

Тогда в полосе $[\beta_{12}, \beta_{22}]$ фазовой плоскости система (2) имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл, окружающий по меньшей мере два невлеченных друг в друга устойчивых предельных цикла, расположенных в полосах $[\beta_{12}^{(v)}, \beta_{22}^{(v)}]$.

Пример. Уравнение (1), где

$$f(x) = (x^2 - 9)(x^2 - 36)(x^2 - 81)(x^2 - 169),$$

$$g(x) = x(x^2 - 16)(x^2 - 20)(x^2 - 25) \left[0,0005(x^2 - 100)^2 + 1 \right],$$

имеет по крайней мере три устойчивых изолированных периодических решения, графики которых расположены в полосах $[-8, -1]$, $[1, 8]$, $[-17, 17]$ плоскости (t, x) .

Условия теоремы 3 здесь будут выполнены, если положить, например, $\beta_{22} = -\beta_{12} = 17$, $\beta_{21} = -\beta_{11} = 12$, $\beta_{22}^{(2)} = -\beta_{12}^{(1)} = 8$, $\beta_{21}^{(2)} = -\beta_{11}^{(1)} = 6$, $\beta_3^{(2)} = -\beta_1^{(1)} = 5$, $\beta_2^{(2)} = -\beta_2^{(1)} = 2\sqrt{5}$, $\beta_1^{(2)} = -\beta_2^{(1)} = 4$, $\beta_{11}^{(2)} = -\beta_{21}^{(1)} = 3$, $\beta_{12}^{(2)} = -\beta_{22}^{(1)} = 1$, $a_{22} = -a_{12} = c_{22} = -c_{12} = 15$.

В заключение отметим, что настоящая работа поддержана Международной соросовской программой образования в области точных наук.

1. Амелькин В.В., Жавнерчик В.Э. // Дифференц. уравнения. 1988. Т.24. №10. С.1659.

2. Рейсиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 1974.

Поступила в редакцию 30.06.95.

УДК 519.62

Е.Б. СОНЕЦ

УСТОЙЧИВЫЙ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ В МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ С ЛОКАЛЬНО ВЗАИМОСОГЛАСОВАННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ПЕРЕХОДА

A new way of finding the working coefficients of the methods with locally interconsistent transition operators for numerical solution of stiff systems is proposed. It is based on stable backward recurrent formulae and allows to compute coefficients with required accuracy for any admissible values of parameters of the methods.

В работах [1,2] был описан новый способ построения методов высоких порядков точности численного решения начальных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) общего вида, основанный на замене исходной задачи последовательностью опять же дифференциальных, но линейных по зависимой переменной задач. Там же (см. также [3]) были построены специализированные методы решения таких вспомогательных систем, в которых с использованием нового требования локальной взаимосогласованности - операторов (см. [2], с.17) была конструктивно реализована концепция непосредственной аппроксимации многомерного оператора перехода на шаге интегрирования. В данной работе предлагается устойчивый способ расчета рабочих коэффициентов этих методов.

Рассмотрим задачу Коши для системы вида

$$u' = Au + a, \quad (1)$$

где $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$, $u_i = u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, A — постоянная квадратная матрица, a — постоянный вектор.

Метод $(m+k+1)$ -го порядка точности для системы (1) может быть записан в форме

$$y(t+x) = y(t) + S_{m+1+(k-1)}(A, x)(Ay(t) + a), \quad (2)$$

где $y(t+x) = u(t+x)$, $x > 0$, а оператор $S_{m+1+(k-1)}(A, x)$ (многочлен матрицы A , зависящий от параметра x) находится по рекуррентным формулам

$$S_{0+(-1)} = O, \quad S_{1+(-1)} = a_{0,1}I, \quad (3)$$

$$S_{i+2+(-1)} = S_{i+1+(-1)} + \frac{a_{i+1,1}}{xa_{i,1}}(S_{i+1+(-1)} - S_{i+(-1)})(Ax + \mu xI), \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (4)$$

$$S_{m+1+(0)} = S_{m+1+(-1)} + \frac{a_{m,2}}{xa_{m,1}}(S_{m+1+(-1)} - S_{m+(-1)})(Ax + \mu xI), \quad (5)$$

$$S_{m+1+(j-1)} = S_{m+1+(j-2)} + \frac{a_{m,j+1}}{xa_{m,j}}(S_{m+1+(j-2)} - S_{m+(-j-3)})Ax, \quad j = 2, 3, \dots, k. \quad (6)$$

