4. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.
5. Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М., 1986.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972.

Поступила в редакцию 12.01.95.

УДК 62-50

Г. П. РАЗМЫСЛОВИЧ

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

For descriptor systems with delay in state, i. e. for systems of the form $A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t)$, the problem of computing the transfer matrix has been solved. The final expression is suitable for computer use.

Рассмотрим не разрешенную относительно производной систему управления вида:

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t),\ t \geq 0, \tag{1}$$

$$x_0(\cdot) = \{x(t) = \varphi(t),\ -h \leq t < 0,\ x(0) = x_0\}, \tag{2}$$

с выходом $y(t)=Cx(t)$, $t\geq 0$, где $x\in R^n$, $u\in R^m$, $y\in R^l$; A_0, A, A_1, B, C — заданные матрицы соответствующих размерностей; $h(h>0)$ — запаздывание; $\varphi(t)$— кусочно-непрерывная n-вектор функция; x_0-заданный n-вектор.

Если матрица A_0 является сингулярной, т. е. det $A_0=0$, то система (1) называется дескрипторной или сингулярной. Системы такого типа возникают во многих технических областях, как, например, теория электрических цепей, теория сингулярно возмущенных систем, композитных систем и т. д. Наиболее полная библиография по таким системам содержится в работе [1].

Согласно [2, 3], пара $(x_0(\cdot), Bu(t))$, состоящая из начального состояния (2) и неоднородности $Bu(t)$, $t\geq 0$, называется допустимой, если система (1), (2) имеет хотя бы одно решение $x(t)$, $t\geq 0$. Если для каждой допустимой пары система (1) имеет единственное решение, то она является совместной. Доказано [3], что система (1) совместна тогда и только тогда, когда тройка матриц (A_0, A, A_1) является регулярной, т. е. существует число $\lambda^*\in\mathbf{C}$ такое, что матрица $\Omega(\lambda^*)=\lambda^*A_0+A+A_1\exp(-\lambda^*h)$ является невырожденной.

В данной работе для совместной системы (1) предлагается алгоритм, особенно удобный при использовании ЭВМ, построения матрицы $(pA_0-A-A_1\exp(-ph))^{-1}$, которая является одним из сомножителей, входящих в передаточную матрицу

$$G(p)=C(pA_0-A-A_1\exp(-ph))^{-1}\,B \tag{3}$$

системы (1) — (3). Как известно, передаточные матрицы широко применяются в теории автоматического регулирования [4] и являются одним из основных инструментов анализа системы (1) — (3) на устойчивость.

Для вычисления матрицы $(pA_0-A-A_1\exp(-ph))^{-1}$ поступаем следующим образом. Произвольно выберем число $\lambda^*\in\mathbf{C}$, но так, чтобы det $\Omega(\lambda^*)\neq 0$ (это всегда можно сделать, ибо квазиполином det $\Omega(\lambda)$ является ненулевым и его корни образуют множество меры нуль). Тогда

$$\begin{aligned}(pA_0-A-A_1\exp(-ph))^{-1}&=[(p+\lambda^*)A_0-(\lambda^*A_0+A+A_1\exp(-\lambda^*h))+\\&+(\exp(-\lambda^*h)-\exp(-ph))A_1]^{-1}=[(p+\lambda^*)\,\hat{A}_0-I+(\exp(-\lambda^*h)-\\&-\exp(-ph)\,\hat{A}_1]^{-1}\,\Omega^{-1}(\lambda^*),\end{aligned} \tag{5}$$

где $\hat{A}_0 = \Omega^{-1}(\lambda^*)A_0$, $\hat{A}_1 = \Omega^{-1}(\lambda^*)A_1$, а I — единичная $n\times n$-матрица. Так как матрица $\Omega(\lambda^*)$ является постоянной, то с точки зрения вычислений нахождение матрицы $\Omega^{-1}(\lambda^*)$ не представляет проблем. Для вычисления же матрицы

$$[(p+\lambda^*)\hat{A}_0 - I + (\exp(-\lambda^* h) - \exp(-ph))\hat{A}_1]^{-1} \qquad (6)$$

воспользуемся методом Фадеева [5]. Введем обозначения:

$$\mu = p+\lambda^*,\ \eta = \exp(-\lambda^* h) - \exp(-ph). \qquad (7)$$

Тогда, следуя [6], матрица (6) может быть записана в виде

$$[(p+\lambda^*)\hat{A}_0 - I + (\exp(-\lambda^* h) - \exp(-ph))\hat{A}_1]^{-1} = [\mu\hat{A}_0 - I + \eta\hat{A}_1]^{-1} =$$

$$= -\mu^{-1}[\mu^{-1}I - (\hat{A}_0 + \mu^{-1}\eta\hat{A}_1)]^{-1} = \qquad (8)$$

$$= -\frac{B_{n-1} + \sum\limits_{i=0}^{n-2}\sum\limits_{j=1}^{n-i} B_{ij}\mu^{n-i-j}\eta^{j-1}}{1 + \sum\limits_{\alpha=0}^{n-1}\sum\limits_{\beta=1}^{n+1-\alpha} a_{\alpha\beta}\mu^{n+1-\alpha-\beta}\eta^{\beta-1}},$$

