центральным A-главным фактором. Пусть для определенности фактор $N_1/\{0\}$ β-централен. Тогда в силу теоремы 12.12 из [1] $N_1 \subseteq H$, и, следовательно, $T=H$. Теорема доказана.

Заметим, что в классе конечных групп с $\pi(\beta)$-разрешимыми β-корадикалами условие «класс β регулярен в классе Δ» выполняется автоматически. Поэтому в этом случае из теорем 1,2 вытекают результаты работы [4]. Более того, из теоремы 1 вытекает следующее утверждение:

Следствие 2. Пусть β — локальная формация конечных групп, μ — непустой класс групп из β, β-корадикал A^β конечной группы $A\pi(\beta)$-разрешим. Тогда для любой β-профраттиниевой подгруппы T в A найдутся такие β-нормализатор H и μ-профраттиниева подгруппа F, что $T=H+F$.

1. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.
2. Doerk K. Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York, 1992.
3. Гойко В. И. // Вопросы алгебры. Мн., 1986. Вып. 2. С. 120.
4. Гойко В. И. // XXVIII Всесоюзная алгебраическая конференция: Тез. докл. Кишинев, 1985.

Поступила в редакцию 29.03.95.

УДК 519.1

Н. Е. ЕФИМЧИК, Д. П. ПОДКОПАЕВ

О ЯДРЕ И РАДИУСЕ УСТОЙЧИВОСТИ В ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧЕ ВЕКТОРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Multicryterion problem on the system of subsets of the finite set has been considered. Strongly, weakly and properly efficient trajectories are the solutions of this problem. Vector objective function of the problem consists of MINSUM, MINMAX and MINMIN criteria. The sets of solutions witch save the property of efficiency under «small» perturbations of the problem's parameters have been investigated.

В статье рассматриваются многокритериальные траекторные задачи (задачи на системах подмножеств), в схему которых в однокритериальном случае вкладываются многие широко известные задачи оптимизации на графах, а также задачи булевого программирования (см, например, [1—3]). Исследуется устойчивость свойства эффективности траекторий многокритериальной задачи к «малым» возмущениям параметров векторной целевой функции, состоящей из критериев вида MINSUM, MINMAX и MINMIN. Найдена оценка снизу для радиуса устойчивости и выявлены случаи, когда эта оценка достижима. Ранее подобные исследования проводились для однокритериальных траекторных задач [1,2].

Пусть $E=\{e_1,..., e_m\}$, T — совокупность непустых подмножеств множества E, называемых траекториями, $A=\|a_{sk}\|_{r\times m}$, $a_{sk}\in \mathbf{R}$, $r\geq 2$. Обозначим $N_q=\{1, 2, ..., q\}$. На множестве E зададим векторную весовую функцию $a(e)=a_1((e),..., a_r(e))$, $a_s(e_k)=a_{sk}$ $\forall s\in N_r$, $k\in N_m$, а на системе подмножеств T — векторную целевую функцию (ВЦФ) $F(t, A)=(F_1(t, A), .., F_r(t, A))$, состоящую из критериев трех видов:

$$\text{MINSUM} \qquad F_s(t, A) = \sum_{e\in t} a_s(e) \to \min_T,$$

$$\text{MINMAX} \qquad F_s(t, A) = \max_{e\in t} a_s(e) \to \min_T,$$

$$\text{MINMIN} \qquad F_s(t, A) = \min_{e\in t} a_s(e) \to \min_T.$$

Будем в дальнейшем предполагать, что ВЦФ $F(t, A)$ может представлять собой произвольную комбинацию этих критериев.

Через I_{SUM}, I_{MAX} и I_{MIN} обозначим множества тех чисел из N_r, которыми занумерованы критерии MINSUM, MINMAX и MINMIN соответственно.

Говоря об r-критериальной задаче, обычно подразумевают задачу нахождения некоторого множества эффективных траекторий (альтернатив).

Приведем традиционные (см. [4,5]) определения эффективных решений многокритериальной задачи. Траектория $\tilde{t} \in T$ называется собственно эффективной (или, иначе, парето-оптимальной), если ее не доминирует никакая другая траектория из T, т. е. не существует траектории $t \in T$ такой, что $F(\tilde{t}, A) \geq F(t, A)$, $F(\tilde{t}, A) \neq F(t, A)$. Траектория $\tilde{t} \in T$ называется сильно эффективной (слабо эффективной), если не существует траектории $t \in T$ такой, что $F(\tilde{t}, A) \geq F(t, A)$ $(F(\tilde{t}, A) > F(t, A))$.

