УДК 518.13

А.П. ХАПАЛЮК

НОВОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ δ-ФУНКЦИИ ДИРАКА

A new definition of Dirac delta-function starts from next simple reasons. The integral that contains the function of view $\delta^{(m)}(x-x_0)$ gives the possibility to calculate the singular part of integral with usual function type $(x-x_0)^{-m-1}$. It was shown that from classic point of view this singular part is calculated with aid of usual curcuital Cauchy integral. The identity was recieved

$$\frac{m!}{2\pi i}\oint \frac{\varphi(x)}{\left(x-x_0\right)^{m+1}}dx = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta^{(m)}\left(x-x_0\right)dx,$$

that is taken as assumed identity for definition and disclosion of all properties of delta-function and it's deriviations. This generalize functions may be considered as symbols with aid of wich the curcuital integrals are formally recording as linear ones. The delta-function is interpreted as singular part of function x^{-1}. The function from delta-function $F[\delta(x)]$ is definited as singular part of function $F\left(x^{-1}\right)$.

Важной проблемой в теории обобщенных функций в смысле Л.Шварца является выполнение и обоснование свойств δ–функции Дирака. В настоящее время существуют различные подходы к решению возникающих здесь вопросов [1–6]. Оказалось, что свойства этой функции и аналогичных ей других сингулярных функций не полностью соответствуют установившимся понятиям о функциях. Считается, что их теория выходит за рамки классического анализа. В данной работе предлагается новый довольно простой подход для обоснования и выявления уже известных и новых свойств сингулярных обобщенных функций.

Будем исходить из хорошо известного в теории обобщенных функций равенства [2–3]

$$\frac{1}{x-i0} - \frac{1}{x+i0} = 2i\pi\delta(x). \tag{1}$$

Умножим это равенство на некоторую функцию $\delta(x)$ и произведение проинтегрируем в бесконечных пределах

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x-i0}dx - \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x+i0}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x)dx = \varphi(0). \tag{2}$$

При $\varphi(0)\neq 0$ интегралы, стоящие слева, имеют точку локальной расходимости (x=0) и в обычном смысле не сходятся. Для того чтобы придать им разумное конечное значение, поступим следующим образом. Возьмем первый из этих интегралов и запишем в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x-i0}dx=\int_{-\infty}^{-r}\frac{\varphi(x)}{x-i0}dx+\int_{-r}^{r}\frac{\varphi(x)}{x-i0}dx+\int_{r}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x-i0}dx, \qquad (3)$$

где r – достаточно малое положительное число, которое определяет интервал с точкой локальной расходимости. Из-за этого второй интеграл справа в (3) в обычном смысле расходится, его мы будем называть сингулярной частью интеграла, стоящего слева. Регуляризованной частью этого интеграла будем называть сумму двух других интегралов, которые сходятся в обычном смысле. Теперь во втором интеграле в (3) прямолинейный отрезок оси x, который проходит через полюс подынтегральной функции, заменим на дугу полуокружности радиуса r в обход полюса. В соответствии со знаком мнимой части функции (x-$i0$) полуокружность следует расположить в нижней полуплоскости комплексной переменной $z=x+iy$.

Аналогичным образом преобразуется второй интеграл слева в (2), но обход полюса происходит по дуге полуокружности, расположенной в верхней полуплоскости. В результате контуры интегрирования состоят из прямолинейных участков, на которых определяется регуляризованная часть, и дуг полуокружности, на которых определяется сингулярная часть интегралов. Схематически эти контуры интегрирования показаны на рисунке.

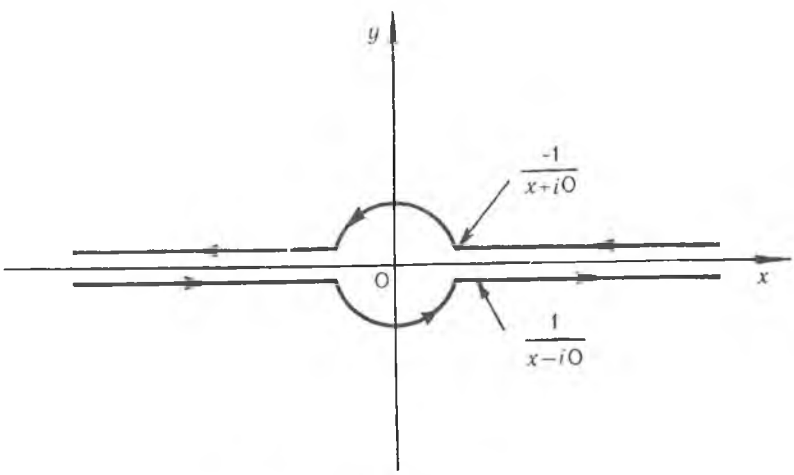

Схема контура интегрирования.

