

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТИ НА ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДРЕЙФОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Theoretical investigation of the forced drift periodic motions in a viscous fluid is made on the basis of the common hydrodynamic nonlinear equations. The effect of the vertical turbulent exchange coefficient depending upon depth and the partial sliding on the bottom is studied. Coriolis force is taken into account. Suppose that disturbing force does not depend on the horizontal coordinates.

Известно, что в глубоководных бассейнах коэффициент вертикального турбулентного обмена ν не является постоянной величиной. Так, например, в работе [1] на основе данных непосредственных измерений в Атлантическом океане приведена зависимость ν от вертикальной координаты. Теоретические исследования чисто дрейфовых течений, не зависящих от времени при переменном ν , проводились в работах [2—3].

В данной работе предполагается, что коэффициент вертикального турбулентного обмена является функцией глубины и рассматриваются две из возможных моделей движения вязкой жидкости вблизи твердой границы: 1) при условии полного прилипания и 2) при условии частичного скольжения.

1. Пусть к поверхности однородной вязкой жидкости постоянной глубины h под углом Θ к оси абсцисс прикладываются периодические по времени касательные напряжения вида

$$\bar{\tau}_1 = (\tau_1 \cos \Theta \cos \sigma t, \tau_1 \sin \Theta \cos \sigma t), (\tau_1 \text{ const}). \quad (1)$$

Горизонтальные составляющие U_1 и V_1 вектора скорости периодического дрейфового течения, образующегося в жидкости под действием «ветра» (1), определяются из решения системы уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - 2\omega V = \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} f \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + 2\omega U = \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} f \frac{\partial V}{\partial z}$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \tau_1 \cos \Theta \cos \sigma t, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \tau_1 \sin \Theta \cos \sigma t \quad \text{при } z=0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \gamma U, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \gamma V \quad \text{при } z=-1. \quad (4)$$

Уравнения (2) и граничные условия (3)—(4) записаны в безразмерной форме и получаются из нелинейных уравнений гидродинамики. В силу того, что возмущающая сила $\bar{\tau}_1$ не зависит от x_1 и y_1 , U_1 и V_1 ($W_1=0$) также от них не зависят. Размерные величины (с индексом 1) определяются по правилу: $U = U_1 / \sqrt{gh}$, $V = V_1 / \sqrt{gh}$, $t = t_1 \sqrt{g/h}$, $\sigma = \sigma_1 \sqrt{h/g}$, $z = z_1 / h$, $\tau = -\tau_1 / (\rho gh \varepsilon)$, $\varepsilon = \nu_0 / (h \sqrt{gh})$, $\omega = \omega_1 \sqrt{h/g}$, ($\nu_0 = \nu(0)$, $\nu(z) = \nu_0 \cdot f(z)$, (ω_1 -параметр Кориолиса); $\gamma = \frac{\gamma_1 h}{\rho \nu_0}$, где γ_1 -коэффициент частичного скольжения.

Если известно решение $W(z, t, \omega) = W_1(\omega) + iW_2(\omega)$ граничной задачи

$$\varepsilon \frac{d}{dz} f \frac{dW}{dz} - i(\sigma + 2\omega)W = 0; \quad (5)$$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\tau}{2} \quad \text{при } z=0; \quad (6)$$

$$\frac{dW}{dz} = \gamma W \quad \text{при } z=-1,$$

то легко показать, что решение исходной задачи (2)—(4) определяется по формулам:

$$\begin{aligned} U &= W_1(\omega) \cos(\sigma t + \Theta) - W_2(\omega) \sin(\sigma t + \Theta) + W_1(-\omega) \cos(\sigma t - \Theta) + \\ &\quad + W_2(-\omega) \sin(\sigma t - \Theta), \\ V &= W_1(\omega) \sin(\sigma t + \Theta) - W_2(\omega) \cos(\sigma t + \Theta) - W_1(-\omega) \sin(\sigma t - \Theta) + \\ &\quad + W_2(-\omega) \cos(\sigma t - \Theta). \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что в случае $\gamma=0$ получаем решение исходной задачи при условии полного скольжения на дне бассейна, а в случае $\gamma=-\infty$ — при условии полного прилипания, т. е. условие (4) является более общим.

Если функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — фундаментальные решения уравнения (5), то решение задачи (5)—(6) имеет вид

$$W = \frac{\tau}{2} \frac{\varphi_1(\varphi_{2h} - \gamma \varphi'_{2h}) - \varphi_2(\varphi_{1h} - \gamma \varphi'_{1h})}{\varphi'_{10}(\varphi_{2h} - \gamma \varphi'_{2h}) - \varphi_{20h}(\varphi_{1h} - \gamma \varphi'_{1h})},$$

где $\varphi'_{i0} = \varphi'_i(z)$ при $z = 0$, $\varphi_{ih} = \varphi_i(z)$ при $z = -1$, $i = 1, 2$.

