$$\sigma(b) = \begin{cases} 1, t \geq b; \\ 0, t < b. \end{cases}$$

Величины нагрузок могут быть различными.

Из равенства (6) следует, что после схода нагрузки с пролета вызванные ею колебания при $\mu \neq 0$ быстро затухают. Поэтому ясно, что при любых значениях постоянных v, i_0, l_i динамический прогиб пролета будет конечным. Если же $\mu=0$, то при движении потока нагрузок максимальный динамический прогиб пролета может неограниченно возрастать с увеличением i_0, т. е. возможны резонансные режимы движения. Определение в общем случае резонансных режимов и режимов движения в некотором смысле наиболее выгодных является темой отдельного исследования. Здесь же ограничимся рассмотрением частных случаев для гибкого ($EI=0$) пролета, считая нагрузки одинаковыми по величине.

1. При $v=a/(2k+1)$, $k=1,2...$, как уже указывалось, деформация пролета, вызванная нагрузкой, после схода ее с пролета исчезает. Следовательно, динамический прогиб определяется лишь нагрузками, находящимися на пролете. Анализ характера деформации пролета позволяет сделать вывод, что при

$$l_i \geq \frac{2k}{2k+1} l_0$$

каждая нагрузка движется по невозмущенному участку пролета, т. е. все нагрузки находятся в одинаковых условиях движения.

2. Предположим, что расстояния между нагрузками одинаковы, т. е. $l_i = l$ и $v=a/2k$, $l=l_0(j-0{,}5)/k$, $k, j=1,2...$.

Нетрудно убедиться, что в этом случае $Q_n(t) = q_n(t)\sum_{i=1}^{i_0}(-1)^{i-1}$ для $t>l_0/v+l(i_0-1)/v$. Это значит, что при рассматриваемом режиме движения прогиб пролета после прохождения i_0-й нагрузки равен прогибу после прохождения одной нагрузки, если i нечетно, и равен нулю, если i четно.

3. Пусть $l_i=l=2jl_0v/a$, $v\neq a/(2k+1)$, j, $k=1,2...$.

В этом случае $Q_n(t)=i_0q_n(t)$ для $t>l_0/v+l(i-1)/v$. Это значит, что динамический прогиб растет пропорционально количеству прошедших по пролету нагрузок, т. е. происходит резонансная раскачка пролета.

1. Ф и л и п п о в А. П. Колебания деформируемых систем. М., 1970.

Поступила в редакцию 29.03.95.

УДК 517.95

А. И. ГЛУШЦОВ

МЕТОДЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ЗАДАЧАХ ЭКРАНИРОВАНИЯ

The problem of shielding of electromagnetic fields is investigated by integral equation method and by discrete sources method.

Под экраном понимается тонкостенная замкнутая оболочка, защищающая внутреннюю область от внешнего электромагнитного воздействия. При строгом рассмотрении экранирующих оболочек необходимо учитывать поле в самом экране, что усложняет геометрию задачи, ее математическую формулировку и решение. В связи с этим вводятся так называемые усредненные граничные условия [1], которые связывают поля по обе стороны экрана и ставятся на воображаемой бесконечно тонкой срединной поверхности экрана. Возникающие краевые задачи отличаются от традиционных задач электродинамики с граничными условиями сопряжения и импедансными граничными условиями и требуют отдельного рассмотрения.

В общем случае усредненные граничные условия имеют вид векторных соотношений

$$[\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2] = iN\,[\boldsymbol{n},\ [\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{H}_1+\boldsymbol{H}_2]],$$
$$[\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2] = -\,i\Pi\,[\boldsymbol{n},\ [\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{E}_1+ \boldsymbol{E}_2]], \tag{1}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к S, $N=(\omega\mu/k)\mathrm{tg}(k\delta/2)$, $\Pi=(k/\omega\mu)\mathrm{tg}(k\delta/2)$, ω — круговая частота (временная зависимость имеет вид $\exp(-i\omega t)$), $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ — волновое число, ε — комплексная диэлектрическая проницаемость экрана, μ — магнитная проницаемость экрана, δ — толщина экрана, связывающих предельные значения внутреннего $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$ и внешнего $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{H}_2$ электромагнитных полей на срединной поверхности экрана S.

