



УДК 539.12

Л. И. КОМАРОВ, И. Д. ФЕРАНЧУК

ДВУХУРОВНЕВЫЙ АТОМ В ОДНОМОВОМ КВАНТОВОМ ПОЛЕ: НУЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО МЕТОДА

The approximate solution of the problem of interaction between two-level atom and quantum electromagnetic field is found on the basis of the operator method. The solution is uniformly suitable in the entire range of the coupling constant variation and describes the qualitative peculiarities of the system energy spectrum.

1. Модель двухуровневого атома (МДА), взаимодействующего с одномодовым квантовым полем, является простой, но в то же время широко распространенной и эффективной моделью, использующейся для исследования качественных особенностей взаимодействия квантовых систем с резонансным электромагнитным полем (см., напр., [1, 2]). Построение спектра и собственных функций гамильтониана этой системы представляет большой интерес как с математической точки зрения, так и для решения конкретных физических задач, связанных с исследованием неадиабатических переходов [3], сжатых состояний [4], хаотизации поведения динамических систем [5], резонансной флуоресценции [6] и ряда других явлений.

В большей части приложений МДА используется так называемое приближение вращающейся волны, которое сводит задачу к точно решаемому случаю, известному как модель Джейнса—Каммингса (МДК) [7]. Однако обсуждение применимости МДК в рассматриваемой задаче обычно сводится к качественным соображениям [2], не позволяющим выделить тот диапазон параметров, где использование указанного приближения правильно описывает свойства системы. Более того, строгое математическое исследование характеристик спектра гамильтониана МДА, выполненное рядом авторов (см., напр., [8—10]) и позволившее найти класс точных аналитических решений задачи, показывает, что МДК не воспроизводит правильную зависимость энергии уровней от константы взаимодействия атома с полем.

В связи со сказанным большой интерес представляет разработка метода приближенного описания энергетического спектра МДА и других характеристик модели в широком диапазоне параметров системы. В настоящей работе для этого используется операторный метод (ОМ) решения уравнения Шредингера, который был впервые введен в [11] и оказался эффективным при описании многих систем (см. [12]). Применение ОМ в рассматриваемой задаче позволяет построить алгоритм вычисления собственных значений и собственных векторов гамильтониана МДА с любой необходимой точностью, по эффективности сравнимый с аналитическим решением, и с его помощью детально исследовать различные характеристики системы [13].

Цель настоящей работы состоит в использовании нулевого приближения ОМ для приближенного аналитического вычисления энергетиче-

ского спектра МДА. Как будет показано далее, полученные аналитические формулы являются равномерно пригодными в том отношении, что позволяют исследовать качественные особенности энергетического спектра системы во всем диапазоне изменения константы связи атома с полем.

2. Гамильтониан исследуемой модели в безразмерной форме имеет очень простой вид [9]

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \varepsilon \sigma_3 + a^+ a + f(\sigma_+ + \sigma_-)(a + a^+). \quad (1)$$

Здесь a^+ и a — операторы рождения и уничтожения квантов выделенной моды электромагнитного поля, причем энергия кванта принята за единицу; матрицы Паули $\sigma_i (i=1, 2, 3)$, $\sigma_{\pm} = 1/2(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$ описывают переходы между состояниями χ_+ и χ_- двухуровневого атома, отделенные энергией ε друг от друга; безразмерная константа связи f атома с полем пропорциональна дипольному матричному элементу перехода, причем точно решаемой модели ДК соответствует отбрасывание в формуле (1) «нерезонансных» слагаемых $\sigma_+ a^+$ и $\sigma_- a$.

Дальнейшие выкладки заметно упрощаются в другом представлении гамильтониана (1), при котором оператор взаимодействия атома с полем имеет диагональную форму

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2} \varepsilon \sigma_1 + a^+ a + f \sigma_3 (a + a^+). \quad (2)$$

Существенно также, что система имеет точный интеграл движения, который можно назвать «комбинированной четностью», и в представлении, соответствующем гамильтониану $\hat{H}_1$, определяемый оператором

$$\hat{R} = \sigma_1 e^{i\pi a^+ a}, \quad (3)$$

коммутирующим с гамильтонианом (2).