Здесь $\mu \geq \|A\| > 0$, I — единичная матрица, $a_{i,j} = a_{i,j}(x)$, $i = 0, 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, k+1$ — скалярные величины, определяемые соотношениями

$$a_{i,0} = \frac{x^i}{i!} \exp(-\mu x), \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (7)$$

$$a_{i,j+1} = \int_0^x a_{i,j}(\xi) d\xi = \frac{1}{\mu}(a_{i-1,j+1} - a_{i,j}), \quad a_{-1,j+1} = \frac{x^j}{j!}, \quad i = 0, \dots, m, j = 0, \dots, k. \quad (8)$$

Использование в формулах (4)–(6) коэффициентов

$$\frac{a_{i+1,1}}{xa_{i,1}}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (a) \quad \frac{a_{m,j+1}}{xa_{m,j}}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (б) \quad (9)$$

вместо $\frac{a_{i+1,1}}{a_{i,1}}$ и $\frac{a_{m,j+1}}{a_{m,j}}$ соответственно обусловлено тем, что первые можно рассматривать как функции одного аргумента $z = \mu x$. И, рассчитав один раз таблицы коэффициентов (9) при различных значениях μx , их затем можно многократно использовать в расчетных формулах метода.

Очевидно, что прямые рекурсивные формулы расчета коэффициентов (9б) (см. [1, с.44])

$$\frac{a_{i+1,j+1}}{xa_{i+1,j}} = \frac{1}{\mu x} \cdot \frac{xa_{i,j}}{a_{i+1,j}} \cdot \frac{a_{i,j+1}}{xa_{i,j}} - \frac{1}{\mu x},$$

$$\left(\frac{1}{\mu x} \cdot \frac{xa_{i,j}}{a_{i+1,j}} = \frac{1}{\mu x} \left(\mu x + \frac{xa_{i+1,j-1}}{a_{i+1,j}} \right) > 1, \quad j > 0 \right),$$

$i = 0, 1, 2, \dots$, при фиксированном $j \geq 0$,

являются неустойчивыми и, кроме того, не исключают вычислительно опасную операцию сложения близких по модулю величин разных знаков. Аналогичные недостатки в той или иной мере присущи и другим прямым соотношениям, получаемым на основе равенства (8). При этом именно операция вычитания является главным препятствием при построении высокоточных приближений величин (9) для достаточно больших m и k .

$$\frac{a_{i,j+1}}{\chi a_{i,j}} = \mu \chi \cdot \frac{a_{i+1,j}}{\chi a_{i,j}} \cdot \left(\frac{a_{i+1,j+1}}{\chi a_{i+1,j}} + \frac{1}{\mu \chi} \right), \quad (10)$$

$i = M-1, M-2, \dots, 0$, при фиксированном $j \geq 0$,

лишены этих недостатков и могут использоваться при задании стартовых значений

$$\frac{a_{M,j+1}}{\chi a_{M,j}}, \quad j=1,2,\dots,k+1, \quad M \gg 1, \quad (11)$$

и величин $\frac{a_{i+1,j}}{\chi a_{i,j}}$, $i = M-1, M-2, \dots, 0$, которые, в свою очередь, удобно находить по формулам

$$\frac{a_{i+1,j}}{\chi a_{i,j}} = \frac{1}{\frac{\chi a_{i+1,j-1}}{a_{i+1,j}} + \mu \chi}, \quad i = 0,1,\dots, \quad j = 1,2,\dots, \quad (12)$$

где значения $\frac{\chi a_{i+1,j-1}}{a_{i+1,j}}$ предварительно определяются по (10) за исключением случая $j = 0$, рассматриваемого ниже.