Ограничимся рассмотрением частного случая цилиндрического экрана [2], поперечное сечение которого представляет плоскую область D_1, ограниченную контуром Ляпунова Γ, $D_2=\mathbf{R}^2\backslash \overline{D}_1$. Если первичное поле Е-поляризовано и не зависит от продольной координаты z, то задача сводится к нахождению продольных составляющих $u_j\,(x,\ y)$ электрического вектора вторичных полей, удовлетворяющих в D_j $(j=1,\ 2)$ уравнениям Гельмгольца

$$\Delta u_j + k_j^2 u_j = 0, \tag{2}$$

скалярным усредненным граничным условиям на Γ:

$$\partial u_1 - \gamma_1 u_1 - \gamma_2 u_2 = f_2 \equiv \gamma_2 u_0,$$
$$\partial u_2 - \delta_1 u_1 - \delta_2 u_2 = f_2 \equiv \delta_2 u_0 - \partial u_0 \tag{3}$$

и дополнительному условию излучения на бесконечности

$$\frac{\partial u_2}{\partial \rho} - ik_2 u_2 = o\left(\rho^{-1/2}\right),\ \rho \to \infty. \tag{4}$$

Здесь $k_j = \omega\sqrt{\varepsilon_j\mu_j}$ обозначает волновое число среды в области D_j, ε_j, μ_j — диэлектрическая и магнитная проницаемости сред в D_j, u_0 — продольная составляющая электрического вектора внешнего первичного поля, ∂ — производная по направлению внешней нормали к Γ, а постоянные коэффициенты

$$\gamma_1 = -0{,}5\omega\mu_1\left(\frac{1}{N} - \Pi\right),\ \gamma_2 = 0{,}5\omega\mu_1\left(\frac{1}{N} + \Pi\right),$$
$$\delta_1 = -0{,}5\omega\mu_2\left(\frac{1}{N} + \Pi\right),\ \delta_2 = 0{,}5\omega\mu_2\left(\frac{1}{N} - \Pi\right). \tag{5}$$

Обозначим через $R(D_j)$ множество комплекснозначных функций $u\in$ $\in C^2(D_j)\cap C(\overline{D}_j)$, имеющих правильную нормальную производную на Γ [3].

Теорема 1. Если для параметров задачи выполнены условия

$$\omega > 0,\ \mu_j > 0,\ k_j > 0,\ \delta > 0,\ 0 < \arg k \le \pi / 2, \tag{6}$$

то задача (2)—(4) не может иметь более одного решения класса $R(D_j)$.

Доказательство. Пусть u_j — решение однородной задачи (2)—(4). Обозначим через Γ_R окружность радиуса R, охватывающую область D_1, а через D_R — область, заключенную между контуром Γ и окружностью Γ_R. Применим к функциям u_1 и $\bar{u}_1$, u_2 и $\bar{u}_2$ первую формулу Грина в областях D_1 и D_R соответственно:

$$\iint\limits_{D_1} u_1 \Delta \bar{u}_1 ds = \int\limits_{\Gamma} u_1 \partial \bar{u}_1 dl - \iint\limits_{D_1} |\operatorname{grad} u_1|^2 ds,$$

$$\iint\limits_{D_R} u_2 \Delta \bar{u}_2 ds = -\int\limits_{\Gamma} u_2 \partial \bar{u}_2 dl + \int\limits_{\Gamma_R} u_2 \partial \bar{u}_2 dl - \iint\limits_{D_R} |\operatorname{grad} u_2|^2 ds.$$

