УДК 512.533

В. М. ШИРЯЕВ

ПОЛУГРУППЫ С ЕДИНСТВЕННЫМ БАЗИСОМ

It is shown that the unigue minimal generating set of a semigroup (if it exists) is the least generating set.

В статье [4] нами рассматривался вопрос, будет ли из существования и единственности базиса (минимального по включению порождающего множества) у каждой подполугруппы данной полугруппы S следовать фильтруемость полугруппы S, т. е. существование наименьшего по включению порождающего множества у каждой подполугруппы. В данной работе дается положительный ответ на этот вопрос. Более того, доказано, что если полугруппа S имеет единственный базис, то он содержится во всяком порождающем множестве полугруппы S. Результат анонсирован в тезисах [5].

В данной работе используется обычная терминология и нотация теории полугрупп [1]. Ниже приводятся основные обозначения и термины, употребляющиеся в тексте.

$N = \{1, 2, ...\}$ — множество натуральных чисел. Пусть S — полугруппа $X \subseteq S$.

Тогда $<X>$ — подполугруппа, порожденная множеством X (включая и $\varnothing$). Множество X называется независимым, если $x \notin <X \setminus \{x\}>$ для любого $x \in X$. Независимое порождающее множество X полугруппы S называется базисом полугруппы S (неприводимый базис в смысле [6]). Базис X называется абсолютным [2], если он содержится в любом порождающем множестве полугруппы S. Полугруппа S называется фильтрующейся [3], [4], если каждая ее подполугруппа имеет абсолютный базис. Sub S — решетка подполугрупп полугруппы S, $M(S)$ — множество максимальных элементов решетки Sub S.

Лемма. Пусть полугруппа S имеет базис X. Тогда для любого $x \in X$ существует максимальная подполугруппа $M \in M(S)$, не содержащая элемента x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как множество X независимо, то для $x \in X$ имеем $x \notin <X \setminus \{x\}>$. Следовательно, по лемме Цорна существует максимальная подполугруппа M среди подполугрупп, содержащих все элементы из X, кроме x. На самом деле M максимальна в S, так как если $M_1 \in \mathrm{Sub}\ S$, $M \subseteq M_1$, то либо $x \notin M_1$ и тогда $M = M_1$ ввиду максимальности M, либо $x \in M_1$, и тогда $X = X \setminus \{x\} \cup \{x\} \subseteq M_1$ и $S = <X> \subseteq M_1$, т. е. $S = M_1$.

Теорема. Пусть полугруппа S имеет единственный базис X. Тогда X содержится в любом порождающем множестве полугруппы S.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем некоторый элемент $x \in X$. Если $X = \{x\}$ то S есть моногенная полугруппа с единственным базисом и либо она конечна и тогда утверждение теоремы тривиально, либо бесконечна и тогда она свободна и является фильтрующейся [3], поэтому базис X — наименьшее порождающее множество. Так что далее можно предполагать, что $X \setminus \{x\} \neq \varnothing$.

Предположим, что существует элемент $y \in S \setminus \{x\}$ такой, что для него выполняется условие:

$$\forall H \in M(S)\ (X \setminus \{x\} \subseteq H \Rightarrow y \notin H), \tag{1}$$

и придем к противоречию.

Для этого положим $Y = X \setminus \{x\} \cup \{y\}$.

Если мы покажем, что Y есть базис полугруппы S, то ввиду $Y \neq X$ придем к противоречию с единственностью базиса X.

Сначала докажем, что

$$<Y> = S. \tag{2}$$

Действительно, согласно доказательству леммы, можно выбрать подполугруппу $M \in M(S)$ такую, что $X \setminus \{x\} \subseteq M$ и $x \notin M$. Согласно условию (1), также $y \notin M$.

Рассмотрим подполугруппу $M_1 = <(X \setminus \{x\}) \cup \{y\}> = <Y>$.

Если бы $x \notin M_1$, то по лемме Цорна существовала бы подполугруппа M_2 максимальная среди содержащих M_1 и не содержащих x. Но тогда ввиду $X \setminus \{x\} \subseteq M_2$, как и в доказательстве леммы, приходим к тому, что $M_2 \in M(S)$. Однако это противоречит выбору y ввиду (1). Следовательно, $x \in M_1$, а тогда $S = <X> = <X \setminus \{x\} \cup \{x\}> \subseteq M_1$ и $S = M_1$. Итак, (2) доказано.