Если предположить, что множества E, T, I_{SUM}, I_{MAX}, I_{MIN} фиксированы, то матрица $A \in \mathbf{R}^{rm}$ может служить для индексации множеств сильно эффективных, собственно эффективных и слабо эффективных траекторий, которые будем обозначать соответственно через $Q_1(A)$, $Q_2(A)$ и $Q_3(A)$. Очевидно, что $Q_1(A) \subseteq Q_2(A) \subseteq Q_3(A) \forall A \in \mathbf{R}^{rm}$.

В пространстве $\mathbf{R}^{rm}$ зададим чебышевскую метрику, т. е. под нормой матрицы $B = \|b_{sk}\| \in \mathbf{R}^{rm}$ будем понимать число $\|B\| = \max\{|b_{sk}| : s \in N_r, k \in N_m\}$. Очевидно, что для любой траектории $t \in T$ и любого индекса $s \in N_r$ частный критерий $F_s(t, A)$ является функцией, непрерывной на множестве матриц $\mathbf{R}^{rm}$.

Пусть $\mathrm{B}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{rm} : \|B\| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Траекторию $\tilde{t} \in Q_i(A)$ назовем устойчивой, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что $\tilde{t} \in Q_i(A + B) \forall B \in \mathrm{B}(\varepsilon)$. Множество всех устойчивых траекторий, содержащихся в $Q_i(A)$, будем называть ядром устойчивости множества $Q_i(A)$ и обозначать через $J_i(A)$.

В дальнейшем будем использовать обозначение $\tau_s^A(t_1, t_2) = F_s(t_1, A) - F_s(t_2, A)$.

Теорема 1. $J_i(A) \supseteq Q_1(A) \forall A \in \mathbf{R}^{rm}$, $i \in N_3$. Причем

$J_1(A) = Q_1(A)$;

$J_1(A) = J_2(A)$, если $I_{\text{SUM}} \neq \varnothing$;

$J_1(A) = J_2(A) = J_3(A)$, если $I_{\text{SUM}} = N_r$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношения $J_1(A) = Q_1(A)$, $J_2(A) \supseteq Q_1(A)$ и $J_3(A) \supseteq Q_1(A)$ вытекают из непрерывности функции $F_s(t, A)$ на множестве $\mathbf{R}^{rm}$ и того факта, что для любой сильно эффективной траектории $\tilde{t}$ и любой траектории $t \in T$, $t \neq \tilde{t}$ существует такой индекс $s \in N_r$, что $\tau_s^A(\tilde{t}, t) < 0$.

Докажем, что в случае $I_{\text{SUM}} \neq \varnothing$ выполняется равенство $J_1(A) = J_2(A)$, т. е. с учетом уже доказанных соотношений, $J_2(A) \subseteq Q_1(A)$. Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что любая собственно эффективная траектория, не принадлежащая множеству $Q_1(A)$, не является устойчивой.

Пусть $I_{\text{SUM}} \neq \varnothing$, $\tilde{t} \in Q_2(A)$, $\tilde{t} \notin Q_1(A)$. Тогда существует такая траектория $t_0 \in T$, $t_0 \neq \tilde{t}$, что $F(t_0, A) = F(\tilde{t}, A)$. Легко видеть, что для любого числа $\varepsilon > 0$ и матрицы $B \in \mathrm{B}(\varepsilon)$ с элементами

$$b_{sk} = \begin{cases} -\varepsilon / 2, s \in I_{\text{SUM}}, e_k \in t_0 \setminus \tilde{t}, \\ \varepsilon / 2, s \in I_{\text{SUM}}, e_k \in \tilde{t} \setminus t_0, \\ 0 \text{ для остальных } (s, k) \end{cases}$$

выполняются соотношения

$$\tau_s^{A+B}(t_0, \tilde{t}) = 0 \forall s \in I_{\text{MAX}} \cup I_{\text{MIN}},$$
$$\tau_s^{A+B}(t_0, \tilde{t}) < 0 \forall s \in I_{\text{SUM}},$$

т. е. $\tilde{t} \notin Q_2(A + B)$. Следовательно, траектория $\tilde{t} \in Q_2(A)$ не является устойчивой.