Таким образом, точный вектор состояния системы зависит от двух квантовых чисел и является совместным решением следующей системы уравнений

$$\hat{H}_1 |\Psi_{ns}\rangle = E_{ns} |\Psi_{ns}\rangle; \quad (4a)$$

$$\hat{R} |\Psi_{ns}\rangle = s |\Psi_{ns}\rangle, \quad (4b)$$

где число $s = \pm 1$ определяет четность, а $n = 0; 1; 2; \dots$ — энергию стационарного состояния системы E_{ns} .

В соответствии с общим рецептом ОМ [13], для построения всего спектра решений уравнения Шредингера необходимо использовать полный набор базисных векторов, зависящих от некоторых произвольных параметров, которые позволяют адекватно учитывать изменения состояний системы под влиянием взаимодействия. В рассматриваемом случае связь атома с полем приводит к сдвигу равновесного состояния полевых осцилляторов, чему, как известно, в представлении вторичного квантования соответствует следующее каноническое преобразование операторов

$$a = b + u; \quad a^+ = b^+ + u^*; \\ b = \hat{J}^{-1} a \hat{J}; \quad \hat{J} = e^{(u^* a - u a^+)} = e^{-\frac{|u|^2}{2}} e^{-u a^+} e^{u^* a}, \quad (5)$$

где u — произвольный пока параметр, b^+ и b — новые операторы рождения и уничтожения.

Тогда необходимый базисный набор образуется с помощью собственных функций оператора числа квантов $\hat{n} = b^+ b$ и оператора σ_3 :

$$\begin{aligned} |\Psi_{ns}^{(0)}\rangle &= |n, u\rangle \chi_s; \\ \hat{n}|n, u\rangle &= n|n, u\rangle; \quad \sigma_3 \chi_s = s \chi_s. \end{aligned} \quad (6)$$

Состояния $|n, u\rangle$ представляют собой n -квантовые возбуждения над когерентным состоянием поля, связанные с вакуумным состоянием электромагнитного поля следующим образом ($u = u^*$):

$$|n, u\rangle = \frac{(a^+ - u)^n}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{u^k}{k!} (a^+)^k |0\rangle \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad (7)$$

причем амплитуда u классического поля, определяющая, по существу, выбор представления для базисного набора ОМ, будет найдена позже. Функции χ_s являются линейными комбинациями волновых функций основного χ_+ и возбужденного χ_- состояний

$$\chi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_+ \pm \chi_-).$$

В результате канонического преобразования (5) уравнения (4) принимают следующий вид [11]:

$$\left[\frac{1}{2} \varepsilon \sigma_1 + u^2 + u(b + b^+) + b^+ b + f \sigma_3 (2u + b + b^+) \right] |\Psi_{ns}\rangle = E_{ns} |\Psi_{ns}\rangle; \quad (8a)$$

$$\sigma_1 \cdot e^{-2u^2} e^{-2ub^+} e^{i\pi b^+ b} e^{-2ub} |\Psi_{ns}\rangle = s |\Psi_{ns}\rangle. \quad (8b)$$

Представим искомый вектор состояния в виде разложения по базисному набору

$$|\Psi_{ns}\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\lambda=\pm 1} C_{nk}^{s\lambda} |ku\rangle \chi_{\lambda}. \quad (9)$$

