УДК 539.3

Н.П. КАРЕТКО, Д.Г. МЕДВЕДЕВ

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

New formulas of the ortotropical body's resilience theory, based on the idea of general equations' solution in displacements through scalar potential have been created.

Dependences, at which scalar potential is a kvasiharmonious function have been found out.

Рассмотрим однородное ортотропное тело. Направляя оси симметрии нормально к плоскостям симметрии, следуя [1,2], можем получить уравнения равновесия в деформациях

$$
\begin{aligned}
&c_{11}\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial x}+c_{12}\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x}+c_{13}\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial x}+c_{66}\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial y}+c_{55}\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial z}=0,\\
&c_{12}\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y}+c_{22}\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial y}+c_{23}\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial y}+c_{66}\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial x}+c_{44}\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial z}=0,\\
&c_{13}\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial z}+c_{23}\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial z}+c_{33}\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial z}+c_{55}\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial x}+c_{44}\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial y}=0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

которые можно представить в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&c_{11}\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial x^2}+(c_{12}+2c_{66})\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}+(c_{13}+2c_{55})\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\\
&+(c_{12}+2c_{66})\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+c_{22}\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial y^2}+(c_{23}+2c_{44})\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}+\\
&+(c_{13}+2c_{55})\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}+(c_{23}+2c_{44})\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+c_{33}\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial z^2}=0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Запишем последнее уравнение в операторном виде:

$$\Delta_*\,\theta_*=0, \tag{3}$$

где

$$\Delta_*=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\lambda^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\mu^2\frac{\partial^2}{\partial z^2},\qquad \theta_*=\varepsilon_x+\lambda^2\varepsilon_y+\mu^2\varepsilon_z.$$

Требуя, чтобы выражения (2) и (3) были эквивалентными, получим следующие зависимости (обобщенная объемная деформация θ_* является квазигармонической функцией):

$$
\begin{aligned}
&\lambda^2=\frac{c_{12}+2c_{66}}{c_{11}}=\sqrt{\frac{c_{22}}{c_{11}}}, && 2c_{44}=\sqrt{c_{22}c_{33}}-c_{23},\\
&\mu^2=\frac{c_{13}+2c_{55}}{c_{11}}=\sqrt{\frac{c_{33}}{c_{11}}}, && 2c_{55}=\sqrt{c_{11}c_{33}}-c_{13},\\
&\lambda^2\mu^2=\frac{c_{23}+2c_{44}}{c_{11}}, && 2c_{66}=\sqrt{c_{11}c_{22}}-c_{12}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Решение системы уравнений (1) можно представить через скалярный потенциал перемещений φ, удовлетворяющий условию

$$\Delta_*\varphi=0, \tag{5}$$

при необходимом выполнении соотношения (4).

Получим теперь общее решение уравнений (1) через четыре квазигармонические функции, т.е. решение, обобщающее представление Нейбера—Папковича [3]. Для этого выразим компоненты перемещений через квазигармонические функции $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ по формулам

$$
\begin{aligned}
u &= D\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_0 + x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3) + A\varphi_1,\\
v &= D\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_0 + x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3) + B\varphi_2,\\
w &= D\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_0 + x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3) + C\varphi_3,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где A, B, C, D – произвольные постоянные.

Подставляя представления (6) в уравнения (1), находим

$$
A = B = C = -2D(c_{12} + 2c_{66})(c_{12} + c_{66})^{-1}, \tag{7}
$$

где D – произвольная постоянная, функции $\varphi_j\,(j = 0, 1, 2, 3)$ удовлетворяют уравнениям (5). При $D = 1$ или $D = -0{,}5(c_{12} + c_{66})(c_{12} + 2c_{66})^{-1}$ легко можно получить известные частные случаи [4, 5].