Лемма 1. Для функции $a_{m,j+1} = a_{m,j+1}(x)$ имеет место следующее разложение в равномерно сходящийся на отрезке $[0, d]$, $d < D$, $D \in (0, +\infty)$, ряд:

$$a_{m,j+1}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{m+i+1,j}(x) \mu^i. \quad (13)$$

Доказательство. По определению (см. (7), (8))

$$a_{0,1}(x) = \int_0^x a_{0,0}(\xi) d\xi = \exp(-\mu x) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} \mu^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1,0}(x) \mu^i. \quad (14)$$

При этом для $a_{1,1}(x)$ верно равенство

$$a_{1,1}(x) = \frac{1}{\mu} (a_{0,1}(x) - a_{1,0}(x)) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1,1,0}(x) \mu^i. \quad (15)$$

Аналогичным образом (см. (8), (14), (15)) получаются соотношения

$$a_{m,1}(x) = \frac{1}{\mu} (a_{m-1,1}(x) - a_{m,0}(x)) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{m+i+1,0}(x) \mu^i. \quad (16)$$

Для остатка ряда (16) можно записать:

$$\begin{aligned} r_m(m, 1, \mu, x) &= \sum_{i=n}^{\infty} a_{m+i+1,0}(x) \mu^i = \mu^n \sum_{i=0}^{\infty} a_{m+n+i+1,0}(x) \mu^i = a_{m+n,1}(x) \mu^n = \\ &= \int_0^x \frac{\xi^{m+n}}{(m+n)!} \exp(-\mu \xi) d\xi \mu^n < \frac{x^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \mu^n. \end{aligned}$$

Поскольку для любых $\varepsilon > 0, x \in [0, d], \mu > 0$ можно указать такой номер $N = N(\varepsilon)$, что

$$r_{1,N}(m, \mu, x) = \frac{x^{m+N+1}}{(m+N+1)!} \mu^N < \varepsilon,$$

то ряд (16) сходится равномерно, и его можно почленно интегрировать на отрезке $[0, x]$. Получающиеся в процессе последовательного почленного интегрирования (16) ряды (13) также равномерно сходятся в указанной области (это можно показать, например, оценивая их остатки). Лемма доказана.

Лемма 2 (приводится без доказательства). Для любых $j, m \geq 0, n > 0, x > 0$ имеют место следующие неравенства:

$$\frac{a_{m+1,j}}{x a_{m,j}} > \frac{a_{m+n+1,j}}{x a_{m+n,j}} > \frac{a_{m+1,j+n}}{x a_{m,j+n}},$$

$$\frac{a_{m,j+1}}{x a_{m,j}} > \frac{a_{m+n,j+1}}{x a_{m+n,j}} > \frac{a_{m,j+n+1}}{x a_{m,j+n}}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{m+j+1+\mu x} < \frac{a_{m+1,j}}{x a_{m,j}} < \frac{1}{m+j+1}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{j+m+1} < \frac{a_{0,j+m+1}}{x a_{0,j+m}} < \frac{a_{m,j+1}}{x a_{m,j}} < \frac{a_{0,j+1}}{x a_{0,j}} < \frac{1}{j}.$$

Стартовые значения (11) для формул (10) будем искать на основе разложения (см. (13))

$$\frac{a_{M,j+1}}{x a_{M,j}} = \frac{a_{M+1,j}}{x a_{M,j}} + \frac{a_{M+2,j}}{x^2 a_{M,j}} \mu x + \dots + \frac{a_{M+n,j}}{x^n a_{M,j}} (\mu x)^{n-1} + R_n(M, j, \mu x), \quad (19)$$

$$R_n(M, j, \mu x) = \frac{a_{M+n,j}}{x^n a_{M,j}} (\mu x)^n \cdot \frac{a_{M+n,j+1}}{x a_{M+n,j}}, \quad (20)$$

где коэффициенты $\frac{a_{M+i,j}}{x^i a_{M,j}}, i = 1, \dots, n$, представимы в виде

$$\frac{a_{M+i,j}}{x^i a_{M,j}} = \frac{a_{M+1,j}}{x a_{M,j}} \cdot \frac{a_{M+2,j}}{x a_{M+1,j}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{M+i-1,j}}{x a_{M+i-2,j}} \cdot \frac{a_{M+i,j}}{x a_{M+i-1,j}}. \quad (21)$$

При этом имеют место следующие неравенства (см. (18), (21)):

$$\frac{a_{M+i,j}}{x^i a_{M,j}} < \frac{1}{M+j+1} \cdot \frac{1}{M+j+2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{M+j+i} = O\left(\frac{1}{M^i}\right), i = 1, \dots, n. \quad (22)$$

Тогда для относительной погрешности приближения величин (96) ($m=M$) суммой n членов ряда (19) с учетом (17), (20), (22) можно записать:

$$\varepsilon_n(M, j, \mu x) = R_n(M, j, \mu x) \cdot \frac{x a_{M,j}}{a_{M,j+1}} < \frac{(\mu x)^n}{(M+j+1) \dots (M+j+n)}. \quad (23)$$

Очевидно, что увеличением M можно уменьшить число n , обеспечивающее выполнение неравенства $\varepsilon_n(M, j, \mu x) < \varepsilon, \varepsilon > 0$.

