УДК 512.572

С. П. НОВИКОВ

# СВЯЗЬ β-ПРОФРАТТИНИЕВЫХ ПОДАЛГЕБР С β-НОРМАЛИЗАТОРАМИ МУЛЬТИКОЛЕЦ

A correspondence between β-prefrattini subalgebras and β-normalizers of finite multirings is established in this paper.

В [1] определяются β-профраттиниевы подалгебры мультиколец как пересечения некоторого множества максимальных подалгебр, вводится определение β-нормализаторов мультиколец, обобщающее понятие системных нормализаторов Холла в конечных разрешимых группах. Кроме того, устанавливается, что при определенных условиях каждая β-профраттиниева подалгебра содержит некоторый β-нормализатор и, наоборот, любой β-нормализатор содержится в некоторой β-профраттиниевой подалгебре мультикольца. В настоящей работе доказывается, что между β-нормализаторами и β-профраттиниевыми подалгебрами существует более тесная связь. Определения и обозначения взяты из работы [1].

**Лемма 1.** Пусть β — некоторая формация мультиколец, $A$ — произвольное мультикольцо с главным рядом и разрешимым β-корадикалом, $H/K$ — β-эксцентральный $A$-главный фактор. Тогда фактор $H/K$ $A$-абелев.

Доказательство. Допустим, что фактор $H/K$ не $A$-абелев, и пусть фактор $D/P$ главного ряда мультикольца $A$, проходящего через $C_A(H/K)$, проективен $H/K$. Если $D\subseteq C_A(H/K)=C_A(D/P)$, то $H/K$ $A$-абелев. Поэтому будем считать, что $P=C_A(H/K)$. Пусть фактор $T/M$ $A$-главного ряда, проходящего через $A^\beta$, проективен $D/P$. Если $T\subseteq A^\beta$, то факторы $T/M$ и $H/K$ $A$-абелевы. Поэтому будем полагать, что $M\supseteq A^\beta$, Следовательно, $A/M\in\beta$ и $A/P=A/C_A(T/M)\cong (A/M)/(C_A(T/M)/M)\in\beta$. Ввиду леммы 3.32 из [1] заключаем, что $D/P\lambda A/C_A(D/P)\in\beta$. Поэтому $H/K\lambda A/C_A(H/K)\cong$ $\cong(D/P)\lambda A/C_A(D/P)\in B$. Получаем противоречие с β-эксцентральностью фактора $H/K$. Лемма доказана.

Нетрудно установить (см, например, лемму A.3.7 из [2]), что если ненулевая подалгебра $H$ конечного мультикольца $A$ покрывает или изолирует любой фактор некоторого $A$-главного ряда, то ее порядок равен произведению порядков покрываемых ею факторов этого ряда. Ясно также, что справедлива

**Лемма 2.** Пусть $\omega_1$ и $\omega_2$ — два таких непустых подмножества факторов некоторого главного ряда мультикольца $A$, что $\omega_1\cap\omega_2=\varnothing$ и $\omega_1\cup\omega_2$ — множество всех факторов этого ряда. Тогда, если подалгебра $L$ конечного мультикольца $A$ изолирует любой фактор из $\omega_1$, то $|L|\leq d$, где $d$ — произведение порядков факторов из $\omega_2$.

**Теорема 1.** Пусть Δ — наследственная формация конечных мультиколец, β — непустая насыщенная в Δ формация мультиколец из Δ, класс Δ регулярен в β, μ — непустой класс мультиколец из β, $A\in\Delta$. Тогда для любой β-профраттиниевой подалгебры $T$ мультикольца $A$ найдутся такие β-нормализатор $H$ и μ-профраттиниева подалгебра $F$, что $T=H+F$.

Доказательство. Ясно, что в $A$ найдется такая μ-профраттиниева подалгебра $F$, что $F\subseteq T$. Ввиду теоремы 13.8 из [1] найдется β-нормализатор $H$ мультикольца $A$, содержащийся в $T$. Тогда $F+H\subseteq T$. Для некоторого фиксированного главного ряда мультикольца $A$ введем следующие обозначения:

$\omega_1$ — множество нефраттиниевых $A$-абелевых факторов этого ряда, которые μ-эксцентральны и β-эксцентральны;

$\omega_2$ — множество тех факторов ряда, которые μ-эксцентральны, β-эксцентральны и не входят в $\omega_1$;

$\omega_3$ — множество нефраттиниевых $A$-абелевых факторов данного ряда, которые $\mu$-эксцентральны и $\beta$-центральны;

$\omega_4$ — множество $\beta$-центральных факторов, не входящих в $\omega_3$;

$d_i$ — произведение порядков факторов из $\omega_i$ ($i$=1,2,3,4).