В результате из уравнений (8) и (9) находим алгебраические рекуррентные соотношения для коэффициентов $C_{nk}^{s\lambda}$ и E_{ns} :

$$(k + u^2 + 2uf - E_{ns}) C_{nk}^{s+} + (u + f) (\sqrt{k} C_{nk-1}^{s+} + \sqrt{k+1} C_{nk+1}^{s+}) = -\frac{1}{2} \varepsilon C_{nk}^{s-}; \quad (10a)$$

$$s C_{nk}^{s-} = \sum_m R_{mk} C_{nm}^{s+}, \quad (10b)$$

$$R_{mk} = e^{-2u^2} \sum_{l=0}^{\min\{m, k\}} (-1)^l \frac{(m! k!)^{1/2}}{l! (m-l)! (k-l)!} (2u)^{m+k-2l}.$$

Обратим внимание на то, что мы не используем еще одно рекуррентное соотношение для $C_{nk}^{s\lambda}$, вытекающее из (8a), поскольку по определению при точном собственном значении E_{ns} оно является линейной комбинацией уравнений (10). В то же время, как показывают дальнейшие вычисления, учет связи (10b) между C_{nk}^{s+} и C_{nk}^{s-} , обусловленной точным интегралом движения $\hat{R}$, является принципиально важным для сходимости последовательных приближений ОМ.

3. Согласно [14], для вычисления энергии стационарных состояний системы в нулевом приближении ОМ необходимо учитывать только диагональную часть гамильтониана по отношению к волновым функциям

используемого базисного набора. При выделении соответствующей части в матричных уравнениях (8) представим вектор состояния $|\Psi_{ns}\rangle$ в виде разложения по собственным функциям матрицы σ_3

$$|\Psi_{ns}\rangle = |\varphi_{ns}\rangle \chi_+ + |\nu_{ns}\rangle \chi_- \quad (11)$$

и, исключая спиновые переменные, получим уравнение для одного из векторов состояния

$$\hat{H}_{\text{эфф.}} |\varphi_{ns}\rangle \equiv \left[u^2 + 2uf + b^+b + (u+f)(b+b^+) + \frac{\varepsilon}{2} s \hat{R}_1 \right] |\varphi_{ns}\rangle = E_{ns} |\varphi_{ns}\rangle, \quad (12)$$

где $\hat{R}_1$ — оператор с матричными элементами, приведенными в (10).

В соответствии с результатами работы [14], где была рассмотрена обобщенная форма ОМ, в некоторых случаях диагональная часть гамильтониана должна выделяться по отношению не к самим векторам состояния из базисного набора, а к их линейным комбинациям, учитывающим наиболее существенные особенности точных волновых функций. В рассматриваемом случае такой особенностью является вырождение состояний с квантовыми числами n и $n+1$ при $\varepsilon \cong 1$ и $f \ll 1$. В связи с этим используем в нулевом приближении ОМ «правильные линейные комбинации» базисных векторов состояния:

$$|\varphi_{ns}\rangle \equiv |\varphi_{ns}^{(0)}\rangle = A|n, u\rangle + B|n+1, u\rangle \quad (13)$$

с произвольными постоянными A и B .

Естественно, что точные собственные значения гамильтониана системы не зависят от параметра u , который определяет только выбор представления для волновой функции. Однако именно такие, искусственно введенные, параметры и обеспечивают «гибкость» нулевого приближения ОМ при различных значениях константы связи, причем они могут выбираться различными способами [11–15]. Для эффективного гамильтониана (12) оптимальное значение u оказывается очень простым:

$$u = -f, \quad (14)$$

что обеспечивает обращение в нуль при любых n основной части матричного элемента оператора $\hat{H}_{\text{эфф.}}$, определяющего переходы в ближайшие состояния.