Очевидно, что регуляризованные части обоих интегралов, стоящих слева в (2), взаимно вычитаются, а сингулярные части складываются. В результате левая часть равенства (2) может быть записана в виде кругового интеграла, а само равенство принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\varphi(z)}{z}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x)dx=\varphi(0), \qquad (4)$$

где слева стоит обычный круговой интеграл Коши и интегрирование ведется в положительном направлении (против часовой стрелки) по окружности, описанной вокруг полюса подынтегральной функции.

Обычно [2,6] второе равенство в (2) и (4) считается исходным для определения $\delta(x)$. Здесь это равенство считается следствием первого, которое принимается за основное исходное для определения как самой $\delta(x)$, так и для выявления ее свойств. Все хорошо известные из классического анализа свойства кругового интеграла Коши переносятся на линейный интеграл с δ-функцией. Те свойства кругового интеграла, которые не зависят от конкретных свойств функции $\varphi(x)$, и, следовательно, определяются сингулярной частью обобщенной функции x^{-1}, приписываются δ-функции. Никаких дополнительных свойств приписывать ей не следует, в частности нет надобности приписывать ей какое-либо численное значение.

При этом определении $\delta(x)$ представляется не более чем условным знаком (символом), с помощью которого круговой интеграл Коши формально заменяется линейным. Такая формализация записи кругового интеграла принципиально ничего не меняет, но вносит определенное единообразие в методы вычисления обобщенного значения интеграла, в частности его сингулярной части. Верно и обратное утверждение: все линейные интегралы с δ-функцией можно преобразовать в соответствующие круговые интегралы Коши.

Рассмотрим теперь некоторые свойства кругового интеграла, которые необходимо перенести на $\delta(x)$. Для этого удобно несколько обобщить формулу (4), предположив, что полюс подынтегральной функции сдвинут в точку x_0 оси x. Очевидно, что вместо (4) получим

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\varphi(z)}{z-x_0}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x-x_0)dx=\varphi(x_0). \tag{5}$$

Как известно, интеграл Коши в (5) можно дифференцировать сколько угодно раз по x_0 и, следовательно, такое же свойство следует приписать символу $\delta(x-x_0)$. Продифференцировав по x_0 m раз равенство (5), получим

$$\frac{m!}{2\pi i}\oint\frac{\varphi(z)}{(z-x_0)^{m+1}}dz=(-1)^m\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta^{(m)}(x-x_0)dx=\varphi^{(m)}(x_0). \tag{6}$$

Отсюда вытекает формула

$$\frac{1}{2\pi i}S\frac{1}{(x-x_0)^{m+1}}=\frac{(-1)^m}{m!}\delta^{(m)}(x-x_0)=\frac{(-1)^m}{m!}\frac{d^m}{dx^m}\delta(x-x_0), \tag{7}$$

где слева буква S означает сингулярную часть стоящей после нее обобщенной функции, а символ $\delta^{(m)}(x-x_0)$ интерпретируется как производная от $\delta(x-x_0)$. Второе равенство в (6) определяет правило вычисления интегралов с производными от $\delta(x-x_0)$, смысл которого полностью определяется соответствующим круговым интегралом (первым равенством в (6)).

Другие свойства этих сингулярных функций также легко получаются непосредственно из определяющих их равенств (6). Полагая в (6) $\varphi(x)=\vartheta(x)(x-x_0)^m$ (m – целое число), после довольно простых и очевидных преобразований получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\vartheta(x)(x-x_0)^n\delta^{(m)}(x-x_0)dx=\frac{(-1)^n m!}{(m-n)!}\int_{-\infty}^{\infty}\vartheta(x)\delta^{(m-n)}(x-x_0)dx. \tag{8}$$

Отсюда следует

$$(x-x_0)^n\delta^{(m)}(x-x_0)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^m n!}{(m-n)!}\delta^{(m-n)}(x-x_0) & (m\ge n)\\[2ex] 0 & (m<n)\end{cases}. \tag{9}$$

Дифференцируемость и, следовательно, интегрируемость (операция, обратная дифференцированию) введенных здесь сингулярных обобщенных функций является достаточным основанием для включения их в матанализ наравне с обычными функциями. Однако в матанализе с обычными функциями выполняются и другие операции. Естественно, возникает проблема выполнения аналогичных операций и с сингулярными обобщенными функциями. Ряд таких результатов можно получить, исходя из предложенного здесь их определения.

