БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе и образовательным инновациям
_______________ О.Н. Здрок
«29» апреля 2020 г.

Регистрационный № УД-8340/уч.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 08 Математика и информационные технологии (по направлениям)

Направления специальности:

1-31 03 08-01 Веб-программирование и интернет-технологии
1-31 03 08-02 Математическое и программное обеспечение мобильных устройств

2020 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта высшего образования ОСВО 1-31 03 08-2014 от 09.07.2014 и учебных планов № G31-195/уч., № G31-196/уч., G31и-207/уч., № G31з-197/уч., № G31з-198/уч., № G31з-199/уч., № G31з-200/уч. от 30.05.2014г.

СОСТАВИТЕЛИ:

Василий Михайлович Волков, заведующий кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, доцент;
Алексей Иванович Азаров, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;
Марина Викторовна Игнатенко, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;
Татьяна Семеновна Якименко, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТ
Леонид Александрович Янович, главный научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси, член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования БГУ
(протокол № 6 от 13.02.2020г.)

Научно-методическим Советом БГУ
(протокол № 4 от 25.03.2020г.)

Заведующий кафедрой ____________________ В.М. Волков

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В настоящее время численные методы являются одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики. Это связано как с бурным развитием вычислительной техники, наращиванием ее мощности, так и широким применением средств математического моделирования практически во всех сферах жизнедеятельности человека для оптимизации исследуемого объекта или прогнозирования ситуации. Поэтому в последнее время разрабатывается много новых численных процедур, применяемых как к новым, так и классическим объектам исследования, при этом многие классические алгоритмы решения задач претерпевают изменения с целью улучшения их вычислительных свойств.

Все это определяет важность учебной дисциплины «*Численные методы*» в учебном процессе, а также обуславливает необходимость внесения своевременных изменений и дополнений в ее содержание.

Учебная программа «*Численные методы*» разработана для студентов II-III курса *очной* (дневной), III–V курса *заочной* формы обучения, в том числе на основе среднего специального образования (с сокращенным сроком обучения 3,5 года), по специальности 1-31 03 08 «Математика и информационные технологии (по направлениям)» механико-математического факультета Белорусского государственного университета.

Центральной идеей образования по дисциплине “*Численные методы*” является необходимость обучения студентов современным подходам и численным методам решения прикладных задач, а также принципами их грамотного практического использования.

Второй важнейшей идеей обучения является подготовка студентов к практической работе в области численного моделирования научных и прикладных математических задач естествознания.

Цели и задачи учебной дисциплины

Дисциплина «*Численные методы*» имеет прикладную направленность. ***Основная цель учебной дисциплины*** заключаются в освоении учащимися современной технологии математического моделирования, основанной на использовании численных методов и прикладного программного обеспечения.

Задачи дисциплины состоят в изучении основных принципов построения численных методов и оценки их вычислительных качеств, изучении основных методов численного решения задач линейной алгебры, анализа и дифференциальных уравнений, развития умения и навыков выбора адекватного алгоритма, его программной реализации, интерпретации результатов численных расчетов и степени их достоверности.

Опыт преподавания дисциплины «*Численные методы*» на механико-математическом факультете БГУ показывает, что обучение на практических занятиях должно проводиться в двух направлениях: изучения основ численных методов на примере решения теоретических задач и выполнения расчетных работ с использованием компьютеров. При этом только непосредственное общение исследователя с конкретными задачами кроме возможности закрепить лекционный материал, помогает дать общее представление и выработать необходимую интуицию для нахождения эффективных путей решения задач вычислительной математики.

В последние годы высокая техническая оснащенность и рост возможностей вычислительной техники позволяют существенно обогатить практическую сторону вычислительного практикума. Использование современных компьютерных математических систем (Maple, MathCAD, MatLAB, Mathematica и др.), а, также стандартных библиотек численного анализа позволяют, не углубляясь в знание частных вопросов, сосредоточиться непосредственно на объекте (цели) исследования, ускорить процесс получения решения типовых задач. Как следствие, решение большего числа разнообразных задач способствует приобретению студентами некоторого опыта практических расчетов. При этом спектр рассматриваемых проблем расширяется от типичных до достаточно сложных в вычислительном отношении задач, требующих для численной реализации использования мощных компьютеров. Появляется возможность уделять больше внимания анализу характеристик вычислительных алгоритмов и связи практических результатов с полученными теоретическими оценками.

Более того, часть времени, освобождающегося за счет использования современной вычислительной техники, позволяет уделять больше внимания детальному рассмотрению теоретических задач вычислительной математики. Это несомненно является важным моментом вычислительного практикума, поскольку как правило именно такого рода задачи помогают усваиванию, закреплению и более полному пониманию основных определений, понятий, результатов и алгоритмов вычислительной математики. Кроме того, решение теоретических задач позволяет установить связь между различными разделами математики, в частности, численного анализа, и, как следствие, способствует полноте восприятия курса по численным методам. При этом значительно возрастает роль самостоятельной работы студентов над предметом, без чего его успешное освоение представляется маловероятным. Общая оценка качества усвоения студентами учебного материала осуществляется в ходе выполнения индивидуальных заданий.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Программа учебной дисциплины «*Численные методы*» составлена с учетом межпредметных связей и программ по смежным дисциплинам. Её изучение базируется на знаниях отдельных разделов из университетских курсов по «Алгебре и теории чисел», «Геометрии», «Математическому анализу», «Функциональному анализу», «Дифференциальным уравнениям» и «Уравнениям математической физики».

