

Математика и информатика



УДК 517.518.

В.И. КОРЗЮК

ЛЕММА ФРИДРИХСА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ОСРЕДНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ

For commutators of averaging operators with variable step and differential operators it is proved estimates like Friedrichs lemma in Sobolev spaces of whole order. These estimates can be used together with Energetic Inequalities for proof of solvability of many Boundary Problems for Partial Differential Equations.

Обозначим через R^n n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$. Пусть Ω – открытое ограниченное множество R^n с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, представляющее собой достаточно простую геометрическую структуру.

Рассмотрим операторы осреднения переменного шага [1,2], сохраняющие граничные условия [3],

$$J_k u(x) = J_k(\psi, \omega) u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(x) J_{\delta_{mk}} u(x), \quad (1)$$

$$J_k^* u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} J_{\delta_{mk}}(\psi_m u)(x), \quad (2)$$

где $J_{\delta_{mk}} u(x) = \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) u(y) dy$ – операторы осреднения Соболева [4–6];

$\omega(x) \in C^\infty(R^n)$, носитель $\text{supp } \omega(x) \subset \{x | |x| \leq 1\}$, $\omega(x) \geq 0$, $\omega(x)$ – четная функция по каждому независимому переменному x_j ($j=1, \dots, n$), $\int_{R^n} \omega(x) dx = 1$;

$\delta_{mk} \leq 2^{-m-k}$, $\delta_{ml} = \delta_{ml}(u)$ выбираются в зависимости от функции u и $\delta_{ml} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$; $C^\infty(R^n)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций; $\psi_m \in C^\infty(R^n)$ из леммы о разбииении единицы [1,7].

Обозначим через $H^l(\Omega)$ пространство Соболева квадратично суммируемых функций вместе с обобщенными производными до порядка l включительно, заданных в Ω , $l=0, 1, 2, \dots$.

Операторы (1)–(2), как и другие операторы осреднения, позволяют строить последовательность гладких функций, стремящихся в определенном смысле к заданной функции (см. [7,8])*. Операторам (1) и (2) посвящены многие работы В.И. Буренкова (см. литературу в [7]), в частности для инте-

* В работе [8] в формулировке свойств J-11 и J-12 требуется, чтобы функция $u(x)$ принадлежала не только $L_2(\Omega)$, но и $H^{|\alpha|-1}(\Omega)$ и $H^{r-1}(\Omega)$ соответственно, $|\alpha|$, $r \geq 1$, $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$.

грального представления и продолжения функций. Операторы осреднения с переменным шагом вместе с энергетическим неравенством можно использовать при доказательстве разрешимости многих граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными. В этом случае важную роль играют оценки коммутаторов дифференциальных операторов с операторами (1)–(2).

В соответствии с [8], введем следующие обозначения:

$F_{\alpha}^{(1)} u(x) = D^{\alpha} [a J_k u - J_k (a u)]$ и $F_{\alpha}^{(2)} u(x) = D^{\alpha} [a J_k^* u - J_k^* (a u)]$, где $a(x)$ – некоторая функция и $a(x) \in C^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$, $\overline{\Omega}$ – замыкание Ω , $D^{\alpha} = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha_k (k = 1, \dots, n)$ – целые неотрицательные числа.

Аналогично, $F_{\alpha}^{(3)} u(x) = D^{\alpha} J_k u - J_k D^{\alpha} u$, $F_{\alpha}^{(4)} u(x) = D^{\alpha} J_k^* u - J_k^* D^{\alpha} u$.

P-1. Для любых $u \in H^{|\alpha|}(\Omega)$, $a \in C^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$ и $k \in N$ можно выбрать такие числа $\delta_{mk} = \delta_{mk}(u)$, что

$$\|F_{\alpha}^{(i)} u\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{k} \|u\|_{H^{|\alpha|-1}(\Omega)}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3)$$

где $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ – норма в $L_2(\Omega)$, $\|\cdot\|_{H^{|\alpha|-1}(\Omega)}$ – норма в пространстве Соболева $H^{|\alpha|-1}(\Omega)$.

