

$$\begin{aligned}
& \sim \frac{1}{2(1-\Theta)} \ln \left| \sigma^2 + \frac{y^2}{1-\Theta^2} \right| \Bigg|_0^{\delta_2} + \frac{1}{2(1-\Theta)} \ln \left| \sigma^2 + \frac{y^2}{1-\Theta^2} \right| \Bigg|_0^{\delta_1} = \\
& = \frac{1}{2(1-\Theta)} \ln \left| \delta_2 + \frac{y^2}{1-\Theta^2} \right| - \frac{1}{2(1-\Theta)} \ln \frac{y^2}{1-\Theta^2} + \\
& + \frac{1}{2(1-\Theta)} \ln \left| \delta_1 + \frac{y^2}{1-\Theta^2} \right| - \frac{1}{2(1-\Theta)} \ln \frac{y^2}{1-\Theta^2} \sim \\
& \sim -\frac{1}{1-\Theta} \ln y^2 = \frac{2}{1-\Theta} \ln \frac{1}{y}.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$|\Phi(z)| = O\left(\frac{2}{1-\Theta} \ln \frac{1}{y}\right) \text{ при } y \rightarrow 0, y > 0.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $z \rightarrow 0$, оставаясь внутри угла $\alpha \leq \gamma \leq \pi - \alpha$ (рис. 2).

Через точку z проведем прямую, параллельно вещественной оси. Она пересечет стороны угла γ в точках z_1 и z_2 . Из треугольника $0z_1z_2$ видно, что

$$y \leq |z| \leq |z_1| = \frac{y}{\sin \alpha}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{y} \leq \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{|z|}. \quad (4)$$

Учитывая (4), из (3) находим, что если $z \rightarrow 0$, оставаясь внутри угла γ , то

$$|\Phi(z)| = O\left(\frac{2}{(1-\Theta)} \ln \frac{\operatorname{cosec} \alpha}{|z|}\right) \text{ при } y \rightarrow 0, y > 0. \quad (5)$$

На основании последнего можем утверждать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{z \rightarrow t_0} \Phi(z)(z - t_0)^\varepsilon = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если кривая (Γ) — гладкая замкнутая, а функция φ — непрерывная, то функция

$$\Phi(z) = \exp \left\{ \frac{\pm 1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \right\} \quad (6)$$

принадлежит классу E.

1. Х в е д е л и д з е Б. В. // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР. Тбилиси, 1957. Т. 23.

Поступила в редакцию 16.02.95.

УДК 517.948.32:517.544

О. Б. ДОЛГОПОЛОВА

ПОСТРОЕНИЕ ВСЕХ ДВУЛИСТНЫХ БЕЗГРАНИЧНЫХ НЕРАЗВЕТВЛЕННЫХ НАКРЫТИЙ ЗАМКНУТОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

In this paper all smooth unlimited covers of Riemann surface which have two sheets are constructed.

Рассмотрим задачу построения всех двулистных безграничных неразветвленных накрытий римановой поверхности рода $g \geq 1$, реализованных

как правильный многоугольник с классическим отождествлением сторон. Имеется взаимно однозначное соответствие между неразветвленными накрытиями $S_1 \rightarrow S$ римановой поверхности S и полными множествами сопряженных подгрупп ее фундаментальной группы $\pi(S)$. При этом n -листному накрытию отвечает подгруппа индекса n .

Исследуем группу $\pi(S)$. Это группа с $2g$ образующими и одним соотношением $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] = 1$, где $[a_i, b_i] = a_i \cdot b_i \cdot a_i^{-1} \cdot b_i^{-1}$. Рассмотрим подгруппы, образованные словами, в которых четна сумма всех степеней $a_i, i \in M, b_j, j \in K$, где M и K подмножества $\{1, \dots, g\}$, такие что $M \cup K \neq \emptyset$. Это подгруппы индекса 2. Представителями классов смежности будут 1 и a_i , где $i \in M$, если $M \neq \emptyset$, или 1 и b_p , где $p \in K$. Все эти подгруппы нормальны. Используя [1], докажем, что других подгрупп индекса 2 у $\pi(S)$ нет.

Теорема 1. Все подгруппы индекса 2 фундаментальной группы римановой поверхности рода g нормальны и описываются следующим образом. Подгруппа образована словами, в которых четна сумма всех степеней $a_i, i \in M, b_j, j \in K$, где M и K произвольные подмножества $\{1, \dots, g\}$, такие что $M \cup K \neq \emptyset$.

Рассмотрим произвольное транзитивное представление группы $\pi(S)$. Это гомоморфизм $\pi(S)$ в группу подстановок из двух элементов. Достаточно задать его на образующих. Каждому образующему надо поставить в соответствие подстановку из двух элементов, т. е. либо единич-

ную матрицу E , либо $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. При этом $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$ должна со-

ответствовать единичная подстановка, но это будет выполняться при любом задании гомоморфизма на образующих. Представление группы $\pi(S)$ должно быть транзитивно, значит, хотя бы одному из образующих мы должны поставить в соответствие P .