При $j=0$ разложение (19) принимает особенно простой вид

$$\frac{a_{M,1}}{\lambda a_{M,0}} = \frac{1}{M+1} + \frac{\mu\chi}{(M+1)(M+2)} + \dots + \frac{(\mu\chi)^{n-1}}{(M+1)(M+2)\dots(M+n)} + R_n(M,0,\mu\chi), \quad (24)$$

а для остатка ряда (24) при $\mu\chi < M + n + 2$ справедлива оценка

$$R_n(M,0,\mu\chi) < \frac{(\mu\chi)^n (M+n+2)}{(M+1)(M+2)\dots(M+n+1)(M+n+2-\mu\chi)}. \quad (25)$$

Используя (24) и (25), можно вычислять коэффициенты (9) с любой наперед заданной точностью по формулам (12) при $j=0$.

Имея набор коэффициентов $\frac{a_{i+1,1}}{\lambda a_{i,1}}$ для $i = M, M+1, \dots, M+N_0$, по формулам (19), (21) с учетом оценки (23) (более точные оценки могут быть получены с использованием неравенств леммы 2) можно с любой наперед заданной точностью (обеспечиваемой выбором N_0) вычислить значение $\frac{a_{M,2}}{\lambda a_{M,1}}$. Действуя

аналогично, определяем также $\frac{a_{M+1,2}}{\lambda a_{M+1,1}}, \dots, \frac{a_{M+N_1,2}}{\lambda a_{M+N_1,1}}$, $N_1 < N_0$, и затем по фор-

мулам (12) находим отношения $\frac{a_{i+1,2}}{\lambda a_{i,2}}$, $i = M, M+1, \dots, M+N_1$, по которым, в

свою очередь, строим $\frac{a_{i+1,3}}{\lambda a_{i+1,2}}$, $i = M-1, M, \dots, M+N_2$, $N_2 < N_1 < N_0$, и т.д. Таким образом вычисляем все стартовые значения (11).

Используя лемму 2, покажем, что наряду с (23) имеет место неравенство $\varepsilon_n(M, j, \mu\chi) > \varepsilon_n(M, j+1, \mu\chi)$. Поэтому для обеспечения требуемой точности для всех стартовых значений ($j = 1, 2, \dots, k$) достаточно взять $N_0 = k\tilde{N}_0$, где $\tilde{N}_0$ —

номер, при котором достигается требуемая точность для коэффициента $\frac{a_{M,2}}{\lambda a_{M,1}}$.

Так, например, при расчете коэффициентов (11) для $\mu\chi=100$, $M=2000$ при $\varepsilon = 10^{-16}$ значение $\tilde{N}_0$ оказывается равным 13.

Представленный здесь алгоритм позволяет вычислять искомые коэффициенты с высокой степенью точности для сколь угодно больших значений параметров $\mu\chi$, m и k и применим также в случае систем линейных ОДУ с многочленной неоднородностью, что является важным при решении начальных задач для жестких систем нелинейных ОДУ и особенно для систем, в спектре вариационной матрицы которых одновременно присутствуют как положительные, так и отрицательные собственные числа.

1. Б о б к о в В. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1995. №2. С.41.

2. Он же // Одношаговые методы численного решения жестких систем. // Автореф. дисс. д-ра физ.-мат. наук. Мн., 1995.

3. Он же // Дифференц. уравнения. 1995. Т.31. №7. С.1164.

Поступила в редакцию 26.10.95.

УДК 519.24

Н.Н. ТРУШ, Н.В. МАРКОВСКАЯ

ОЦЕНКА КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

The estimate of covariance function of stationary stochastic process with discrete time is built. The moments of this estimate are found and their asymptotic behavior is investigated.