где $n\times n$-матрицы B_{n-1}, B_{ij} и числа $a_{\alpha\beta}$ вычисляются рекуррентным образом по матрицам $\hat{A}_0$, $\hat{A}_1$:

$$B_{n-1} = I,$$

$$\begin{cases} a_{n-1,1} = -\mathrm{Sp}(\hat{A}_0 B_{n-1}), \\ a_{n-1,2} = -\mathrm{Sp}(\hat{A}_1 B_{n-1}), \end{cases} \qquad \begin{cases} B_{n-2,1} = a_{n-1,1}I + \hat{A}_0 B_{n-1}, \\ B_{n-2,2} = a_{n-1,2}I + \hat{A}_1 B_{n-1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{i1} = -\dfrac{1}{(n-i)}\mathrm{Sp}(\hat{A}_0 B_{i1}), \\ a_{i2} = -\dfrac{1}{(n-i)}\mathrm{Sp}(\hat{A}_0 B_{i,2} + \hat{A}_1 B_{i1}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{ij} = -\dfrac{1}{(n-i)}\mathrm{Sp}(\hat{A}_0 B_{ij} + \hat{A}_1 B_{i,\,j-1}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i,n+1-i} = -\dfrac{1}{(n-i)}Sp(\hat{A}_1 B_{i,n-i}), \end{cases} \qquad \begin{cases} B_{i-1,1} = a_{i1}I + \hat{A}_0 B_{i1}, \\ B_{i-1,2} = a_{i2}I + \hat{A}_0 B_{i2} + \hat{A}_1 B_{i1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_{i-1,j} = a_{ij}I + \hat{A}_0 B_{ij} + \hat{A}_1 B_{i,j-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_{i-1,n+1-i} = a_{i,n+1-i}I + \hat{A}_1 B_{i,n-i}, \end{cases} \qquad (9)$$

$$i = \overline{n-2,1},\ j = \overline{2,n-i},$$

$$\begin{cases} a_{01} = -\dfrac{1}{n}\mathrm{Sp}(\hat{A}_0 B_{01}), \\ a_{02} = -\dfrac{1}{n}\mathrm{Sp}(\hat{A}_0 B_{02} + \hat{A}_1 B_{01}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{0n} = -\dfrac{1}{n}\mathrm{Sp}(\hat{A}_0 B_{0n} + \hat{A}_1 B_{0,n-1}), \\ a_{0,n+1} = -\dfrac{1}{n}\mathrm{Sp}(\hat{A}_1 B_{0n}). \end{cases}$$

Таким образом, на основании соотношений (5) — (9) получаем следующий результат:

$$(pA_0-A-A_1\exp(-ph))^{-1}= = -\frac{\hat{B}_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-i}\hat{B}_{ij}\mu^{n-i-j}\eta^{j-1}}{1+\sum_{\alpha=0}^{n-1}\sum_{\beta=1}^{n+1-\alpha}a_{\alpha\beta}\mu^{n+1-\alpha-\beta}\eta^{\beta-1}}, \qquad (10)$$

где $\hat{B}_{n-1} = B_{n-1}\Omega^{-1}(\lambda^*)$, $\hat{B}_{ij} = B_{ij}\Omega^{-1}(\lambda^*)$,
$i=\overline{0, n-2}$, $j=\overline{1, n-i}$.

Отметим, наконец, что формула (10) не зависит от выбора числа $\lambda^*\in\mathbf{C}$.

П р и м е р. Рассмотрим систему (1) при условии, что

$$A_0=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{bmatrix},\qquad A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\qquad A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Ясно, что дескрипторная система (1), (11) является совместной. Положим $\lambda^*=0$. Тогда

$$\Omega^{-1}(\lambda^*)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\qquad \hat{A}_0=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix},\qquad \hat{A}_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Согласно рекуррентным формулам (9) имеем:

$$B_1=I;$$

$a_{11}=-3$, $a_{12}=0$,

$a_{01}=0$, $a_{02}=2$, $a_{03}=0$; $\qquad B_{01}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -1 & -2\end{bmatrix}$, $\qquad B_{02}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

Так как $\hat{B}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, $\qquad \hat{B}_{01}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$, $\qquad \hat{B}_{02}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,

то на основании (10) окончательно получаем

$$(pA_0-A-\exp(-ph)A_1)^{-1}=-\frac{\hat{B}_1+(\hat{B}_{01}\mu+\hat{B}_{02}\eta)}{1+a_{11}\mu+a_{12}\eta+a_{01}\mu^2+a_{02}\mu\eta+a_{03}\eta^2}=$$

$$=\frac{1}{2p\exp(-ph)+p-1}\begin{bmatrix}-2p & p+1\\ -2p+1 & p-\exp(-ph)\end{bmatrix}.$$

Аналогичный результат, конечно, можно получить, используя прямую формулу [5]:

$$(pA_0-A-\exp(-ph)A_1)^{-1}=\frac{adj(pA_0-A-\exp(-ph)A_1)}{\det(pA_0-A-\exp(-ph)A_1)}.$$

1. Г а б а с о в Р., К и р и л л о в а Ф. М., А с м ы к о в и ч И. К. Дескрипторные системы управления /Ин-т математики АН БССР. Мн., 1988.
2. К р а х о т к о В. В., Р а з м ы с л о в и ч Г. П. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 1988. № 2. С. 76.
3. Р а з м ы с л о в и ч Г. П. // Материалы VI конф. математиков Беларуси. Гродно, 1992.
4. Р е з в а н В. Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. М., 1983.
5. Г а н т м а х е р Ф. Р. Теория матриц. М., 1988.
6. R o s e n b r o c k H. H. State Space and Multivariable Theory. New York, 1970.

Поступила в редакцию 04.05.95.