Аналитическое решение уравнения (5) можно найти только для специального вида функций $f(z)$. Например, для $f = (1+az)^\alpha$ ($\alpha \neq 2$) имеем

$$W = (1+az)^{\frac{1-\alpha}{2}} [C_1 J_\nu(\kappa) + C_2 Y_\nu(\kappa)], \quad \text{где } J_\nu, Y_\nu \text{ — функции Бесселя,}$$

$$\kappa = \frac{2}{2-\alpha} \sqrt{-i \frac{\sigma+2\omega}{a^2}} (1+az)^{\frac{2-\alpha}{2}}, \quad \nu = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}. \quad \text{Однако в реальных условиях}$$

$f(z)$ — весьма сложная функция глубины ($f(z) > 0$), и $\varphi_{1,2}$ аналитически найти не удастся. Но учитывая, что величина $(\sigma+2\omega)/\varepsilon \gg 1$, к этому уравнению можно применить метод ВКБ. Тогда, $W = C_1 \varphi_1(z) + C_2 \varphi_2(z)$, где фундаментальные решения $\varphi_{1,2}$ и их производные имеют вид:

$$\varphi_{1,2} = \mp \frac{i}{\lambda} f^{-1/4} \exp \left(\pm i \lambda \int_{-1}^z \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \right) (1 + O(\lambda^{-1})),$$

$$\varphi'_{1,2} = f^{-3/4} \exp \left(\pm i \lambda \int_{-1}^z \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \right) (1 + O(\lambda^{-1})),$$

$$\lambda = \sqrt{-i \frac{\sigma+2\omega}{\varepsilon}}.$$

Заметим, что $\varphi_{1,2}$ являются точными для $f(z) = \text{const}$. Следует отметить, что функцию $f(z)$ можно задавать не только аналитически, но и таблично,

так как интегралы $\int_{-1}^z dz / \sqrt{f(z)}$ можно вычислять численно при любых $f(z) > 0$.

Определяя C_1 и C_2 из граничных условий и подставляя значение W в (7), окончательно получаем решение исходной задачи. Ввиду громоздкости выражений, определяющих $C_{1,2}$, здесь они не приводятся.

2. Для выяснения влияния на структуру волнового поля непостоянства ν и периода возмущающей силы $2\pi/\sigma$ были проведены численные расчеты для законов изменения $\nu(z)$, приведенных на рис. 1. Кривая a получена на основании анализа данных непосредственных измерений в Атлантическом океане [1]; кривая b $\nu(z) = \nu_0(1-z)^{3/2}$ — теоретическим путем [4]; в третьем случае (c) ν — постоянная величина.

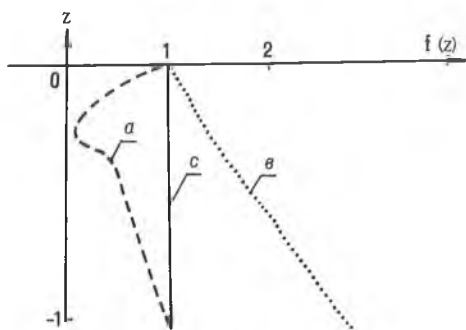


Рис. 1. Законы изменения

Рассчитывались значения горизонтальных составляющих вектора скорости U и V , определялись модуль скорости $R(z, t) = \sqrt{U^2 + V^2}$ и угол ψ между осью Ox и направлением вектора скорости течения. Численные расчеты были проведены при $\omega(\text{с}^{-1})$, $h(\text{м})$, $\tau(\text{дин}\cdot\text{см}^{-2})$, изменявшихся в пределах: $3,6 \cdot 10^{-6} \leq \omega \leq 4,3 \cdot 10^{-5}$; $100 \leq h \leq 1000$; $\tau = 1$.

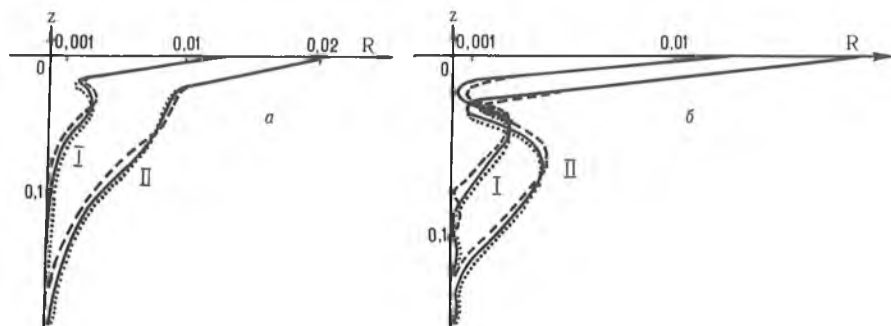


Рис. 2. Зависимость модуля безразмерной скорости от безразмерной глубины:
а — $\omega = 4,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$; б — $\omega = 3,6 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ при $\sigma = 0,001$ (I), $\sigma = 0,00046$ (II)

Анализ численных расчетов показывает (в случае полного прилипания на дне бассейна), что структура волнового поля существенно зависит как от частоты σ , так и от поведения v . На рис. 2 показана зависимость модуля вектора скорости при различных v и σ , а на рис. 3 дана зависимость ψ от этих же величин. Все графики приведены для момента времени $2\pi/\sigma$ и $\Theta = 0$.