Свойство P-1 фактически доказано в работах [7, 8] (свойства J-5 – J-7). В свойстве J-7 [8] требуется, чтобы $u \in H^{|\alpha|}(\Omega)$. Если обратиться к выражениям $F_{\alpha}^{(i)} u$ ($i = 1, 2, 3, 4$), которые задаются формулами (13), (14), (19) и (20), видно, что они справедливы для любой функции $u \in L_2(\Omega)$, в том числе и для $u \in H^{|\alpha|-1}(\Omega)$. Поэтому, повторяя доказательство свойства J-7, получим утверждение его и для $u \in H^{|\alpha|-1}(\Omega)$.

Рассмотрим коммутатор $K^{(1)}(D^{\alpha}, D^{\tilde{\alpha}})u = D^{\alpha}(a D^{\tilde{\alpha}} J_k u) - J_k(D^{\alpha} a D^{\tilde{\alpha}} u)$, $a \in C^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$, который можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} K^{(1)}(D^{\alpha}, D^{\tilde{\alpha}})u &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\beta \leq \alpha} a_{\beta} \Psi_m(x) (-1)^{|\alpha + \tilde{\alpha} - \beta|} \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_{\Omega} D_y^{\alpha + \tilde{\alpha} - \beta} \left\{ \omega \left(\frac{x-y}{\delta_{mk}} \right) \left[D_x^{\beta} a(x) - D_y^{\beta} a(y) \right] \right\} u(y) dy + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\beta \leq \alpha} \sum_{\gamma \leq \alpha + \tilde{\alpha} - \beta} a_{\beta} a_{\gamma} D_x^{\beta} a(x) D^{\gamma} \Psi_m(x) (-1)^{|\alpha + \tilde{\alpha} - \beta - \gamma|} \frac{1}{\delta_{mk}^n} \int_{\Omega} \left\{ D_y^{\alpha + \tilde{\alpha} - \beta - \gamma} \omega \left(\frac{x-y}{\delta_{mk}} \right) \right\} u(y) dy, \end{aligned} \quad (4)$$

где α_{β} и α_{γ} – коэффициенты формулы Лейбница производной произведения двух функций, $\alpha + \tilde{\alpha} - \beta = (\alpha_1 + \tilde{\alpha}_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n + \tilde{\alpha}_n - \beta_n)$, $\beta \leq \alpha$ – неравенство мультииндексов β и α , под которым понимается $\beta_j \leq \alpha_j$ для всех $j = 1, \dots, n$,

$$D_x^{\beta} = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}, \quad D_y^{\beta} = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y_1^{\beta_1} \dots \partial y_n^{\beta_n}}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
K^{(2)}(D^\alpha, D^{\bar{\alpha}})u &= D^\alpha(aD^{\bar{\alpha}}J_k^*u) - J_k^*D^\alpha(aD^{\bar{\alpha}}u) = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\beta \leq \alpha} a_\beta (-1)^{|\alpha + \bar{\alpha} - \beta|} \frac{1}{\delta_{mk}''} \int_{\Omega} D_y^{\alpha + \bar{\alpha} - \beta} \left\{ \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) \left[D_x^\beta a(x) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - D_y^\beta a(y) \right] [\psi_m(y) - \psi_m(x)] \right\} u(y) dy + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\beta \leq \alpha} \sum_{\gamma \leq \alpha + \bar{\alpha} - \beta} a_\beta a_\gamma (-1)^{|\alpha + \bar{\alpha} - \beta - \gamma|} D_x^\beta a(x) \times \\
&\times \frac{1}{\delta_{mk}''} \int_{\Omega} D_y^{\alpha + \bar{\alpha} - \beta - \gamma} \left\{ \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) \left[D_y^\gamma \psi_m(y) - D_x^\gamma \psi_m(x) \right] \right\} u(y) dy + K^{(1)}(D^\alpha, D^{\bar{\alpha}})u.
\end{aligned} \tag{5}$$

Правые части (4) и (5) можно рассматривать для любых $u \in L_2(\Omega)$. В дальнейшем под значениями $K^{(1)}(D^\alpha, D^{\bar{\alpha}})u$ и $K^{(2)}(D^\alpha, D^{\bar{\alpha}})u$ будем понимать именно эти выражения из (4) и (5) соответственно.

