Вейерштрасса; B – B-период $u(p)$. Решим (5) в явном виде. Имеем:

$$B=\frac{\pi i}{\ln 1/h};\ \frac{p_1}{2\ln 1/h}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln f(\tau)\frac{d\tau}{2\ln 1/h}+\tilde n+\frac{\pi i}{\ln 1/h}\tilde m. \qquad (6)$$

Выделяя действительную и мнимую части равенства (6) и требуя, чтобы p_1 принадлежала прямоугольнику R, однозначно находим n и m:

$$-1/2\le \operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln f(\tau)\frac{d\tau}{2\ln 1/h}+\tilde n<1/2;$$

$$0\le \operatorname{Im}\frac{1}{4\pi i}\int_L \ln f(\tau)d\tau+\pi\tilde m<\pi. \qquad (7)$$

Подставляя полученные $\tilde m$ и $\tilde n$ в (6), находим p_1.

Введем функцию

$$\tilde\Phi_0(p)=\left[\chi(p)\right]_-^+=\begin{cases}\chi(p),\ p\in R^+,\\ \chi(p)^{-1},\ p\in R^-\end{cases}$$

Тогда (3) можно записать в виде

$$\frac{\tilde\Phi^+(s)}{\tilde\Phi_0^+(s)}\cdot\frac{\tilde\Phi^-(s)}{\tilde\Phi_0^-(s)}=1,\quad s\in L\setminus\tilde\Lambda.$$

Введем дивизор $D=\tilde p p_1^{-1}$. Тогда [2]

$$\tilde\Phi(p)=\left[\chi(p)F_{\tilde\Lambda.D}(p)\right]_-^+. \qquad (8),$$

где $F_{\tilde\Lambda.D}$ – целая относительно точек $\tilde\Lambda.D$ функция. Для принадлежности $\tilde\Phi(p)$ классу B_0 необходимо, чтобы $F_{\tilde\Lambda.D}(p)$ имела на $R\setminus\tilde\Lambda$ дивизор $D^{-1}=\tilde p^{-1}p_1$. Справедливо следующее представление [2]: $F_{\tilde\Lambda.D}(p)=\exp\left\{\omega_{\tilde\Lambda.D}(p)+H_{\tilde\Lambda}(p)+2\pi i c_1^{(0)}u(p)\right\}$, где $\omega_{\tilde\Lambda.D}(p)$ – комплексно-нормированный абелев интеграл 3-го рода, имеющий логарифмические особенности в точках p_1 и $\tilde p$ с вычетами, равными 1 и -1 соответственно; $H_{\tilde\Lambda}(p)$ – комплексно-нормированный абелев интеграл 2-го рода с главной частью

$T\left(\frac{1}{z}\right) = ia_1\frac{1}{z}, a_1 \le 0$ в локальной координате $z = \lambda(p)$ в окрестности точки $\ln t_1 \in \widetilde{\Lambda}$; c_1^0 – целочисленное решение уравнения

$$\frac{1}{2\pi i}\left(-ia_1\eta_2 + ia_1\eta_1\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) + c_1\frac{\omega_2}{\omega_1} = l_1, \tag{9}$$

где ω_1, ω_2 – длины канонических сечений a и b соответственно; $\eta_1 = \zeta(\omega_1)$, $\eta_2 = \zeta(\omega_2)$. Задача (3) разрешима тогда и только тогда, когда при некотором $a_1 \le 0$ (9) имеет целочисленное решение $\left(c_1^{(0)}, l_1^{(0)}\right)$ [2]. Конкретизируем теперь вид $F_{\widetilde{\Lambda},D}(p)$ и проверим выполнение условий разрешимости. Согласно [3], $\omega_{\widetilde{\Lambda},D}(p) = K\frac{\sigma(p-p_1)}{\sigma(p-\widetilde{p})} + c$, где $\sigma(p)$ – сигма-функция Вейерштрасса; $K \in C$ – произвольная постоянная. Выпишем в явном виде уравнение (9). Воспользовавшись соотношением Лежандра $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i$, придем к уравнению

$$ia_1 + c_1 2\pi i = 2\ln 1/h\, l_1 \tag{9'}$$

Отсюда видно, что (9') имеет целочисленное решение тогда и только тогда, когда $a_1 = -2\pi k, k \in N_0$, и это решение имеет вид $c_1^{(0)} = k, l_1^{(0)} = 0$. В качестве локальной координаты в окрестности точки $\ln t_1 \in \widetilde{\Lambda}$ возьмем $z = \lambda(p) = p - \ln t_1$. Тогда, воспользовавшись результатом исследования уравнения (9'), получим следующее представление [3]:

$$H_{\widetilde{\Lambda}}(p) = 2\pi ki\zeta(p - \ln t_1) - \frac{\pi ki\eta_1}{\ln 1/h}(p - \ln t_1) + c.$$