Теперь для доказательства того, что Y — базис, надо установить независимость Y.

Предположим, что Y не является независимым. Тогда существует $z_1 \in \in Y$ такой, что $z_1 \in <Y \setminus \{z_1\}>$. Если $z_1 = y$, то получим $y \in <X \setminus \{x\}>$ в противоречие с (1). Так что обязательно $z_1 \in X \setminus \{x\}$.

Так что $z_1 \in <(X \setminus \{x, z_1\}) \cup \{y\}>$. Следовательно, для некоторого $n_1 \in N$ и $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_{n_1}^{(1)} \in X \setminus \{x, z_1\}$ имеет место соотношение

$$z_1 \in < t_1^{(1)}, \ldots, t_{n_1}^{(1)}, y >.$$

Отметим, что $z_1 \notin < t_1^{(1)}, \ldots, t_{n_1}^{(1)} >$, иначе $z_1 \in <X \setminus \{z_1\}>$, что противоречит независимости множества X.

Далее, так как X — порождающее множество, то $y \in <X>$. Если $y \in <x>$, то $z_1 \in < t_1^{(1)}, \ldots, t_{n_1}^{(1)}, x > \subseteq <X \setminus \{z_1\}>$, что противоречит независимости X. Так что существуют $m \in N$ и $s_1, s_2, \ldots, s_m \in X \setminus \{x\}$ такие, что $y \in <s_1, \ldots, s_m, x>$. При этом $y \notin <s_1, \ldots, s_m>$, иначе $y \in <X \setminus \{x\}> \subseteq M$, что противоречит (1). Кроме того, $z_1 \in \{s_1, \ldots, s_m\}$, иначе

$$z_1 \in < t_1^{(1)}, \ldots, t_{n_1}^{(1)}, y > \subseteq < t_1^{(1)}, \ldots, t_{n_1}^{(1)}, s_1, \ldots, s_m, x > \subseteq <X \setminus \{z_1, x\}, x> = <X \setminus \{z_1\}>,$$

что противоречит независимости X.

После исключения элемента z_1 из Y мы получим снова порождающее множество $Y_1 = X \setminus \{x, z_1\} \cup \{y\}$.

Продолжая далее этот процесс, мы либо придем к тому, что Y содержит минимальное по включению порождающее множество для S, что противоречит единственности базиса X, либо придем к бесконечной последовательности элементов $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \subseteq X \setminus \{x\}$, таких что $z_k \in <X \setminus \{x, z_1, \ldots, z_k\} \cup \{y\}>$ $\forall k \in N$ и при этом $\{z_1, \ldots, z_k\} \subseteq \{s_1, \ldots, s_m\}$ $\forall k \in N$, но это противоречит конечности множества $\{s_1, \ldots, s_m\}$.

Значит, элемента y со свойством (1) не существует. Поэтому имеет место равенство $S \setminus \{x\} = \cup \{M \mid M \in M(S) \wedge X \setminus \{x\} \subseteq M \wedge x \notin M\}$.

Обозначим $T_x = S \setminus \{x\}$.

Покажем, что T_x есть подполугруппа полугруппы S. В самом деле, предположим, что это не так, тогда существует $n \in N$ и такие элементы $t_1, t_2, \ldots, t_n \in S \setminus X$, что $x \in <\{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \cup (X \setminus \{x\})>$. Положим $U = \{t_1, \ldots, t_n\} \cup (X \setminus \{x\})$. При этом такие $t_1, \ldots, t_n$ обязательно найдутся, иначе $x \in X \setminus \{x\}>$, что противоречит тому, что X — базис. Эти элементы выберем так, что n — наименьшее число с таким свойством. Можно предполагать, что для любого $i = 1, \ldots, n$

$$t_i \notin <\{t_i, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n\} \cup X \setminus \{x\}>, \tag{3}$$

иначе такое t_i можно исключить.