P-2. Для любых $u \in H^{|\alpha + \bar{\alpha}| - 1}(\Omega)$, $a(x) \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$ и $k \in N$ можно выбрать числа $\delta_{mk} = \delta_{mk}(u)$ так, что

$$\|K^{(i)}(D^\alpha, D^{\bar{\alpha}})u\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{k} \|u\|_{H^{|\alpha + \bar{\alpha}| - 1}(\Omega)}, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим случай дифференциального оператора второго порядка, т.е. $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $D^{\bar{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x_j}$. В этом случае соотношение (4) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
K^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)u &= \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(x) \frac{1}{\delta_{mk}''} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y_i} \left\{ \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) \left[a(y) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - a(x) \right] \left[\frac{\partial u(y)}{\partial y_j} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right] \right\} dy + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m(x) \frac{1}{\delta_{mk}''} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) \left[\frac{\partial a(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial a(y)}{\partial y_i} \right] \frac{\partial u}{\partial y_j} dy + \\
&+ \frac{\partial a(x)}{\partial x_i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial \psi_m(x)}{\partial x_j} \frac{1}{\delta_{mk}''} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) [u(y) - u(x)] dy + \\
&+ a(x) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^2 \psi_m(x)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{\delta_{mk}''} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) [u(y) - u(x)] dy + \\
&+ a(x) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial \psi_m(x)}{\partial x_i} \frac{1}{\delta_{mk}''} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) \left[\frac{\partial u(y)}{\partial y_j} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right] dy + \\
&+ a(x) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial \psi_m(x)}{\partial x_j} \frac{1}{\delta_{mk}''} \int_{\Omega} \omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right) \left[\frac{\partial u(y)}{\partial y_i} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right] dy.
\end{aligned} \tag{7}$$

По этой схеме

$$\begin{aligned}
K^{(2)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)u &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a\frac{\partial}{\partial x_j}J_k^*u\right) - J_k^*\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \\
&= \frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_{mk}^n}\int_{\Omega}\omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right)\left[\frac{\partial\psi_m(y)}{\partial y_j}-\frac{\partial\psi_m(x)}{\partial x_j}\right]u(y)dy + \\
&+ \frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_{mk}^n}\int_{\Omega}\omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right)\left[\psi_m(y)-\psi_m(x)\right]\left[\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial a(y)}{\partial y_i}\right]\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}dy + \\
&+ a(x)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_{mk}^n}\int_{\Omega}\omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right)\left[\frac{\partial^2\psi_m(y)}{\partial y_i\partial y_j}-\frac{\partial^2\psi_m(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right]u(y)dy + \\
&+ a(x)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_{mk}^n}\int_{\Omega}\omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right)\left[\frac{\partial\psi_m(y)}{\partial y_i}-\frac{\partial\psi_m(x)}{\partial x_i}\right]\frac{\partial u(y)}{\partial y_j}dy + \\
&+ a(x)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_{mk}^n}\int_{\Omega}\omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right)\left[\frac{\partial\psi_m(y)}{\partial y_j}-\frac{\partial\psi_m(x)}{\partial x_j}\right]\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}dy + \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_{mk}^n}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial y_i}\left\{\omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right)[a(y)-a(x)][\psi_m(y)-\right. \\
&\left.-\psi_m(x)]\right\}\frac{\partial u(y)}{\partial y_j}dy + K^{(1)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)u.
\end{aligned} \tag{8}$$