Общее решение задачи (3) записывается в виде

$$\widetilde{\Phi}(p) = \left[\chi(p)\exp\left\{k\frac{\sigma(p-p_1)}{\sigma(p-\widetilde{p})} + 2\pi ki\zeta(p-\ln t_1) - \frac{\pi ki\eta_1}{\ln 1/h}(p-\ln t_1) + \frac{\pi ki}{\ln 1/h}p + c\right\}\right]_-^+, \tag{10}$$

где $k, c \in C$ – произвольные постоянные; $\chi(p)$ и $\widetilde{p}$ определяются формулой (4); p_1 – решение проблемы обращения Якоби (5), определяемое формулами (6),(7); $k \in N_0$; $\zeta(p), \sigma(p)$ – эллиптические функции Вейерштрасса [3]. Очевидно, что наряду с построенной функцией $\widetilde{\Phi}(p)$ решением задачи (3) является функция $\overline{\widetilde{\Phi}(\hat{p})}$. Рассмотрим функцию $\Phi(p) = \widetilde{\Phi}(p)\cdot\overline{\widetilde{\Phi}(\hat{p})}$, где $\widetilde{\Phi}(p)$ определяется по формуле (10). $\Phi(p)$ удовлетворяет краевому условию (2):

$$\left(\widetilde{\Phi}^+(s)\cdot\overline{\widetilde{\Phi}^+(\hat{s})}\right)\left(\widetilde{\Phi}^-(s)\cdot\overline{\widetilde{\Phi}^-(\hat{s})}\right) = \left(\widetilde{\Phi}^+(s)\cdot\widetilde{\Phi}^-(s)\right)\left(\overline{\widetilde{\Phi}^+(\hat{s})}\cdot\overline{\widetilde{\Phi}^-(\hat{s})}\right) = f^2(s).$$

$\Phi(p)$ принадлежит классу B_0. $\Phi(p)$ удовлетворяет условию симметрии:

$$\overline{\Phi(\hat{p})} = \overline{\widetilde{\Phi}(\hat{p})\cdot\overline{\widetilde{\Phi}(p)}} = \overline{\widetilde{\Phi}(\hat{p})}\cdot\widetilde{\Phi}(p) = \Phi(p).$$

Пусть $\Phi_*(p)$ произвольное решение задачи (2), удовлетворяющее условию $\Phi_*(p) = \overline{\Phi_*(\hat{p})}$. Тогда функция $\widetilde{\varphi}_*(p) = \Phi_*(p), p \in R^+$ является решением задачи (1'). Разделив обе части краевого условия на $|\widetilde{\varphi}_*(s)|$, получим

$$\frac{|\widetilde{\varphi}(s)|}{|\widetilde{\varphi}_*(s)|}=1, \quad s\in L\setminus\widetilde{\Lambda}.$$

Так как функции $\widetilde{\varphi}(s)$, $\widetilde{\varphi}_*(s)$ не имеют нулей и полюсов, $\ln\left|\frac{\widetilde{\varphi}(p)}{\widetilde{\varphi}_*(p)}\right|$ является гармонической функцией в R^+. Имеем:

$$\ln\left|\frac{\widetilde{\varphi}(s)}{\widetilde{\varphi}_*(s)}\right|=0, \quad s\in L\setminus\widetilde{\Lambda}.$$

Отсюда, согласно принципу экстремума для гармонических функций, следует, что $\ln\left|\frac{\widetilde{\varphi}(p)}{\widetilde{\varphi}_*(p)}\right|=0, \quad p\in R^+$, т.е. $\left|\frac{\widetilde{\varphi}(p)}{\widetilde{\varphi}_*(p)}\right|=1, \quad p\in R^+$ и $\frac{\widetilde{\varphi}(p)}{\widetilde{\varphi}_*(p)}=e^{i\alpha}$, $p\in R^+$, $\alpha\in R$.
Заметим, что в формуле (10) под знаком экспоненты имеется произвольная постоянная. Таким образом доказано, что решений задачи (1'), не представимых в виде $\widetilde{\varphi}(p)=\Phi(p)=\widetilde{\Phi}(p)\cdot\overline{\widetilde{\Phi}(\hat{p})}$, не существует. Итак, функция

$$\widetilde{\varphi}(p)=\Phi(p)=\widetilde{\Phi}(p)\cdot\overline{\widetilde{\Phi}(\hat{p})},\ p\in R^+, \tag{11}$$

является общим решением задачи (1') в классе B_0. Общее решение исходной задачи (1) дается формулой:

$$\varphi(z)=\widetilde{\varphi}(\ln z),\ z\in M\setminus\partial M,$$

где функция $\widetilde{\varphi}(p)$ определяется формулами (10),(11).

1. З в е р о в и ч Э. И. // УМН. 1971. Т. 26. № 1. С.113.
2. Ч а е в с к и й Г. Г. // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29. № 2. С. 123.
3. А х и е з е р Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., 1970.

Поступила в редакцию 30.06.95.