Начнем с выяснения смысла выражения $\delta[f(x)]$, где $f(x)$ – некоторая функция. В соответствии с (4) смысл этого символа вытекает из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta[f(x)]dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)S\left[\frac{1}{f(x)}\right]dx = \frac{1}{2i\pi}\oint \frac{\varphi(z)}{f(z)}dz, \tag{10}$$

где круговой интеграл понимается как сумма вычетов по всем расположенным на оси *x* полюсам подынтегральной функции. Для упрощения выкладок будем предполагать, что функция $\varphi(x)$ регулярна, а точка x_j является *m*-кратным нулем функции *f*(*x*) и, следовательно, вблизи этой точки она может быть записана в виде $f(x) = (x - x_j)^m f_j(x)$, где $f_j(x)$ – регулярна в окрестности точки $x = x_j$ и $f_j(x_j) \neq 0$. Подставив это выражение в (10), получим равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta[f(x)]dx = \frac{1}{2i\pi}\oint \frac{\varphi(z)}{f_j(z)} \frac{dz}{(z - x_j)^m} =$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{(m-n)!}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{f_j(x)}\delta^{(m-1)}(x - x_j)dx = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left[\frac{\varphi(x)}{f_j(x)}\right]_{x = x_j} = \tag{11}$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}(x - x_j)^m\right]_{x = x_j},$$

которое решает поставленную задачу.

Легко получить также смысл выражения $f(x)\delta^{(m)}(x)$. Действительно, из определяющего равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\delta^{(m)}(x - x_0)dx = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\left[f(x)\varphi(x)\right]_{/x = x_0} \tag{12}$$

после несложных преобразований получаем

$$f(x)\delta^{(m)}(x - x_0) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f^{(k)}(x_0)\delta^{(m-k)}(x - x_0). \tag{13}$$

Из последних двух результатов можно получить заслуживающий внимания ряд частных случаев. Например, положив в (11) $f(x) = x^m$, получим формулу

$$\delta(x^m) = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\delta^{(m-1)}(x) = \frac{\delta(x)}{x^{m-1}}. \tag{14}$$

Последнее, как и предыдущие равенства, можно дифференцировать сколько угодно раз, что является источником новых соотношений и формул. Например, продифференцировав *k* раз равенство (14), получим более общую формулу

$$\delta^{(k)}\left(x^{m}\right)=(-1)^{k} k!\frac{\delta(x)}{x^{(k+1)m-1}}=(-1)^{(k+1)(m+1)}\frac{k!}{(km+m-1)!}\delta^{(km+m-1)}(x), \qquad (15)$$

которую нетрудно проверить с помощью кругового интеграла Коши.

Как известно, попытки определения смысла функции от $\delta(x)$ не увенчались успехом. При нашем подходе эта проблема решается довольно просто. Смысл выражения $F\left[\delta(x)\right]$, где F – некоторая функция, определяется тождествами

$$F[\delta(x)]=F\left[S\left(\frac{1}{x}\right)\right]=S\left[F\left(\frac{1}{x}\right)\right], \qquad (16)$$

которые с помощью круговых интегралов Коши принимают вид

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)F[\delta(x)]dx=S\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)F\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2i\pi}\oint\varphi(z)F\left(\frac{1}{z}\right)dz, \qquad (17)$$

где в правой части подразумевается суммирование всех вычетов в полюсах функции $F\left(x^{-1}\right)$. Смысл равенства (17) простой: $\delta(x)$ является сингулярной частью обобщенной функции x^{-1}, а $F\left[\delta(x)\right]$ – является сингулярной частью обобщенной функции $F\left(x^{-1}\right)$.