Согласно теории Экмана, вектор скорости чисто дрейфового течения ($\sigma = 0$ и $\vec{U}$ не зависит от времени) с уменьшением z вращается против часовой стрелки (спираль Экмана), причем амплитуда вектора скорости уменьшается с ростом глубины по экспоненциальному закону, а угол поворота вектора — по линейному. При этом вектор скорости течения на свободной поверхности отклоняется на угол $\alpha = 45^\circ$ по часовой стрелке от направления вектора касательных напряжений.

Из рис. 2 и 3 видно, что в дрейфовом периодическом по времени течении как при постоянном, так и при переменном v , даже если $\sigma = 0,00046$, характер изменения с глубиной скорости и угла поворота весьма значительно отличается от экмановского. Заметное приповерхностное течение занимает более глубокий слой, но при $z \geq 19$ м падение скорости возрастает. По сравнению с экмановским вектор скорости поворачивается значительно быстрее.

При увеличении σ (уменьшение периода τ) характер изменения указанных величин меняется и количественно и качественно; скорость приповерхностного течения становится значительно меньше.

Кроме того, в экваториальной области ($\omega \approx 10^{-6} \text{ с}^{-1}$) профиль вектора скорости по глубине имеет несколько максимумов, причем каждый последующий меньше предыдущего. Интересно отметить, что изменение с глубиной угла поворота вектора скорости вблизи экватора носит ступенчатый характер и резко отличается от линейного (см. рис. 3). Рис. 2, 3 показывают, что зависимость скорости периодического дрейфового течения от периода возмущающей силы значительно сильнее, чем от характера изменения вертикального коэффициента турбулентного обмена. Однако при увеличении v_0 при любых σ скорость течения возрастает.

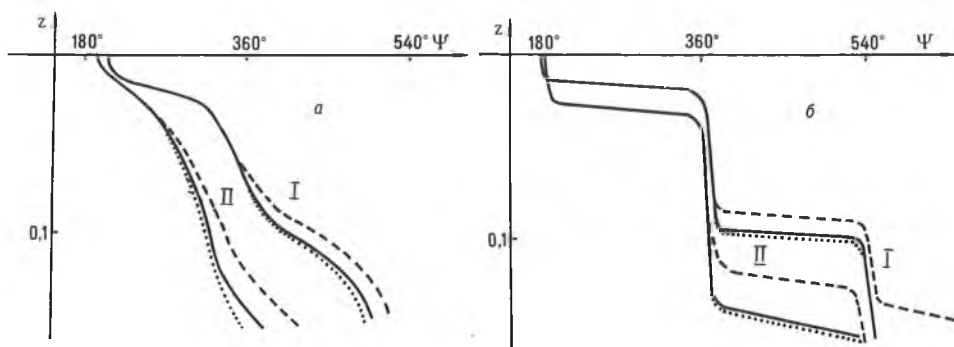


Рис. 3. Зависимость угла ψ от безразмерной глубины. Обозначения те же, что и на рис. 2

Отметим также, что в периодических дрейфовых течениях угол отклонения вектора скорости течения на свободной поверхности от направления вектора касательных напряжений составляет уже не 45° , как в случае чисто дрейфовых течений, а зависит от периода возмущающей силы. Так, например, на рис. 3 видно, что этот угол равен почти 180° .

3. Аналогичные расчеты проводились и для случая частичного скольжения на дне. В работе [5] показано, что учет этого условия на твердой границе приводит к существенному изменению волнового поля в случае, когда к свободной поверхности прикладываются периодические поверхностные давления. Однако, как показали расчеты, для периодических дрейфовых течений вид граничных условий на дне бассейна практически не сказывается на волновом поле. С физической точки зрения этот факт понятен, так как скорость дрейфовых течений имеет существенное значение лишь в приповерхностном слое, а при увеличении глубины быстро стремится к нулю.

1. Колесников А. Г. и др. // Океанология. 1961. № 4. С. 17.
2. Доброклонский С. В. // Там же. 1969. № 1. С. 35.
3. Доценко С. Ф. // Морские гидрофизические исследования. 1971. № 1. С. 81.
4. Куфтарков Ю. М. // Там же. 1970. № 4. С. 23.
5. Чинь Л. К. Влияние частичного скольжения на распространение длинных волн в вязкой жидкости: Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. Мн., 1987.

Поступила в редакцию 03.03.95.

УДК 62-752.534

В. П. САВЧУК, В. А. САВЕНКОВ, О. Н. ВЯРЬВИЛЬСКАЯ

КОЛЕБАНИЯ НАТЯНУТОГО ПРОЛЕТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩИХСЯ НАГРУЗОК

The vibrations of the span during the motion at a constant speed of a single load or a load stream are investigated. The case, when the span rigidity is neglected, is considered in detail. The non — resonance regimes of the motion are found.