Подставляя вектор состояния (13) в уравнение (12), находим алгебраическую систему уравнений для коэффициентов A и B , из условия совместности которой получаем следующую аналитическую формулу для энергии стационарных состояний системы в нулевом приближении ОМ (здесь учтено, что $u = -f$):

$$\begin{aligned} E_{ns}^{(0)} &= n - f^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \varepsilon (R_n + R_{n+1}) - \frac{1}{2} \Delta_{ns}^{1/2}; \\ \Delta_{ns} &= \varepsilon^2 R_{n,n+1}^2 + \left[1 - \frac{1}{2} \varepsilon (R_n - R_{n+1}) \right]^2; \\ R_n &\equiv R_{n,n}. \end{aligned} \quad (15)$$

Как и во многих других применениях ОМ, полученная формула является равномерно пригодной в том отношении, что она воспроизводит точное асимптотическое поведение энергии в предельных случаях $f \ll 1$ и $f \gg 1$, а в промежуточной области константы связи достаточно точно описывает характерные особенности энергетического спектра системы.

Действительно, при $f \ll 1$ из формулы (15) находим

$$R_n \cong (-1)^n + O(f^2); \quad R_{n,n+1} \cong 2f(-1)^n \sqrt{n+1} + O(f^3);$$

$$E_{ns}^{(0)} \cong n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} [(\varepsilon - s)^2 + 4\varepsilon^2 f^2 (n+1)]^{1/2}, \quad (16)$$

что совпадает с результатами, полученными в рамках модели ДК.

В противоположном пределе $f \gg 1$ можно пренебречь экспоненциально малыми слагаемыми $\sim R_n$ в формуле (16), что приводит к простому выражению

$$E_{ns}^{(0)} \cong n - f^2, \quad (17)$$

которое является асимптотически точным.

Как показано в работах [8—10], характерной особенностью энергетического спектра МДА является пересечение уровней разной четности, соответствующих одному квантовому числу n , причем число пересечений в точности равно n . Из формулы (15) следует, что спектр, найденный в нулевом приближении ОМ, также обладает этим свойством, причем точки пересечения определяются уравнением

$$\varepsilon^2 (R_n + R_{n+1})^2 (R_n R_{n+1} - R_{n, n+1}^2) - 4 R_n R_{n+1} = 0. \quad (18a)$$

Если учесть, что даже в ближайшей точке пересечения уровней величина $\exp(-2f^2) \ll 1$, то для приближенной оценки корней уравнения (18a) при $f \sim 1$ можно использовать более простое уравнение

$$R_n(f^2) = 0, \quad (18b)$$

представляющее собой полином n -ой степени относительно f^2 со знакопеременными коэффициентами. Решения этого уравнения, например, при $n=1$ и $n=2$ дают следующие значения для точек пересечения:

$$f_1^2 = \frac{1}{4}, \quad n=1; \quad f_{1,2}^2 = \frac{1}{4} (2 \pm \sqrt{2}), \quad n=2,$$

что можно сравнить с соответствующими точными значениями [10]:

$$\tilde{f}_1^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right); \quad \tilde{f}_{1,2}^2 = \frac{1}{4} \left[2 - \frac{3}{16} \varepsilon^2 \pm \sqrt{2 - \frac{\varepsilon^2}{8} + \frac{\varepsilon^4}{256}} \right].$$

Большой интерес представляет аналитическое выражение для энергии системы в области больших квантовых чисел ($n \gg 1$), которые существенны при рассмотрении взаимодействия атома с интенсивным электромагнитным полем. В этом пределе матричные элементы оператора $\hat{R}_1$ существенно упрощаются

$$\begin{aligned} R_n &= (-1)^n e^{-2f^2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(k!)^2 (n-k)!} \cdot (2f)^{2k} \cong \\ &\cong (-1)^n e^{-2f^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n!}{(k!)^2} \cdot (2f)^{2k} = (-1)^n J_0(4f\sqrt{n}) e^{-2f^2}; \\ R_{n, m+n} &\cong (-1)^n J_m(4f\sqrt{n}) e^{-2f^2}, \quad n \gg 1, m \ll n, \end{aligned}$$

где $J_m(z)$ — функция Бесселя порядка m .

В результате формула (15) принимает следующий вид:

$$E_{ns}^{(0)} \cong n - f^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon^2 J_1^2(4f\sqrt{n}) e^{-2f^2} + \left[1 - \varepsilon s (-1)^n J_0(4f\sqrt{n}) e^{-2f^2} \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (19)$$

который можно использовать для перехода к квазиклассическому пределу при описании поля.