Положим $D = 1$ и, учитывая соотношения (7), получим следующие выражения для компонентов напряженно-деформированного состояния тела

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_0 + x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3) - 2(c_{12} + 2c_{66})(c_{12} + c_{66})^{-1}\varphi_1,\\
v &= \frac{\partial}{\partial y}(\varphi_0 + x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3) - 2(c_{12} + 2c_{66})(c_{12} + c_{66})^{-1}\varphi_2,\\
w &= \frac{\partial}{\partial z}(\varphi_0 + x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3) - 2(c_{12} + 2c_{66})(c_{12} + c_{66})^{-1}\varphi_3,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{2c_{66}c_{55}}{c_{44}}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + z\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x^2}\right) -\\
&- \frac{2c_{66}}{c_{12} + c_{66}}\left(c_{11}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + c_{12}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + c_{13}\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_y &= \frac{2c_{44}c_{66}}{c_{55}}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2} + x\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} + y\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial y^2}\right) -\\
&- \frac{2c_{66}}{c_{12} + c_{66}}\left(c_{12}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + c_{22}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + c_{23}\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right),\\
\sigma_z &= \frac{2c_{44}c_{55}}{c_{66}}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial z^2} + x\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2} + y\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2} + z\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial z^2}\right) -\\
&- \frac{2c_{66}}{c_{12} + c_{66}}\left(c_{13}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + c_{23}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + c_{33}\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\tau_{yz} = 2c_{44}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y\partial z} + x\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y\partial z} + y\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y\partial z} + z\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial y\partial z}\right) - \frac{2c_{44}c_{66}}{c_{12} + c_{66}}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\right),
$$

$$
\tau_{xz} = 2c_{55}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial z} + x\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial z} + y\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial z} + z\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x\partial z}\right) - \frac{2c_{55}c_{66}}{c_{12} + c_{66}}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right),
$$

$$\tau_{xy} = 2c_{66}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial y} + x\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y} + y\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial y} + z\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial x\partial y}\right) - \frac{2c_{66}^2}{c_{12}+c_{66}}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right).$$

Из полученных представлений можно вывести решение, включающее только одну квазигармоническую функцию, требуя равенства нулю касательных напряжений на некоторой плоскости, которую можно считать за $z = 0$. Для этого в выражениях (8) и (9) нужно положить

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0,\ \varphi_3 = \partial\Phi/\partial z,\ \varphi_0 = \Phi c_{66}\left(c_{12}+c_{66}\right)^{-1}, \tag{10}$$

где функция Φ удовлетворяет уравнению (5). Вводя новую функцию $\Psi = \partial\Phi/\partial z$, $\Phi = \int\Psi dz$, уравнения (8) и (9) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u &= z\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{c_{66}}{c_{12}+c_{66}}\int_z^\infty \frac{\partial\Psi}{\partial x}dz,\\ v &= z\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \frac{c_{66}}{c_{12}+c_{66}}\int_z^\infty \frac{\partial\Psi}{\partial y}dz,\\ w &= z\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \frac{2c_{12}+3c_{66}}{c_{12}+c_{66}}\Psi, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2c_{55}c_{66}^2}{c_{44}\left(c_{12}+c_{66}\right)}\int_z^\infty \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}dz + \frac{2c_{66}c_{55}z}{c_{44}}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{2c_{13}c_{66}}{c_{12}+c_{66}}\frac{\partial\Psi}{\partial z},\\ \sigma_y &= -\frac{2c_{66}^2c_{44}}{c_{55}\left(c_{12}+c_{66}\right)}\int_z^\infty \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}dz + \frac{2c_{44}c_{66}z}{c_{55}}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} - \frac{2c_{23}c_{66}}{c_{12}+c_{66}}\frac{\partial\Psi}{\partial z},\\ \sigma_z &= \frac{2\left(c_{44}c_{55}-c_{33}c_{66}\right)}{c_{12}+c_{66}}\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{2c_{44}c_{55}}{c_{66}}z\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\tau_{yz} = 2c_{44}z\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z},\quad \tau_{xz} = 2c_{55}z\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z},$$

$$\tau_{yz} = -\frac{2c_{66}^2}{c_{12}+c_{66}}\int_z^\infty \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}dz + 2c_{66}z\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}.$$

Из последних соотношений следует, что если производные $\partial^2\Psi/\partial y\partial z$ и $\partial^2\Psi/\partial x\partial z$ остаются конечными при $z \to 0$, то на плоскости $z = 0$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz}, \tag{13}$$