Из этих соотношений, используя уравнение (2) и граничные условия (3), получим равенство

$$\int\limits_{\Gamma_R} u_2 \partial \bar{u}_2 dl = \frac{\mu_2}{2\mu_1} \bar{k} \operatorname{ctg} \frac{\bar{k}\delta}{2} \int\limits_{\Gamma} |u_1 - u_2|^2 dl - \frac{\mu_2}{2\mu_1} \bar{k} \operatorname{tg} \frac{\bar{k}\delta}{2} \int\limits_{\Gamma} |u_1 + u_2|^2 dl +$$
$$+ \frac{\mu_2}{\mu_1} \iint\limits_{D_1} (|\operatorname{grad} u_1|^2 - k_1^2 |u_1|^2) ds + \iint\limits_{D_R} (|\operatorname{grad} u_2|^2 - k_2^2 |u_2|^2) ds. \tag{7}$$

Так как $0<\arg k \le \pi/2$, то $\operatorname{Im} (\bar{k} \operatorname{ctg} \frac{\bar{k}\delta}{2}) \ge 0$, $\operatorname{Im} (\bar{k} \operatorname{tg} \frac{\bar{k}\delta}{2}) \le 0$ и из (7) вытекает неравенство $\operatorname{Im} \int\limits_{\Gamma_R} u_2 \partial \bar{u}_2 dl \ge 0$. Это означает [3, с. 89], что $u_2=0$ вне Γ_R. В силу аналитичности $u_2=0$ в D_2, тогда из (3) следует, что $u_1=\partial u_1=0$ на Γ и $u_1=0$ в D_1. Теорема доказана.

Замечание. Используя технику [4], можно доказать единственность решения задачи (2)—(4) и для комплексных k_j.

Будем искать решение задачи (2)—(4) в виде потенциалов простого слоя

$$u_j(M) = \int\limits_{\Gamma} \nu_j(P) G_j(M, P)\, dl_p, \quad M \in D_j \tag{8}$$

с непрерывными на Γ плотностями ν_j. Здесь $G_j(M, P) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_j R_{MP})$, $H_0^{(1)}(\cdot)$ — функция Ханкеля, R_{MP} — расстояние между точками M и P. Используя скачок нормальной производной потенциала простого слоя, получим систему интегральных уравнений относительно $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$ вида

$$\nu + A\nu = g, \tag{9}$$

где $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ — компактный оператор на $C(\Gamma) \times C(\Gamma)$, компоненты которого определяются формулами:

$$(A_{11}\nu_1)(M) = 2\int\limits_{\Gamma} \nu_1(P) \left[\partial_M G_1(M, P) - \gamma_1 G_1(M, P)\right] dl_p,$$
$$(A_{12}\nu_2)(M) = -2\gamma_2 \int\limits_{\Gamma} \nu_2(P) G_2(M, P)\, dl_p,$$
$$(A_{21}\nu_1)(M) = 2\delta_1 \int\limits_{\Gamma} \nu_1(P) G_1(M, P)\, dl_p, \tag{10}$$
$$(A_{22}\nu_2)(M) = -2\int\limits_{\Gamma} \nu_2(P) \left[\partial_M G_2(M, P) - \delta_2 G_2(M, P)\right] dl_p,$$

а правая часть $g = \begin{pmatrix} 2f_1 \\ -2f_2 \end{pmatrix}$.

Теорема 2. Если $f_j \in C(\Gamma)$, выполнены условия (6) и k_2 не является собственным значением внутренней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в области D_1, то существует единственное решение $\nu \in C(\Gamma) \times C(\Gamma)$ системы интегральных уравнений (9).