И, наконец, докажем равенство $J_1(A)=J_3(A)$ для случая $I_{\text{SUM}}=N_r$. Для этого достаточно показать, что $J_3(A) \subseteq Q_1(A)$, т. е. любая слабо эффективная траектория, не принадлежащая множеству $Q_1(A)$, не является устойчивой.

Пусть $I_{\text{SUM}}=N_r$, $\tilde{t} \in Q_3(A), \tilde{t} \notin Q_1(A)$. Тогда существует такая траектория $t_0 \in T, t_0 \neq \tilde{t}$, что $F(t_0, A) \leq F(\tilde{t}, A)$. Поэтому для любого числа $\varepsilon>0$ и матрицы $B \in \mathrm{B}(\varepsilon)$ с элементами

$$b_{sk} = \begin{cases} -\varepsilon / 2, e_k \in t_0 \setminus \tilde{t}, s \in N_r, \\ \varepsilon / 2, e_k \in \tilde{t} \setminus t_0, s \in N_r \end{cases}$$

выполняется неравенство $F(t_0, A + B) < F(\tilde{t}, A + B)$, т. е. $\tilde{t} \notin Q_3(A + B)$. Следовательно, траектория $\tilde{t} \in Q_3(A)$ не является устойчивой. Теорема доказана.

Замечание 1. В силу эквивалентности любых двух норм в конечномерном линейном пространстве (см. [6]) теорема 1 справедлива и для других норм в пространстве матриц $\mathbf{R}^{rm}$.

Пусть $\varepsilon>0$. Ядром ε-устойчивости множества $Q_i(A)$, $i \in N_3$ будем называть множество $J_i^{\varepsilon}(A) = \{t \in Q_i(A) : t \in Q_i(A + B) \forall B \in \mathrm{B}(\varepsilon)\}$.

Для любого индекса $s \in N_r$ введем обозначение $\rho_s^A(t_1, t_2) =$

$$= \begin{cases} \sup\{\varepsilon > 0 : \tau_s^{A+B}(t_1, t_2) < 0 \forall B \in \mathrm{B}(\varepsilon)\}, \text{если } \tau_s^A(t_1, t_2) < 0, \\ 0, \text{если } \tau_s^A(t_1, t_2) \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $\Delta(t_1, t_2)=|t_1|+|t_2|-2|t_1 \cap t_2|$,

$$\Gamma_s^A(t_1, t_2) = \begin{cases} \dfrac{\tau_s^A(t_2, t_1)}{2}, s \in I_{\text{MAX}} \cup I_{\text{MIN}}, \\ \dfrac{\tau_s^A(t_2, t_1)}{\Delta(t_1, t_2)}, s \in I_{\text{SUM}}. \end{cases}$$

Лемма. $\rho_s^A(t_1, t_2) = \begin{cases} \Gamma_s^A(t_1, t_2), \text{если } \tau_s^A(t_1, t_2) < 0, \\ 0, \qquad \text{если } \tau_s^A(t_1, t_2) \geq 0. \end{cases}$

Доказательство. Если $\tau_s^A(t_1, t_2) \geq 0$, то $\rho_s^A(t_1, t_2) = 0$ по определению.

Пусть $\tau_s^A(t_1, t_2) < 0$, $\gamma = \Gamma_s^A(t_1, t_2) > 0$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $s \in I_{\text{MAX}} \cup I_{\text{MIN}}$. Пусть $q=\operatorname{argmax}\{a_{sk}: e_k \in t_2\}$. Тогда $a_{sq}-a_{sk} \geq$ $\geq 2\Gamma_s^A(t_1, t_2) \forall e_k \in t_1$ и для любой матрицы $B \in \mathrm{B}(\gamma)$ выполняются неравенства $a_{sq}+b_{sq}-(a_{sk}+b_{sk})>0 \forall e_k \in t_1$.

Значит, $\tau_s^{A+B} - (t_1, t_2) < 0 \forall B \in \mathrm{B}(\gamma)$ и $\rho_s^A(t_1, t_2) \geq \gamma$.

Если положить $b_{sk} = \begin{cases} \gamma, e_k \in t_1, \\ -\gamma, e_k \in E \setminus t_1, \end{cases}$

то $\|B\|=\gamma$ и $\tau_s^{A+B}(t_1, t_2) = 0$. Поэтому $\rho_s^A(t_1, t_2) \leq \gamma$.