В заключение подчеркнем, что возможности, связанные со свободой выбора представления для вектора состояния системы, которые позволили построить равномерно пригодное приближение для рассмотренной в работе системы, в значительной степени перекликаются с идеями ковариантного подхода, заложенными в трудах Ф. И. Федорова.

1. Allen L., Eberly J. H. Optical Resonance and Two Level Atoms. New York, 1975. P. 230.
2. Альперин М. М. и др. // Введение в физику двухуровневых систем. Киев, 1987. С. 183.
3. Reik H. G., Nusser H., Ribeiro A. A. // J. of Phys. A. 1982. V. 15. P. 3491.
4. Cirac J. I., Sanches-Soto L. L. // Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 3743.
5. Graham R., Hoehnerbach M. // Phys. Lett. A. 1984. V. 101. P. 61.
6. Amarante R. L. A. // Phys. Rev. A. 1987. V. 36. P. 2676.
7. Jaynes E. T., Cummings F. W. Proc. IEEE. 1953. V. 51. P. 126.
8. Schweber S. // Ann. Phys. (NY). 1967. V. 41. P. 205.
9. Kus M. // J. Math. Phys. 1985. V. 26. P. 2792.
10. Kus M., Lewenstein M. // J. Phys. A. 1986. V. 19. P. 305.
11. Feranchuk I. D., Komarov L. I. // Phys. Lett. A. 1982. V. 88. P. 212.
12. Same authors // J. of Phys. A. 1984. V. 17. P. 3111.
13. Same authors // Proceedings of The Conference QS-94. Singapour, 1995. P. 220.
14. Feranchuk I., Komarov L., Nechipor I. // J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 3849.

Поступила в редакцию 25.05.95.

УДК 535.34

С. М. КАРПУК, О. Г. РОМАНОВ, А. Л. ТОЛСТИК

ИССЛЕДОВАНИЕ УГЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕВЫРОЖДЕННОГО ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В РЕЗОНАНСНЫХ СРЕДАХ

It has been shown that the change in angle of reading the dynamic holograms by a light beam with double frequency might result in the realization of two schemes of the radiation frequency conversion which are based on linear and quadratic recording of dynamic holograms.

Невырожденное четырехволновое взаимодействие позволяет осуществить в реальном времени частотное преобразование когерентных изображений. Метод основан на использовании излучения разных частот при записи и считывании объемных динамических дифракционных структур, фиксируемых в нелинейных средах. При изменении соотношения частот в соответствии с условиями брэгговской дифракции необходимо изменять направление распространения считывающей волны, причем условие пространственного синхронизма может быть достигнуто только для заранее определенного направления плоской сигнальной волны [1, 2]. В работе [3] предложен нетрадиционный подход, основанный на квадратичной записи динамических голограмм и позволяющий осуществить фазовое сопряжение при одновременном удвоении частоты световой волны. При этом считывающая и опорная волны распространяются точно навстречу друг другу независимо от направления сигнальной волны.

В данной работе реализованы обе схемы частотного преобразования сигнала из ИК области в видимую за счет плавной перестройки направления распространения считывающей волны. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. Динамическая голограмма записывается сигнальной $E_s = A_s \exp [i(\mathbf{k}_s \mathbf{r} - \omega t + \varphi_s)]$ и опорной $E_1 = A_1 \exp [i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t + \varphi_1)]$ волнами, а считывание осуществляется волной $E_2 = A_2 \exp [i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - 2\omega t + \varphi_2)]$. Использовалось моноимпульсное излучение лазера на алюмоиттриевом гранате ($\lambda=1,06$ мкм, $\tau=9$ нс), соответствующее максимуму полосы поглощения раствора полиметинового красителя № 3274У в изобутиловом спирте. Восстановление голограммы осу-