Доказательство. Достаточно показать [3], что однородная система

$$\nu + A\nu = 0 \tag{11}$$

имеет только нулевое решение. Пусть $\nu \in C(\Gamma)\times C(\Gamma)$ — решение (11). Тогда формулы (8) определяют непрерывные на всей плоскости функции u_j, которые в областях D_j совпадают с решением однородной задачи (2)—(4) и по теореме 1 $u_j=0$ в D_j. В области D_2 функция u_1 является решением внешней однородной задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, которая имеет только нулевое решение. Следовательно, $u_1 \equiv 0$ на всей плоскости, откуда, используя скачок нормальной производной потенциала простого слоя на Γ, получаем, что $\nu_1=0$.

Аналогично, рассматривая u_2 в области D_1, приходим к внутренней задаче Дирихле

$$\Delta u_2 + k_2^2 u_2 = 0 \text{ в } D_1,$$

$$u_2|_\Gamma = 0.$$

Поскольку k_2 не является собственным значением, то $u_2=0$ в D_1. Отсюда следует, что $\nu_2=0$. Теорема доказана.

Оказывается, что система интегральных уравнений (9) тесно связана с одним из эффективных численных методов решения дифракционных задач — методом дискретных источников [5].

Решение задачи (2)—(4) может быть выражено через граничные функции f_j с помощью функции Грина $g_j(M, P)$ этой задачи

$$\left.\begin{array}{l}\mu_2 u_1(M), \text{ если } M \in D_1\\ \mu_1 u_2(M), \text{ если } M \in D_2\end{array}\right\} = \int_\Gamma \left[\mu_2 g_1(M, P) f_1(P) - \mu_1 g_2(M, P) f_2(P)\right] dl_p. \tag{12}$$

Рассмотрим функции $\tilde{u}_j \in R(D_j)$, $(j=1, 2)$, которые являются решениями уравнений (2) в D_j, а функция $\tilde{u}_2$ дополнительно удовлетворяет условию излучения (4). Для них справедливо интегральное представление, аналогичное (12)

$$\left.\begin{array}{l}\mu_2 \tilde{u}_1(M), \text{ если } M \in D_1\\ \mu_1 \tilde{u}_2(M), \text{ если } M \in D_2\end{array}\right\} = \int_\Gamma \{\mu_2 g_1(M, P)\left[\partial \tilde{u}_1(P) - \gamma_1 \tilde{u}_1(P) - \gamma_2 \tilde{u}_2(P)\right] -$$

$$-\mu_2 g_2(M, P)\left[\partial \tilde{u}_2(P) - \delta_1 \tilde{u}_1(P) - \delta_2 \tilde{u}_2(P)\right]\} dl_p. \tag{13}$$

Обозначим через D произвольную ограниченную замкнутую подобласть в D_j. Используя (12) и (13), получаем оценку

$$||u_j - \tilde{u}_j||_{C(D)} = 0\Big(||\partial \tilde{u}_1 - \gamma_1 \tilde{u}_1 - \gamma_2 \tilde{u}_2 - f_1||_{L_2(\Gamma)} +$$

$$+ ||\partial \tilde{u}_2 - \delta_1 \tilde{u}_1 - \delta_2 \tilde{u}_2 - f_2||_{L_2(\Gamma)}\Big),$$

которая показывает, что для аппроксимации точного решения u_j в пространстве непрерывных функций $C(D)$ достаточно приблизить граничные функции f_1 и f_2 линейными комбинациями $\partial \tilde{u}_1 - \gamma_1 \tilde{u}_1 - \gamma_2 \tilde{u}_2$ и $\partial \tilde{u}_2 - \delta_1 \tilde{u}_1 - \delta_2 \tilde{u}_2$ в $L_2(\Gamma)$.