Заметим, что $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\cup_{i=1}^{4} \omega_i$ совпадает со множеством всех $A$-главных факторов. Поскольку все факторы из $\omega_1$, $\omega_3$ в силу теоремы 13.4 из [1] изолируются подалгеброй $F$, а все факторы из $\omega_1$, $\omega_2$ по теореме 12.12 из [1] изолируются подалгеброй $H$, то $H \cap F$ изолирует все факторы из $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$. Ввиду леммы 2 $|H \cap F| \leq d_4$. Поэтому $|H+F| = (|H| \cdot |F| : |H \cap F| \leq (d_2 d_3 d_3 d_4) : d_4 = d_2 d_3 d_4 = |T|$. Поэтому $T=H+F$. Теорема доказана.

В случае, когда $\beta$ — класс нулевых мультиколец, $\beta$-профраттиниеву подалгебру естественно называть профраттиниевой подалгеброй. Тогда из теоремы 1 вытекает

*Следствие 1.* Пусть $\Delta$ — наследственная формация конечных мультиколец, $\beta$ — непустая насыщенная в $\Delta$ формация мультиколец из $\Delta$, класс $\Delta$ регулярен в $\beta$, $A \in \Delta$. Тогда для любой $\beta$-профраттиниевой подалгебры $T$ мультикольца $A$ найдутся такие $\beta$-нормализатор $H$ и профраттиниева подалгебра $F$, что $T=H+F$.

Нетрудно показать (см., например, [3]), что существуют мультикольца, в которых $\beta$-нормализаторы и $\beta$-профраттиниевы подалгебры составляют различные классы подалгебр. Ясно также, что существуют мультикольца, в которых классы $\beta$-нормализаторов и $\beta$-профраттиниевых подалгебр совпадают. Как показывает следующий результат, класс мультиколец с таким свойством образует формацию.

**Теорема 2**. Пусть $\Delta$ — наследственная формация конечных мультиколец, $\beta$ — непустая насыщенная в $\Delta$ формация мультиколец из $\Delta$, класс $\Delta$ регулярен в классе $\beta$. Тогда класс $\mu$ тех мультиколец из $\Delta$ с разрешимыми $\beta$-корадикалами, у которых каждая $\beta$-профраттиниева подалгебра есть $\beta$-нормализатор, является формацией.

Доказательство. Пусть $A \in \mu$, $N$ — идеал в $A$, $T$ — $\beta$-профраттиниева подалгебра в $A$. Тогда $T$ — $\beta$-нормализатор в $A$. В силу теорем 13.4 и 12.5 из [1] $T+N/N$ является $\beta$-профраттиниевой подалгеброй и $\beta$-нормализатором в $A/N$. Поэтому $A/N \in \mu$. Пусть теперь $A \in \Delta$, $N_1$ и $N_2$ — идеалы в $A$, $A/N_1 \in \mu$, $A/N_2 \in \mu$, $N_1 \cap N_2 = \{0\}$. В силу соображений индукции можно считать, что $N_1$ и $N_2$ — минимальные идеалы в $A$. Пусть $T$ — $\beta$-профраттиниева подалгебра в $A$, $H$ — $\beta$-нормализатор в $A$, содержащийся в $T$. Тогда $H+N_1/N_1 \subseteq T+N_1/N_1$ и так как $A/N_1 \in \mu$, то $T+N_1 = H+N_1$. Рассмотрим теперь два возможных случая:

1. $N_1/\{0\}$ — нефраттиниевый главный фактор в $A$. Если $N_1/\{0\}$ $\beta$-централен, то ввиду теоремы 13.4 из [1] $N_1 \subseteq T$, а ввиду теоремы 12.12 из [1] $N_1 \subseteq H$. Поэтому $H=T$, т. е. $A \in \mu$.

Пусть теперь $N_1/\{0\}$ является $\beta$-эксцентральным главным фактором в $A$. Тогда по лемме 1 фактор $N_1/\{0\}$ $A$-абелев. Поэтому в силу теоремы 13.4 из [1] $T \cap N_1 = \{0\}$, а по теореме 12.12 из [1] $H \cap N_1 = \{0\}$. Поэтому $T \cong T/T \cap N_1 \cong T+N_1/N_1 = H+N_1/N_1 \cong H/H \cap N_1 \cong H$. Следовательно, $T=H$ и $A \in \mu$.