а нормальные напряжения σ_z и перемещения w на плоскости $z = 0$ определяются следующими выражениями:

$$\sigma_z = \frac{2\left(c_{44}c_{55}-c_{33}c_{66}\right)}{c_{12}+c_{66}}\frac{\partial\Psi}{\partial z},\quad w = -\frac{2c_{12}+3c_{66}}{c_{12}+c_{66}}\Psi. \tag{14}$$

Предположим, что ортотропное тело занимает нижнее полупространство $(z \le 0)$ и на границе $S(z = 0)$ полупространства

$$\sigma_z = -P(x,y) \text{ на } S_1,\quad \sigma_z = 0 \text{ на } S_2 = S \setminus S_1. \tag{15}$$

Следовательно, с учетом формул (14) и (15) имеем граничное условие

5 Зак. 1028

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big|_{z=0}=\begin{cases}-0{,}5(c_{12}+c_{66})P(x,y) & \text{на} \quad S_1\\ 0 & \text{на} \quad S_2\end{cases}, \tag{16}$$

т.е. задачу Неймана для функции Ψ, удовлетворяющей уравнению (5).

Решение указанной задачи можно представить в следующем виде:

$$\Psi=-\frac{c_{12}}{4\pi(c_{44}c_{55}-c_{33}c_{66})}\iint\limits_{S_1}\frac{P(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{\lambda^2\mu^2(x-\xi)^2+\mu^2(y-\eta)^2+\lambda^2z^2}}. \tag{17}$$

На основании формул (17) и (11) приходим к соотношению для перемещения w, имеющему место на границе полупространства $(z=0)$

$$w(x,y)=\frac{2c_{12}+3c_{66}}{4\pi(c_{44}c_{55}-c_{33}c_{66})}\iint\limits_{S_1}\frac{P(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{\lambda^2\mu^2(x-\xi)^2+\mu^2(y-\eta)^2}}. \tag{18}$$

При заданном перемещении $w(x,y)$ и $u(x,y)=v(x,y)=0$ выражение (18) можно считать интегральным уравнением для определения распределения давления между штампом и ортотропным полупространством при отсутствии между ними трения.

Рассмотрим случай, когда $P(x,y)=P_0=\text{const}$, , а S_1 – прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$. Для функции напряжений Ψ и осадки $w(x,y)$ получаем:

$$\Psi=\frac{(c_{12}+c_{66})P_0}{4\pi\lambda\mu(c_{44}c_{55}-c_{33}c_{66})}\left[x_1\ln\frac{\left(y_2+\sqrt{y_2^2+x_1^2+z_1^2}\right)}{\left(y_1+\sqrt{y_1^2+x_1^2+z_1^2}\right)}-x_2\ln\frac{\left(y_2+\sqrt{y_2^2+x_2^2+z_1^2}\right)}{\left(y_1+\sqrt{y_1^2+x_2^2+z_1^2}\right)}+\right.$$

$$+y_1\ln\frac{\left(x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}\right)}{\left(x_1+\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\right)}-y_2\ln\frac{\left(x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}\right)}{\left(x_1+\sqrt{x_1^2+y_2^2+z_1^2}\right)}+z_1\operatorname{arctg}\frac{x_2y_2}{z_1\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_1^2}}- \tag{19}$$

$$\left.-z_1\operatorname{arctg}\frac{x_2y_1}{z_1\sqrt{x_2^2+y_1^2+z_1^2}}+z_1\operatorname{arctg}\frac{x_1y_1}{z_1\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}-z_1\operatorname{arctg}\frac{x_1y_2}{z_1\sqrt{x_1^2+y_2^2+z_1^2}}\right],$$

$$w(x,y)=\frac{(2c_{12}+3c_{66})P_0}{4\pi\lambda\mu(c_{44}c_{55}-c_{33}c_{66})}\left[x_2\ln\frac{\left(y_2+\sqrt{y_2^2+x_2^2}\right)}{\left(y_1+\sqrt{y_1^2+x_2^2}\right)}-x_1\ln\frac{\left(y_2+\sqrt{y_2^2+x_1^2}\right)}{\left(y_1+\sqrt{y_1^2+x_1^2}\right)}+\right.$$

$$\left.+y_2\ln\frac{\left(x_2+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right)}{\left(x_1+\sqrt{x_1^2+y_2^2}\right)}-y_1\ln\frac{\left(x_2+\sqrt{x_2^2+y_1^2}\right)}{\left(x_1^2+\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right)}\right], \tag{20}$$

$$x_1=\lambda(x+a),\quad x_2=\lambda(x-a),\quad y_1=y+b,\quad y_2=y-b,\quad z_1=\lambda z/\mu.$$