Существуют различные способы построения полных систем дискретных источников [5]. Выберем систему метагармонических функций, отвечающих мультипольным источникам, сосредоточенным в начале координат внутри области D_1: $\{\chi_n(M)\}$ — внутренняя, $\{\psi_n(M)\}$ — внешняя системы функций, $n \in Z$, $\chi_n(M) = J_n(k_1\rho)e^{in\varphi}$, $\psi_n(M) = H_n^{(1)}(k_1\rho)e^{in\varphi}$, (ρ, φ) — полярные координаты точки M, $J_n(\cdot)$ и $H_n^{(1)}(\cdot)$ — функции Бесселя и Ханкеля. Будем искать приближенное решение задачи (2)—(4) в виде сумм

$$\tilde{u}_{1N}(M) = \sum_{n=-N}^{N} a_n^N \chi_n(M), \qquad \tilde{u}_{2N}(M) = \sum_{n=-N}^{N} a_n^N \psi_n(M).$$

Для обоснования возможности выбора коэффициентов a_n^N и b_n^N путем удовлетворения граничных условий в $L_2(\Gamma)$ рассмотрим прямую сумму гильбертовых пространств $H \equiv L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(x, y)_H = (\langle x_1, x_2\rangle, \langle y_1, y_2\rangle)_H = (x_1, y_1)_{L_2} + (x_2, y_2)_{L_2}$$

и положим

$$h_n \equiv \langle \partial\chi_n - \gamma_1\chi_n, -\delta_1\chi_n\rangle, \quad r_m \equiv \langle -\gamma_2\psi_m, -\partial\psi_m - \delta_2\psi_m\rangle, \quad n, m \in Z.$$

Теорема 3. Если k_2 не является собственным значением задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в области D_1 и выполнены условия (6), то система $\{h_n, r_m\}$ полна в H.

Доказательство. Пусть $x = \langle x_1, x_2 \rangle$ — произвольный элемент H. Достаточно показать, что из равенств

$$(h_n, x)_H = 0, \ (r_m, x)_H = 0, \ n, m \in Z \tag{14}$$

следует $x = 0$. Соотношения (14) эквиваленты следующим:

$$\begin{gathered}\int_\Gamma [\partial\chi_n(P) - \gamma_1\chi_n(P)]\overline{x}_1(P)dl_P - \delta_1\int_\Gamma \chi_n(P)\overline{x}_2(P)dl_P = 0, \quad n \in Z,\\ -\gamma_2\int_\Gamma \psi_m(P)\overline{x}_1(P)dl_P + \int_\Gamma [\partial\psi_m(P) - \delta_2\psi_m(P)]\overline{x}_2(P)dl_P = 0, \quad m \in Z,\end{gathered} \tag{15}$$

Пусть $M(\rho, \varphi)$ — точка вне окружности Γ_a с центром в D_1, охватывающей D_1, (r, ψ) — полярные координаты точки $P \in \Gamma$. Умножая первое из соотношений (15) на $\frac{i}{4}H_n^{(1)}(k_1\rho)e^{-in\varphi}$ и суммируя по всем $n \in Z$, в силу теоремы сложения

$$H_0^{(1)}(k_1R_{MP}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_1r)H_n^{(1)}(k_1\rho)e^{in(\psi-\varphi)},$$

справедливой при $\rho > r$, получим

$$v_1(M) \equiv \int_\Gamma [\partial_P G_1(M, P) - \gamma_1 G_1(M, P)]\overline{x}_1(P)dl_P - \delta_1\int_\Gamma G_1(M, P)\overline{x}_2(P)dl_P = 0, \tag{16}$$

если M находится вне Γ_a. Но функция $v_1(M)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца вне Γ и является аналитической функцией в области D_2, поэтому равенство (16) имеет место для всех $M \in D_2$.

Аналогично, если Γ_b — окружность в D_1 и $M(\rho, \varphi)$ — точка внутри этой окружности, то, умножая второе из соотношений (15) на $\frac{i}{4}J_m(k_2\rho)e^{-im\varphi}$ и суммируя по всем $m \in Z$, получим равенство

$$v_2(M) \equiv \int_\Gamma [\partial_P G_2(M, P) - \delta_2 G_2(M, P)]\overline{x}_2(P)dl_P - \gamma_2\int_\Gamma G_2(M, P)\overline{x}_1(P)dl_P = 0, \tag{17}$$

которое в силу аналитичности $v_2(M)$ справедливо всюду в D_1.