Далее, так как X — базис, то для некоторых $r_1, \ldots, r_n \in N$ и некоторого множества

$$V = \left\{ x_1^{(1)}, \ldots, x_{r_1}^{(1)}, \ldots, x_r^{(2)}, \ldots, x_{r_2}, \ldots, x_1^{(n)}, \ldots, x_{r_n}^{(n)} \right\} \subseteq X$$

имеем

$$t_1 \in \langle x_1^{(1)}, \ldots, x_r^{(1)} \rangle$$

. . . .

$$t_n \in \langle x_1^{(n)}, \ldots, x_{r_n}^{(n)} \rangle.$$

Отметим, что $x \in V$, иначе

$$x \in \langle U \rangle \subseteq \langle\langle V \rangle \cup X \setminus \{x\} \rangle \subseteq \langle\langle X \setminus \{x\} \rangle \cup X \setminus \{x\} \rangle \subseteq \langle X \setminus \{x\} \rangle,$$

что приводит к противоречию. Теперь ввиду $x \in \langle U \rangle$ и $X \setminus \{x\} \subseteq U$ имеем

$$\langle U \rangle \supseteq \langle X \setminus \{x\} \cup \{x\} \rangle = S, \qquad (4)$$

так что U — порождающее множество для S. Если U независимо, то U есть базис S, что противоречит тому, что $X \neq U$ и X — единственный базис. Так что U — зависимое множество. Из (3) следует, что $t_i \notin \langle U \setminus \{t_i\} \rangle$, $i=1, \ldots, n$; поэтому существует $z_1 \in X \setminus \{x\}$, такой, что

$$z_1 \in \langle \{t_1, \ldots, t_n\} \cup X \setminus \{x, z_1\} \rangle = \langle U \setminus \{z_1\} \rangle. \qquad (5)$$

Отметим, что $z_1 \in V$, иначе

$$z_1 \in \langle U \rangle = \langle \{t_1, \ldots, t_n\} \cup X \setminus \{x, z_1\} \rangle \subseteq \langle\langle V \rangle \cup X \setminus \{x, z_1\} \rangle \subseteq \langle X \setminus \{z_1\} \rangle,$$

что противоречит независимости множества X. Далее из (4) и (5) следует, что $\langle U \setminus \{z_1\} \rangle = S$. Если $U \setminus \{z_1\}$ независимо, то это базис, равный X, что невозможно. Так что $U \setminus \{z_1\}$ зависимо и потому существует некоторый $z_2 \in X \setminus \{x, z_1\}$, такой, что $z_2 \in \langle U \setminus \{z_1, z_2\} \rangle$.

Продолжая этот процесс, приходим к бесконечной последовательности $z_1, \ldots, z_k, \ldots$ элементов из $X \setminus \{x\}$ таких, что $z_k \in \langle U \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_k\} \rangle$ и $\{z_1, \ldots, z_k, \ldots\} \subseteq V$. Однако это противоречит конечности V.

Таким образом, множество $T_x = S \setminus \{x\}$ есть подполугруппа S. Теперь, если Y — произвольное порождающее множество полугруппы S, то $x \in Y$, иначе $Y \subseteq T_x$ и $S = \langle Y \rangle \subseteq T_x \neq S$ и приходим к противоречию. Так как это верно для любого $x \in X$, то $X \subseteq Y$ и потому X есть наименьшее порождающее множество для S. Теорема доказана.

Следствие 1. Если X — единственный базис полугруппы S, то для любого $x \in X$ множество $S \setminus \{x\}$ есть максимальная подполугруппа полугруппы S.

Из доказанной теоремы и предложения 1.1 работы [3] вытекает

Следствие 2. Для любой полугруппы S следующие утверждения равносильны:

1. Полугруппа S фильтрующаяся, т. е. каждая ее подполугруппа имеет абсолютный базис.

2. Порождающие множества любой подполугруппы полугруппы S составляют фильтр в булеане подмножеств этой полугруппы.

3. Каждая подполугруппа полугруппы S имеет единственный базис.

1. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М., 1972. Т. 1.
2. Рыбаков Л. М. // Мат. сб. 1939 Т. 5(43). № 3. С. 521.
3. Ширяев В. М. // Исследования алгебраических систем по свойствам их подсистем. Свердловск, 1985. С. 171.
4. Он же // Мат. сб. 1991. Т. 182. № 9. С. 1331.
5. Он же // Проблемы математики и информатики. 1. Фундаментальные проблемы математики: Материалы междунар. мат. конф., посвященной 25-летию ГГУ. Гомель, 1994. С. 195.
6. Burris S. P., Sankappanavar H. P. A Course in Universal Algebra. New York; Berlin, 1982.

Поступила в редакцию 17.02.95.