Математика и информатика

УДК 517.948.32:517.544

Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Т. А. ШЕВИЛА

ИНТЕГРАЛ ТИПА КОШИ В КЛАССАХ Е

Piecewise analytic functions slowly increasing near the discontinuity line (functions of the class E) are studied. In particular, it is proved that the Cauchy type integral with continuous density is of the class E.

Классы Е — это классы кусочно-аналитических функций, более общие, чем гельдеровские. Они не требуют фиксации метрики на римановой поверхности и являются конформно-инвариантными, а это существенно для задач сопряжения на римановой поверхности.

Определение. Будем говорить, что функция $\Phi(z)$ кусочно-мероморфная в области D, лежащей на римановой поверхности, с кусочно-гладкой линией разрывов $L \in D$, имеющая почти всюду на L левое и правое конечные угловые граничные значения, принадлежит классу Е в точке $p_0 \in L$, если выполняется условие: для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ p(z) \notin L}} z^{\varepsilon} \Phi\left[p(z)\right] = 0.$$

Здесь $p = p(z)$ — параметрический гомеоморфизм окрестности точки p_0; $p_0 = p(0)$.

Принадлежность функции Φ классу Е на множестве будем понимать как принадлежность ее классу Е в каждой точке этого множества.

Теорема. Если Γ — простая гладкая замкнутая кривая, а функция $\varphi : \Gamma \to \mathbf{C}$ — непрерывная, то интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau,\ z \in D,$$

принадлежит классу Е.

Доказательство. Аналитичность функции $\Phi(z)$ на $D \setminus \Gamma$ и существование почти всюду на Γ конечных угловых предельных значений известно [1]. Докажем почти ограниченность функции $\Phi(z)$ в окрестностях точек, где не существует конечных угловых предельных значений. Пусть $t_0 \in \Gamma$ — такая точка. Для простоты рассуждений будем считать, что $t_0 = 0$, а положительное направление касательной к Γ в этой точке совпадает с положительным направлением вещественной оси.

Допустим сначала, что $z \to 0$ по нормали к вещественной оси, т. е. вдоль мнимой оси. Проведем окружность радиуса δ с центром в точке $z = 0$. Пусть t_1 и t_2 — точки пересечения этой окружности с кривой Γ. Радиус будем считать настолько малым, чтобы окружность не имела с кривой Γ других точек пересечения, кроме t_1 и t_2. Обозначим длину дуги $(0, t_1)$ через δ_1, длину дуги $(0, t_2)$ — через δ_2 (рис. 1).

Разобьем интеграл (1) на два слагаемых: J_1 — по участку Γ_δ контура Γ, лежащему внутри круга, и J_2 — по остальной части $\Gamma\backslash\Gamma_\delta$. Интеграл

$$J_2 = \int\limits_{\Gamma\backslash\Gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau$$

аналитичен в точке z=0, и, значит, ограничен. С учетом этого получим оценку

$$|\Phi(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \right| \le \max_{\tau\in\Gamma_\delta} |\varphi(\tau)| \int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{|d\tau|}{|\tau - iy|} \sim \int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{d\tau}{|\tau - iy|} \qquad \text{при } y\to 0,\ y>0.$$

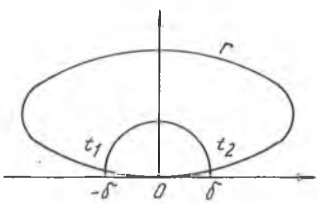

Рис. 1

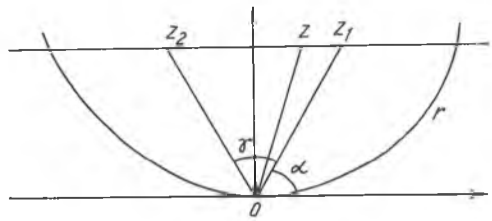

Рис. 2

Далее воспользуемся следующим свойством кривой Γ: для гладкой кривой $|d\tau| = d\sigma$, $|\tau'(\sigma)| = 1$, где σ — длина дуги кривой. В предположениях, указанных в начале доказательства, разложение функции $\tau(\sigma)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $\sigma = 0$ будет иметь вид:

$$\tau = \tau(\sigma) = \sigma + \alpha(\sigma), \tag{2}$$

причем

$$\lim_{\sigma\to 0} \frac{\alpha(\sigma)}{\sigma} = 0. \tag{3}$$

Продолжим рассуждения, учитывая (2). Имеем

$$\int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{d\tau}{|\tau - iy|} = \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{d\sigma}{|\tau(\sigma) - iy|} = \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{d\sigma}{|\sigma + \alpha(\sigma) - iy|} \le \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{d\sigma}{\big||\sigma - iy| - |\alpha|(\sigma)\big|}.$$