Все подгруппы фундаментальной группы получаются как прообразы при таких гомоморфизмах подгруппы подстановок, оставляющей на месте 1. Подгруппа подстановок из двух элементов, оставляющая на месте 1, — это тривиальная подгруппа. Какие слова образуют ядро гомоморфизма? Если мы образующим $a_i, i \in M, b_j, j \in K$ поставили в соответствие подстановку P , а остальным образующим — единичную подстановку, то ядро состоит как раз из тех слов, в которых сумма степеней $a_i, i \in M, b_j, j \in K$ четна. Теорема доказана.

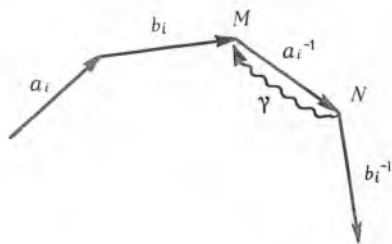
Так как все подгруппы индекса 2 нормальны, то любое двулистное безграничное неразветвленное накрытие порождает одну подгруппу фундаментальной группы.

Теорема 2. Все двулистные безграничные неразветвленные накрытия римановой поверхности получаются путем разрезания ее по неразбиваемому циклу и склеивания двух таких экземпляров крест-накрест.

Чтобы доказать это, нам достаточно указать такие неразбиваемые циклы, что накрытия, получающиеся описанным выше способом, индуцируют все указанные нами подгруппы фундаментальной группы. Рассмотрим циклы $\sigma = a_1^{k_1} b_1^{p_1} a_2^{k_2} b_2^{p_2} \dots a_g^{k_g} b_g^{p_g}$, где $k_i, p_i \in \{0, 1\}$. Этих циклов достаточно, чтобы, разрезая по ним и склеивая крест-накрест два таких экземпляра римановой поверхности, получить все искомые накрытия.

Очевидно, что полученное таким образом накрытие является двулистным безграничным неразветвленным накрытием римановой поверхности. Чтобы найти подгруппу $\pi(S)$, которой оно соответствует, достаточно знать, какие из образующих принадлежат этой подгруппе. Допустим, что ей принадлежат образующие $a_i, i \in M, b_j, j \in K$. Тогда эта подгруппа образована словами, в которых сумма всех степеней $a_i, i \in \{1, \dots, g\} \setminus M, b_j, j \in \{1, \dots, g\} \setminus K$ четна. Проверим, принадлежит ли подгруппе образующий

a_i . Поскольку все подгруппы индекса 2 нормальны, то все кривые, лежащие над a_i , замкнуты или разомкнуты одновременно [2]. Причем замкнуты в том и только в том случае, когда a_i принадлежит подгруппе, порожденной накрытием. Итак, возьмем любую кривую над a_i и проверим является ли она замкнутой. Пусть $p_i = 1$, т. е. цикл σ включает в себя кривую b_i (рисунок). Тогда после разрезания по циклу σ и склеивания двух таких экземпляров крест-накрест точки M и N (рис. 1) не «склеиваются». Это две разные точки, лежащие над отмеченной точкой римановой поверхности S . Кривая γ лежит над a_i (см. рисунок). Она не является замкнутой. Значит, a_i не принадлежит подгруппе, порожденной накрытием. Наоборот, пусть $p_i = 0$, т. е.



цикл σ не включает в себя кривую b_i . Тогда точки M и N отождествляются (они остаются «склеенными» после разрезания). Кривая γ лежит над a_i . Она замкнута. Значит, a_i принадлежит подгруппе, порожденной накрытием. Для b_j рассуждения аналогичны.

Итак, пусть подгруппа образована словами, в которых сумма всех степеней a_i , $i \in M$, b_j , $j \in K$ четна, где M и K — подмножества $\{1, \dots, g\}$. Возьмем цикл $\sigma = a_1^{k_1} b_1^{p_1} a_2^{k_2} b_2^{p_2} \dots a_g^{k_g} b_g^{p_g}$, где

$$k_i = \begin{cases} 1, & \text{если } b_i \in K \\ 0, & \text{если } b_i \notin K \end{cases}, \quad p_j = \begin{cases} 1, & \text{если } a_j \in M \\ 0, & \text{если } a_j \notin M. \end{cases}$$

Накрытие, образованное разрезанием римановой поверхности по этому циклу и склеиванием двух таких экземпляров крест-накрест, соответствует выбранной подгруппе.

Итак, для любой подгруппы индекса 2 фундаментальной группы мы можем указать такой неразбивающий цикл, что накрытие, полученное с помощью описанной выше процедуры, соответствует данной подгруппе. Следовательно, все двулистные безграничные неразветвленные накрытия римановой поверхности получаются путем разрезания ее по неразбивающему циклу и склеивания двух таких экземпляров крест-накрест. В процессе доказательства мы указали явный вид циклов, достаточных для получения всех накрытий.

1. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. М., 1938. С. 229.

2. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М., 1960. С. 99.

Поступила в редакцию 31.01.95.

УДК 517.512

Е. А. РОВБА

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ОТРЕЗКЕ

Positive integral rational operators on segment $[-1; 1]$ have been constructed and the estimations of corresponding approximations for the functions $f \in C([-1, 1])$ have been obtained.

В 1956 г. М. И. Джрбашян [1] ввел рациональные и обобщающие ряды Фурье по тригонометрической системе $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$. Основываясь на представлении ядра Дирихле, полученном в этой работе, В. Н. Русак [2] построил рациональные операторы Фейера и Джексона в периодическом случае. Позже исследования в этом направлении были продолжены,