Рассмотрим некоторые частные случаи этого определения. Для начала найдем смысл выражения $\left[\delta(x)\right]^{m}$. В соответствии с (17) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)[\delta(x)]^{m}dx=\frac{1}{2i\pi}\oint\varphi(z)\frac{dz}{z^{m}}, \qquad (18)$$

что приводит к следующей формуле

$$[\delta(x)]^{m}=\frac{\delta(x)}{x^{m-1}}=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\delta^{(m-1)}(x). \qquad (19)$$

Как обычно последнее равенство можно дифференцировать сколько угодно раз. Например, после двукратного дифференцирования имеем

$$n(m-1)[\delta(x)]^{m-2}\left[\delta^{(1)}(x)\right]^{2}+m[\delta(x)]^{m-1}\delta^{(2)}(x)=m(m+1)\frac{\delta(x)}{x^{m+1}}. \qquad (20)$$

Из этой формулы как частный случай нетрудно получить следующее выражение

$$\left[\delta^{(1)}(x)\right]^{2}=-\frac{1}{3!}\delta^{(3)}(x)=\frac{\delta(x)}{x^{3}}. \qquad (21)$$

Продолжая аналогичные операции и комбинируя их между собой, можно получить разнообразные формулы. В качестве примера приведем следующую формулу

$$\left[\delta^{(k)}\left(x^{m}\right)\right]^{n}=\frac{1}{2i\pi}S\left[\frac{d^{k}}{d\left(x^{m}\right)^{k}}\left(\frac{1}{x^{m}}\right)\right]^{n}=-\frac{(k!)^{n}(-1)^{n(mk+m+k)}}{(mnk+mn-1)!}\delta^{(mnk+mn-1)}(x), \qquad (22)$$

из которой многие известные формулы получаются как частные случаи. Отметим смысл равенства (22). Нужно взять функцию x^{-m}, продифференцировать ее по аргументу k раз и результат возвести в n-ю степень, получится функция, сингулярная часть которой является правой частью равенства (22).

Все полученные здесь свойства сингулярных обобщенных функций соответствуют обычным и довольно очевидным свойствам кругового интеграла Коши. Кажущиеся на первый взгляд многие необычные их свойства на самом деле почти дословно повторяют свойства порождающих их обычных функций. Например, функция x^{-1} порождает $\delta(x)$ (является ее сингулярной частью). Поэтому результатам многих математических операций над одной из них соответствуют адекватные результаты тех же операций над другой. В качестве примера приведем следующий ряд аналогий с обычными и порождающимися из них сингулярными функциями

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{x} & \to & \frac{1}{x^m} & \to & \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\frac{1}{x} & \to & \frac{1}{x^{m-k}}\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\frac{1}{x} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \delta(x) & \to & [\delta(x)]^m & \to & \delta^{(m-1)}(x) & \to & [\delta(x)]^{m-k}\delta^{(k-1)}(x) \end{array}$$

С точностью до несущественных здесь коэффициентов в первом ряду выписаны результаты простых математичеких операций с обычной функцией x^{-1}, во втором ряду – результаты тех же операций с сингулярной функцией $\delta(x)$. Функции нижнего ряда являются сингулярными частями функций верхнего ряда.

Необычные правила дифференцирования функции $\delta^{(m)}(x)$ связаны с не очень удачным ее обозначением. На самом деле она дифференцируется по обычным правилам дифференцирования порождающей ее степенной функции x^{-m-1} и предпочтительнее было бы ее обозначить $\delta^{(-m-1)}(x)$ вместо $\delta^{(m)}(x)$.

1. Schwartz L. Theorie des distributions. Paris, 1950. V.I; 1951, V.II.
2. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., 1958. Вып.1–3.
3. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М., 1968.
4. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций: Секвенционный подход. М., 1976.
5. Lighthill M.J. Introduction to Fourier analysis and generalized functions. London, 1958.
6. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1979.

Поступила в редакцию 27.12.96.

УДК 621. 396. 181

А.А. ЛАБУДА, А.А. СИДЕРКО, И.В. ПРОСТОВ

ЗАРЯДОВАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ БОРО- И БОРОФОСФОРОСИЛИКАТНЫХ СТЕКОЛ

Charge stability of doped silicate glasses used as planarization isolation in the production of integrated circuits has been studied experimentally.

The multifactor dependence of this parameter has been established, and possible methods for stabilizing the charge states have been proposed.

Важной электрической характеристикой силикатных стекол, легированных в процессе химического газофазного осаждения (ХГФО), является их зарядовая стабильность, так как неконтролируемое перераспределение зарядов вызывает непредсказуемые возмущения в готовых изделиях микроэлектроники.

В данной работе приводятся результаты экспериментального исследования зарядовой стабильности боро- и борофосфоросиликатных стекол (БСС и БФСС) и ее изменение при проведении типовых температурных обработок.