Пусть $P(x,y)=P_0=\text{const}$, а S_1 – эллипс с полуосями a и b. Тогда для определения осадки получаем

$$w(x,y)=\frac{(2c_{12}+3c_{66})P_0}{4\pi\mu(c_{44}c_{55}-c_{33}c_{66})}\int\limits_{-a}^{a}\left[\ln\left(y+b\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}}+\sqrt{\left(y+b\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}}\right)^2+(x-\xi)^2\lambda^2}\right)-\right.$$

$$-\ln\left(y-b\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}}+\sqrt{\left(y-b\sqrt{1-\frac{\xi^2}{a^2}}\right)^2+(x-\xi)^2}\right)\Bigg]d\xi. \tag{21}$$

Если поверхностное давление $P(x,y)$ определяется выражением

$$P(x,y)=\frac{P_1 a\lambda^2\mu^2}{2\pi\left(a^2\lambda^2+\lambda^2\mu^2x^2+y^2\mu^2\right)^{3/2}},\quad P_1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P(x,y)dxdy, \tag{22}$$

то функции напряжений Φ и Ψ находим по формулам

$$\Phi=\frac{P_1(c_{12}+c_{66})\mu^2}{4\pi\lambda(c_{44}c_{55}-c_{33}c_{66})}\ln\left[(z+a)\lambda+\sqrt{(z+a)^2\lambda^2+\lambda^2\mu^2x^2+\mu^2y^2}\right], \tag{23}$$

$$\Psi=\frac{P_1(c_{12}+c_{66})\mu^2}{4\pi(c_{44}c_{55}-c_{33}c_{66})\sqrt{(z+a)^2\lambda^2+\lambda^2\mu^2x^2+\mu^2y^2}}. \tag{24}$$

Подставляя полученное в выражения (11), (12), компоненты перемещений и напряжений определим из следующих соотношений

$$\begin{aligned}
u&=-\frac{A\lambda^3\mu^2xz}{r_1^3}+\frac{A\lambda^2\mu^2c_{66}x}{(c_{12}+c_{66})r_1\left[(z+a)\lambda+r_1\right]},\\
v&=-\frac{A\lambda\mu^2yz}{r_1^3}+\frac{A\mu^2c_{66}y}{(c_{12}+c_{66})r_1\left[(z+a)\lambda+r_1\right]},\\
w&=-\frac{A\lambda^3(z+a)z}{r_1^3}-\frac{A\lambda(2c_{12}+3c_{66})}{(c_{12}+c_{66})r_1},
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z&=-\frac{2A\lambda^3(c_{44}c_{55}-c_{33}c_{66})(z+a)}{(c_{12}+c_{66})r_1^3}-\frac{2c_{44}c_{55}A\lambda^3z}{c_{66}r_1^3}+\\
&+\frac{6A\lambda^5c_{44}c_{55}z(z+a)^2}{c_{66}r_1^5},\qquad A=\frac{P_1(c_{12}+c_{66})\mu^2}{4\pi\lambda(c_{44}c_{55}-c_{33}c_{66})},
\end{aligned} \tag{26}$$

$$r_1^2=(z+a)^2\lambda^2+\lambda^2\mu^2x^2+\mu^2y^2.$$

Из условия (22) при $a\to 0$ получим решение, соответствующее сосредоточенной нагрузке величиной P_1, действующей по нормали к поверхности полупространства в начале координат. Это решение легко записать на основании формул (25), (26), полагая в них $a=0$.

Более сложные представления общих формул теории упругости для ортотропного тела на основании другого подхода даны в работе [6].

Работа выполнена при поддержке ФФИ Республики Беларусь.

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М., 1977.
2. Прусов И.А. Термоупругие анизотропные пластинки. Мн., 1978.
3. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. М.Л., 1947.
4. Снеддон И.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости. М., 1961.
5. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М., 1980.
6. Прусов И.А., Василевич Ю.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1981. №3. С.39.

Поступила в редакцию 28.11.95.