2. $N_1/\{0\}$ — фраттиниевый $A$-главный фактор. Если $N_2/\{0\}$ — нефраттиниевый фактор в $A$, то, рассуждая аналогично пункту 1, можно показать, что $A \in \mu$. Поэтому будем считать, что $N_2/\{0\}$ — фраттиниевый $A$-главный фактор. Предположим, что $N_1/\{0\}$ и $N_2/\{0\}$ — $\beta$-эксцентральные $A$-главные факторы. Тогда согласно теореме 12.12 из [1] $H$ изолирует $N_1/\{0\}$ и $N_1+N_2/N_1$ (ясно, что ввиду проективности факторов $N_2/\{0\}$ и $N_1+N_2/N_1$ фактор $N_1+N_2/N_1$ $\beta$-эксцентрален). Значит, $H \cap N_1 = \{0\}$ и $H \cap (N_1+N_2) \subseteq N_1$. Следовательно, $H \cap (N_1+N_2) = \{0\}$. Так как $N_1/\{0\}$ — фраттиниевый $A$-главный фактор, то ввиду теоремы 13.4 из [1] $N_1 \subseteq T$. Тогда $|T| = |T+N_1| = |H+N_1| = |H| \cdot |N_1|$. Ясно, что $|T| \geq |H+N_1+N_2| = |H| \cdot |N_1| \cdot |N_2|$. Поэтому $|H| \cdot |N_1| \geq |H| \cdot |N_1| \cdot |N_2|$. Полученное противоречие показывает, что, по крайней мере, один из факторов $N_1/\{0\}$, $N_2/\{0\}$ является $\beta$-

центральным $A$-главным фактором. Пусть для определенности фактор $N_1/\{0\}$ β-централен. Тогда в силу теоремы 12.12 из [1] $N_1 \subseteq H$, и, следовательно, $T=H$. Теорема доказана.

Заметим, что в классе конечных групп с $\pi(\beta)$-разрешимыми β-корадикалами условие «класс β регулярен в классе Δ» выполняется автоматически. Поэтому в этом случае из теорем 1,2 вытекают результаты работы [4]. Более того, из теоремы 1 вытекает следующее утверждение:

*Следствие 2.* Пусть β — локальная формация конечных групп, μ — непустой класс групп из β, β-корадикал $A^\beta$ конечной группы $A\pi(\beta)$-разрешим. Тогда для любой β-профраттиниевой подгруппы $T$ в $A$ найдутся такие β-нормализатор $H$ и μ-профраттиниева подгруппа $F$, что $T=H+F$.


1. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М., 1989.
2. Doerk K. Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York, 1992.
3. Гойко В. И. // Вопросы алгебры. Мн., 1986. Вып. 2. С. 120.
4. Гойко В. И. // XXVIII Всесоюзная алгебраическая конференция: Тез. докл. Кишинев, 1985.


Поступила в редакцию 29.03.95.

УДК 519.1

*Н. Е. ЕФИМЧИК, Д. П. ПОДКОПАЕВ*

# О ЯДРЕ И РАДИУСЕ УСТОЙЧИВОСТИ В ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧЕ ВЕКТОРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Multicryterion problem on the system of subsets of the finite set has been considered. Strongly, weakly and properly efficient trajectories are the solutions of this problem. Vector objective function of the problem consists of MINSUM, MINMAX and MINMIN criteria. The sets of solutions witch save the property of efficiency under «small» perturbations of the problem's parameters have been investigated.

В статье рассматриваются многокритериальные траекторные задачи (задачи на системах подмножеств), в схему которых в однокритериальном случае вкладываются многие широко известные задачи оптимизации на графах, а также задачи булевого программирования (см, например, [1—3]). Исследуется устойчивость свойства эффективности траекторий многокритериальной задачи к «малым» возмущениям параметров векторной целевой функции, состоящей из критериев вида MINSUM, MINMAX и MINMIN. Найдена оценка снизу для радиуса устойчивости и выявлены случаи, когда эта оценка достижима. Ранее подобные исследования проводились для однокритериальных траекторных задач [1,2].

Пусть $E=\{e_1,..., e_m\}$, $T$ — совокупность непустых подмножеств множества $E$, называемых траекториями, $A=\|a_{sk}\|_{r\times m}$, $a_{sk}\in\mathbf{R}$, $r\geq 2$. Обозначим $N_q=\{1, 2, ..., q\}$. На множестве $E$ зададим векторную весовую функцию $a(e)=a_1((e),..., a_r(e))$, $a_s(e_k)=a_{sk}$ $\forall s\in N_r$, $k\in N_m$, а на системе подмножеств $T$ — векторную целевую функцию (ВЦФ) $F(t, A)=(F_1(t, A), .., F_r(t, A))$, состоящую из критериев трех видов:

$$\text{MINSUM} \qquad F_s(t, A)=\sum_{e\in t} a_s(e) \to \min_T,$$

$$\text{MINMAX} \qquad F_s(t, A)=\max_{e\in t} a_s(e) \to \min_T,$$

$$\text{MINMIN} \qquad F_s(t, A)=\min_{e\in t} a_s(e) \to \min_T.$$

Будем в дальнейшем предполагать, что ВЦФ $F(t, A)$ может представлять собой произвольную комбинацию этих критериев.