Далее, опустим в (16) и (17) точку M на контур Г. В силу свойств потенциалов простого и двойного слоя с плотностями из $L_2(\Gamma)$ [6] для почти всех $M \in \Gamma$ имеем равенства

$$\frac{1}{2}\bar{x}_1(M)+\int_\Gamma[\partial_P G_1(M,\ P)-\gamma_1 G_1(M,\ P)]\bar{x}_1(P)dl_P-\delta_1\int_\Gamma G_1(M,\ P)\bar{x}_2(P)dl_P=0,$$

$$-\frac{1}{2}\bar{x}_2(M)-\gamma_2\int_\Gamma G_2(M,\ P)\bar{x}_1(P)dl_P+\int_\Gamma[\partial_P G_2(M,\ P)-\delta_2 G_2(M,\ P)]\bar{x}_2(P)dl_P=0. \qquad (18)$$

Но правые части системы интегральных уравнений (18) являются аналитическими функциями, поэтому $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ эквивалентны непрерывным на Γ функциям. Переходя здесь к комплексно сопряженным величинам, получим однородную систему интегральных уравнений относительно $x_-=\langle x_1,\ -x_2\rangle$

$$x_-+A^*x_-=0,$$

сопряженную с (11), которая, согласно теореме 2, имеет только нулевое решение. Теорема доказана.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

1. Аполлонский С. М., Ерофеенко В. Т. Электромагнитные поля в экранирующих оболочках. Мн., 1988.
2. Ерофеенко В. Т., Козловская И. С. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 2. С. 242.
3. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
4. Kress R., Roach G. F. // J. Math. Phys. 1978. V. 19. № 6. P. 1433.
5. Еремин Ю. А., Свешников А. Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М., 1992.
6. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., 1957.

Поступила в редакцию 30.05.95.

УДК 517.968.23

А. П. ШИЛИН

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ЯДРАМИ НА СИММЕТРИЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Two new integral equations are solved in quadratures.

Рассмотрим уравнения, в которых все функции комплекснозначны:

$$\varphi(t)+\int_0^1 k_1(t,\ s)\varphi(s)ds+\int_{-1}^0 k_2(t,\ s)\varphi(s)ds=g(t),\quad -1<t<1, \qquad (1)$$

$$\begin{cases}\varphi(t)+\int_0^1 l_1(t,\ s)\varphi(s)ds+\int_{t-1}^0 l_2(0,\ s-t)\varphi(s)ds=g(t),\ 0<t<1,\\ \varphi(t)+\int_0^{t+1} l_1(0,\ s-t)\varphi(s)ds+\int_{-1}^0 l_2(t,\ s)\varphi(s)ds=g(t),\ -1<t<0.\end{cases} \qquad (2)$$

Заданная функция $g(t)$, искомая функция φ (t) и используемая в дальнейшем вспомогательная функция $\psi(t)$ интегрируемы с квадратом на интервале $-1<t<1$. Ядра уравнений (1), (2) характеризуются соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial t}k_1(t,\ s)+\frac{\partial}{\partial s}k_1(t,\ s)=\begin{cases}k_1(t,\ 0)k_1(0,\ s),\quad 0<t<1,\ 0<s<1,\\ -k_2(t,\ 0)k_1(0,\ s),\quad -1<t<0,\ 0<s<1,\end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}k_2(t,\ s)+\frac{\partial}{\partial s}k_2(t,\ s)=\begin{cases}k_1(t,\ 0)k_2(0,\ s),\quad 0<t<1,\ -1<s<0,\\ -k_2(t,\ 0)k_2(0,\ s),\quad -1<t<0,\ -1<s<0,\end{cases}$$