Случай 2. $s \in I_{\text{SUM}}$. Для любой возмущающей матрицы $B \in \mathrm{B}(\gamma)$ получаем $\tau_s^{A+B}(t_1, t_2) \leq \tau_s^A(t_1, t_2) + \Delta(t_1, t_2) \max\{|b_{sk}| : k \in N_m\} \leq \tau_s^A(t_1, t_2) +$ $+\Delta(t_1, t_2)\|B\| < 0$. Следовательно, $\rho_s^A(t_1, t_2) \geq \gamma$.

Если $\delta > \gamma$ и $b_{sk} = \begin{cases} \delta, e_k \in t_1, \\ -\delta, e_k \in E \setminus t_1, \end{cases}$

то $\tau_s^{A+B}(t_1, t_2) = \tau_s^A(t_1, t_2) + \Delta(t_1, t_2)\delta > 0$. Поэтому $\rho_s^A(t_1, t_2) \le \gamma$. Лемма доказана.

Теорема 2. Для того, чтобы траектория t_0 принадлежала ядру ε-устойчивости $J_i^\varepsilon(A)$, достаточно, а в случае выполнения одного из условий

1. $i=1$,
2. $i=2$, $I_{\mathrm{SUM}} \ne \varnothing$,
3. $i=3$, $I_{\mathrm{SUM}} = N_r$

и необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$\max\left\{\rho_s^A(t_0, t): s \in N_r\right\} \ge \varepsilon \forall t \in T, t \ne t_0. \tag{1}$$

Доказательство. *Достаточность.* При выполнении условий теоремы для любой траектории $t \in T$, $t \ne t_0$ существует индекс $s \in N_r$ такой, что $\rho_s^A(t_0, t) \ge \varepsilon$. Поэтому $\tau_s^{A+B}(t_0, t) < 0 \forall B \in \mathrm{B}(\varepsilon)$ т. е. $t_0 \in Q_i(A + B) \forall B \in \mathrm{B}(\varepsilon)$. Следовательно, $t_0 \in J_i^\varepsilon(A)$.

Необходимость. Пусть при $t=t'$, $t' \ne t_0$ неравенство (1) не выполняется. Тогда $\rho_s^A(t_0, t') < \varepsilon \forall s \in N_r$. Из доказательства леммы вытекает, что существует матрица $B \in \mathrm{B}(\varepsilon)$, для которой справедливы соотношения

$$\tau_s^{A+B}(t_0, t') = 0 \forall s \in I_{\mathrm{MAX}} \cup I_{\mathrm{MIN}},$$

$$\tau_s^{A+B}(t_0, t') > 0 \forall s \in I_{\mathrm{SUM}}.$$

Отсюда имеем $t_0 \notin J_1^\varepsilon(A)$; $t_0 \notin J_2^\varepsilon(A)$ при $I_{\mathrm{SUM}} \ne \varnothing$; $t_0 \notin J_3^\varepsilon(A)$ при $I_{\mathrm{SUM}} = N_r$. Теорема доказана.

Радиусом устойчивости множества $Q_i(A)$, $i \in N_3$ назовем число

$$\rho_i(A) = \sup\{\varepsilon > 0: J_i^\varepsilon(A) \ne \varnothing\}.$$

Введем обозначение

$$\Phi_i(A) = \max_{t_1 \in Q_i(A)} \min_{t_2 \in T \setminus \{t_1\}} \max_{s \in N_r} \rho_s^A(t_1, t_2).$$

Легко видеть, что соотношения (1) эквивалентны неравенству

$$\min_{t \in T \setminus \{t_0\}} \max_{s \in N_r} \rho_s^A(t_0, t) \ge \varepsilon.$$

Поэтому из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. $\rho_i(A) \ge \Phi_i(A) \forall A \in \mathbf{R}^{m}$, $i \in N_3$. Причем

$\rho_1(A) = \Phi_1(A)$;
$\rho_2(A) = \Phi_2(A)$, если $I_{\mathrm{SUM}} \ne \varnothing$;
$\rho_3(A) = \Phi_3(A)$, если $I_{\mathrm{SUM}} = N_r$.

Замечание 2. Из леммы вытекает, что в соотношениях (1) и формуле $\Phi_i(A)$ можно заменить $\rho_s^A(t_1, t_2)$ на $\Gamma_s^A(t_1, t_2)$. Величина $\Gamma_s^A(t_1, t_2)$, в отличие от $\rho_s^A(t_1, t_2)$, легко вычисляется и позволяет использовать теоремы 2 и 3 на практике.