Из равенства (3) вытекает, что для произвольного $\Theta\in(0,\ 1)$ существует настолько малое $\delta>0$, что при $|\sigma|\le\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\alpha(\sigma)}{\sigma}\right| \le \Theta, \text{ откуда } |\alpha(\sigma)| \le \Theta|\sigma|.$$

Применяя эту оценку, получим

$$\int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{d\sigma}{|\tau - iy|} \le \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{d\sigma}{\big||(\sigma) - iy| - \Theta|\sigma|\big|} = \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + y^2} - \Theta|\sigma|} =$$

$$= \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{\sqrt{\sigma^2 + y^2} + \Theta|\sigma|}{(1-\Theta^2)\sigma^2 + y^2}\, d\sigma \le \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{\sqrt{\sigma^2 + 2|\sigma| y + y^2} + \Theta|\sigma|}{(1-\Theta^2)\sigma^2 + y^2}\, d\sigma \le$$

$$\le \int\limits_{-\delta_1}^{\delta_2} \frac{|\sigma| + y + \Theta|\sigma|}{(1-\Theta^2)\sigma^2 + y^2}\, d\sigma = \int\limits_{0}^{\delta_2} \frac{(1+\Theta)\sigma + y}{(1-\Theta^2)\sigma^2 + y^2}\, d\sigma + \int\limits_{-\delta_1}^{0} \frac{-(1+\Theta)\sigma + y}{(1-\Theta^2)\sigma^2 + y^2}\, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{1-\Theta} \int\limits_{0}^{\delta_2} \frac{\sigma + \dfrac{y}{1+\Theta}}{\sigma^2 + \dfrac{y^2}{1-\Theta^2}}\, d\sigma + \frac{1}{1-\Theta} \int\limits_{0}^{\delta_1} \frac{\sigma + \dfrac{y}{1+\Theta}}{\sigma^2 + \dfrac{y^2}{1-\Theta^2}}\, d\sigma \sim$$

$$\sim \frac{1}{2(1-\Theta)}\ln\left|\sigma^2+\frac{y^2}{1-\Theta^2}\right\|_0^{\delta_2}+\frac{1}{2(1-\Theta)}\ln\left|\sigma^2+\frac{y^2}{1-\Theta^2}\right\|_0^{\delta_1}=$$

$$=\frac{1}{2(1-\Theta)}\ln\left|\delta_2+\frac{y^2}{1-\Theta^2}\right|-\frac{1}{2(1-\Theta)}\ln\frac{y^2}{1-\Theta^2}+$$

$$+\frac{1}{2(1-\Theta)}\ln\left|\delta_1^2+\frac{y^2}{1-\Theta^2}\right|-\frac{1}{2(1-\Theta)}\ln\frac{y^2}{1-\Theta^2}\sim$$

$$\sim-\frac{1}{1-\Theta}\ln y^2=\frac{2}{1-\Theta}\ln\frac{1}{y}.$$

Таким образом, имеем

$$|\Phi(z)|=O\left(\frac{2}{1-\Theta}\ln\frac{1}{y}\right) \text{ при } y\to 0,\ y>0.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $z\to 0$, оставаясь внутри угла $\alpha\leq\gamma\leq\pi-\alpha$ (рис. 2).

Через точку z проведем прямую, параллельно вещественной оси. Она пересечет стороны угла γ в точках z_1 и z_2. Из треугольника $0z_1z_2$ видно, что

$$y\leq|z|\leq|z_1|=\frac{y}{\sin\alpha}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{y}\leq\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{|z|}. \tag{4}$$

Учитывая (4), из (3) находим, что если $z\to 0$, оставаясь внутри угла γ, то

$$|\Phi(z)|=O\left(\frac{2}{(1-\Theta)}\ln\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{|z|}\right) \text{ при } y\to 0,\ y>0. \tag{5}$$

На основании последнего можем утверждать, что для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_{z\to t_0}\Phi(z)(z-t_0)^{\varepsilon}=0.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если кривая (Γ) — гладкая замкнутая, а функция φ — непрерывная, то функция

$$\Phi(z)=\exp\left\{\frac{\pm 1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau\right\} \tag{6}$$

принадлежит классу E.

1. Хведелидзе Б. В. // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР. Тбилиси, 1957. Т. 23.

Поступила в редакцию 16.02.95.

УДК 517.948.32:517.544

О. Б. ДОЛГОПОЛОВА

ПОСТРОЕНИЕ ВСЕХ ДВУЛИСТНЫХ БЕЗГРАНИЧНЫХ НЕРАЗВЕТВЛЕННЫХ НАКРЫТИЙ ЗАМКНУТОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

In this paper all smooth umlimited coveres of Riemann surface wich have two sheets are constructed.

Рассмотрим задачу построения всех двулистных безграничных неразветвленных накрытий римановой поверхности рода $g\geq 1$, реализованных