В силу условия $a \in C^1(\overline{\Omega})$ (непрерывности функции $a(x)$ и ее производной $\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}$), неравенства Коши–Буняковского и леммы 4 из [7] при оценке в $L_2(\Omega)$ выражений (7) и (8) получим доказываемые неравенства (6) в случае $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $D^{\tilde{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Для функции $u \in H^{|\alpha+\tilde{\alpha}|-1}(\Omega)$ и любых порядков α и $\tilde{\alpha}$, как это следует из выражения (4), значение $K^{(1)}u$ оператора $K^{(1)}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
K^{(1)}(D^\alpha, D^{\tilde{\alpha}})u &= \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\eta \leq \alpha+\tilde{\alpha}} \psi_m(x)(-1)^{|\eta|}\frac{1}{\delta_{mk}^n}\int_{\Omega}D_y^\eta\left\{\omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right)[a(x)-a(y)]\right\}\left[D_y^{\alpha+\tilde{\alpha}-\eta}u(y)-D_x^{\alpha+\tilde{\alpha}-\eta}u(x)\right]dy + \\
&+ \sum_{m=0}\sum_{\substack{\beta < \alpha \\ |\beta| \neq 0}} a_\beta \psi_m(x)\frac{1}{\delta_{mk}^n}\int_{\Omega}\omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right)\left[D_x^\beta a(x)-D_y^\beta a(y)\right]D_y^{\alpha+\tilde{\alpha}-\beta}u(y)dy + \\
&+ \sum_{m=0}\sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ |\beta| \neq 0}} \sum_{\substack{\gamma \leq \alpha+\tilde{\alpha}-\beta \\ |\gamma| \neq 0}} a_\beta a_\gamma D_x^\beta a(x)D_x^\gamma \psi_m(x)\frac{1}{\delta_{mk}^n}\int_{\Omega}\omega\left(\frac{x-y}{\delta_{mk}}\right)\left[D_y^{\alpha+\tilde{\alpha}-\beta-\gamma}u(y)-D_x^{\alpha+\tilde{\alpha}-\beta-\gamma}u(x)\right]dy.
\end{aligned} \tag{9}$$

Как теперь уже видно из (9), применяя к нему оценки и лемму 4 из [7], получим доказываемое неравенство (6) при $i=1$. Неравенство (6) в случае $i=2$ доказывается аналогично.

3. Буренков В.И. // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1987. Т.180. С68.
4. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950.
5. Он же. Введение в теорию кубатурных формул. М., 1974.
6. Fridrichs K. // Comm. Pure Appl. Math. 1954. V.7, №2. P.345.
7. Корзюк В.И. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. 1992. №2. С.49.
8. Он же. // Там же.. №3. С.63.

Поступила в редакцию 21.11.95.

УДК 517.925.42

В.В.АМЕЛЬКИН, В.Э.ЖАВНЕРЧИК

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛЬЕНАРА

The problem of the existence of the some isolated periodic solutions of the Lienard equation is solved.

В работе [1] предложен один из подходов к решению вопроса о существовании нескольких изолированных периодических решений у вещественного уравнения Лье́нара

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0. \quad (1)$$

Настоящая заметка является развитием этого подхода, в основе которого лежит теорема Пуанкаре-Бендиксона [2], используемая для выявления областей существования предельных циклов системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -f(x)y - g(x), \quad (2)$$

соответствующих периодическим решениям уравнения (1).

В качестве последовательности простых замкнутых кривых, ограничивающих кольцевые области Бендиксона, в [1] выбираются кривые, которые строятся в процессе доказательства леммы 1.

Итак, предположим, что функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и гарантируют единственность решения задачи Коши. Пусть далее

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds, \quad f_{ij}(x) = \int_{a_{ij}}^x \left[(-1)^j \lambda_{ij}(s) - f(s) \right] ds,$$

$$G(x) = \int_0^x g(s)ds, \quad F_{ij}(x) = C_{ij} - F(x),$$

$$g_{ij}(x) = F_{ij}(x) + (-1)^{i+j} d_{ij} + (-1)^i \int_{a_{ij}}^x \lambda_{ij}(s)ds, \quad i, j = 1, 2,$$

где a_{ij}, c_{ij}, d_{ij} – вещественные числа, $\lambda_{ij}(x)$ – кусочно-непрерывные неотрицательные функции, заданные на некотором промежутке.

Лемма 1 [1]. Пусть числа $a_{1j} < a_{2j}$ и функции $\lambda_{ij}(x)$ таковы, что при $j=1$ или $j=2$ выполняются условия

- 1) $(-1)^{i+1} g(x) \leq (-1)^{i+j} f_{ij}(x) \lambda_{ij}(x) \quad \forall x \in [a_{1j}, a_{2j}]$;
- 2) $(-1)^{i+j} f_{ij}(x) > 0 \quad \forall x \in \{x | g(x) = 0, x \in (a_{1j}, a_{2j})\}$;
- 3) $(-1)^i g(a_{ij}) > 0$.