Работа финансировалась Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь и Международной соровской программой образования в области точных наук (для второго автора).

1. Леонтьев В. К., Гордеев Э. Н. Качественное исследование траекторных задач // Кибернетика. 1986. № 5. С. 82.
2. Гордеев Э. Н. Об устойчивости задач на узкие места // ЖВМ и МФ. 1993. Т. 33. № 9. С. 1391.
3. Емеличев В. А., Кравцов М. К. О полноте многокритериальных задач на системах подмножеств // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38. № 3. С. 25.

4. П о д и н о в с к и й В. В., Н о г и н В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.
5. Д у б о в Ю. А., Т р а в к и н С. И., Я к и м е ц В. Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М., 1986.
6. К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972.

Поступила в редакцию 12.01.95.

УДК 62-50

Г. П. РАЗМЫСЛОВИЧ

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

For descriptor systems with delay in state, i. e. for systems of the form $A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t)$, the problem of computing the transfer matrix has been solved. The final expression is suitable for computer use.

Рассмотрим не разрешенную относительно производной систему управления вида:

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t),\ t \geq 0, \tag{1}$$

$$x_0(\cdot) = \{x(t) = \varphi(t),\ -h \leq t < 0,\ x(0) = x_0\}, \tag{2}$$

с выходом $y(t)=Cx(t)$, $t\geq 0$, где $x\in R^n$, $u\in R^m$, $y\in R^l$; A_0, A, A_1, B, C — заданные матрицы соответствующих размерностей; $h(h>0)$ — запаздывание; $\varphi(t)$— кусочно-непрерывная n-вектор функция; x_0-заданный n-вектор.

Если матрица A_0 является сингулярной, т. е. det $A_0=0$, то система (1) называется дескрипторной или сингулярной. Системы такого типа возникают во многих технических областях, как, например, теория электрических цепей, теория сингулярно возмущенных систем, композитных систем и т. д. Наиболее полная библиография по таким системам содержится в работе [1].

Согласно [2, 3], пара $(x_0(\cdot), Bu(t))$, состоящая из начального состояния (2) и неоднородности $Bu(t)$, $t\geq 0$, называется допустимой, если система (1), (2) имеет хотя бы одно решение $x(t)$, $t\geq 0$. Если для каждой допустимой пары система (1) имеет единственное решение, то она является совместной. Доказано [3], что система (1) совместна тогда и только тогда, когда тройка матриц (A_0, A, A_1) является регулярной, т. е. существует число $\lambda^*\in\mathbf{C}$ такое, что матрица $\Omega(\lambda^*)=\lambda^*A_0+A+A_1\exp(-\lambda^*h)$ является невырожденной.

В данной работе для совместной системы (1) предлагается алгоритм, особенно удобный при использовании ЭВМ, построения матрицы $(pA_0-A-A_1\exp(-ph))^{-1}$, которая является одним из сомножителей, входящих в передаточную матрицу

$$G(p)=C(pA_0-A-A_1\exp(-ph))^{-1}\ B \tag{3}$$

системы (1) — (3). Как известно, передаточные матрицы широко применяются в теории автоматического регулирования [4] и являются одним из основных инструментов анализа системы (1) — (3) на устойчивость.

Для вычисления матрицы $(pA_0-A-\mathrm{A}_1\exp(-ph))^{-1}$ поступаем следующим образом. Произвольно выберем число $\lambda^*\in\mathbf{C}$, но так, чтобы det $\Omega(\lambda^*)\neq 0$ (это всегда можно сделать, ибо квазиполином det $\Omega(\lambda)$ является ненулевым и его корни образуют множество меры нуль). Тогда

$$\begin{gathered}(pA_0-A-\mathrm{A}_1\exp(-ph))^{-1}=[(p+\lambda^*)A_0-(\lambda^*A_0+A+A_1\exp(-\lambda^*h))+\\ +(\exp(-\lambda^*h)-\exp(-ph))A_1]^{-1}=[(p+\lambda^*)\,\hat{A}_0-I+(\exp(-\lambda^*h)-\\ -\exp(-ph)\,\hat{A}_1]^{-1}\,\Omega^{-1}(\lambda^*),\end{gathered} \tag{5}$$