В основу учебной программы дисциплины «*Численные методы*» положены одноименные программы, разработанные академиками А.А.Самарским и Н.С. Бахваловым (МГУ им. М.В. Ломоносова).

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Дисциплина «*Численные методы*» относится к циклу специальных дисциплин компонента учреждения высшего образования.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины должно обеспечить формирование у студентов следующих академических и профессиональных компетенций:

академические компетенции:

– АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

– АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

– АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

– АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

профессиональные компетенции:

– ПК-1. Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий.

– ПК-3. Использовать и развивать современные достижения информационных технологий, в том числе в области математики.

– ПК-5. Проводить исследования в области решения научно-производственных задач и оценивать эффективность таких решений.

– ПК-9. Применять в производственной и научной деятельности основные законы и методы естественнонаучных дисциплин.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– источники погрешности численных результатов;

– понятия устойчивости, сходимости и вычислительной сложности численных алгоритмов;

– требования корректности постановки задачи;

– основные приемы оценки погрешности численных методов;

– назначение и вычислительные качества наиболее популярных численных методов интерполирования (формулы Лагранжа и Ньютона, метод наилучшего приближения в среднеквадратичной норме), приближенного интегрирования (формулы трапеций и Симпсона, методы типа Гаусса наивысшей алгебраической степени точности), для задач алгебры, дифференциальных уравнений (метод Гаусса, LU-факторизация, итерационные методы Ричардсона, Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации, минимальных невязок, сопряженных градиентов, методы Рунге-Кутты и Адамса, метод стрельбы, быстрое дискретное преобразование Фурье);

– достоинства и недостатки явных и неявных численных методов решения дифференциальных уравнений;

– современные тенденции в развитии методов численного решения математических и прикладных задач;

уметь:

– оценить корректность постановки задачи;

– выбрать адекватный метод для численного решения поставленной задачи;

– использовать численные методы для решения математических задач алгебры, анализа и дифференциальных уравнений;

– анализировать достоверность и трактовать численные результаты;

владеть:

– навыками работы с современными программными средствами численного решения математических и прикладных задач;

– навыками программирования численных алгоритмов;

– основными приемами априорной и апостериорной оценки погрешности численного решения задач алгебры и анализа.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина «*Численные методы*» рассчитана на 308 часов в 3–6 семестрах, из них 174 аудиторных часа, в том числе 68 часов лекций, 90 часов лабораторных занятий и 16 часов ауд. контроля УСР для очной (дневной) формы обучения. Рекомендуется следующее ***распределение часов*** по курсам и видам учебной работы (с применением дистанционных образовательных технологий):

	Трудоемкость, зач. ед.	Экз., сем.	Зач., сем.	Всего часов	В том числе аудиторных	Из них		
						Лекций	Лабораторных занятий	Ауд. контроль УСР
3 сем.	1		3	54	36	18	14	4
4 сем.	1		4	52	34	16	14	4
5 сем.	2		5	86	54	18	32	4
6 сем.	3	6		116	50	16	30	4
Всего	**7**			**308**	**174**	**68**	**90**	**16**

Для полной и сокращенной заочной формы обучения объем дисциплины составляет 308 часов в 6–9 и 4–7 семестрах соответственно, из них 264 часа самостоятельной работы и 44 часа аудиторных занятий, в том числе 20 часов лекций и 24 часа лабораторных занятий. В рамках аудиторного контроля управляемой самостоятельной работы предусмотрены две контрольные работы в 7–8 либо 5–6 семестрах для полной или сокращенной формы обучения. Рекомендуется следующее ***распределение часов*** по курсам и видам учебной работы (с применением дистанционных образовательных технологий):

Заочная форма обучения, 5 лет /3,5 года	Трудо-емкость, зач. ед.	Экз., сем.	Зач., сем.	Всего часов	В том числе ауди-торных	Из них		
						Лекций	Лабора-торных занятий	Контр. раб.
6 сем. / 4 сем.	2		4	90	12	6	6	
7 сем. / 5 сем.	2		5	112	20	8	12	№1
8 сем. /6 сем.	2		6	66	12	6	6	№2
9 сем. /7 сем.	1	7		40				
Всего	**7**			**308**	**44**	**20**	**24**	**2**

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Введение

1.1 Об основных задачах и содержании вычислительной математики.

1.2 Содержание и назначение вычислительного эксперимента в трактовке А.А. Самарского.

Тема 2. Элементы теории погрешностей

2.1 Значащие и верные цифры в записи приближенного числа. Абсолютная и относительная погрешности. Погрешности арифметических операций.

2.2 Прямая и обратная задачи теории погрешностей.

2.3 Примеры неустойчивых алгоритмов.

2.4 Погрешность вычислений на ЭВМ. Погрешность округлений и компьютерная запись чисел.

Тема 3. Интерполирование и приближение функций

3.1 Системы функций Чебышева. Интерполирование обобщенными многочленами.

3.2 Алгебраическое интерполирование. Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа.

3.3 Конечные разности.

3.4 Разделенные и разности, их свойства.

3.5 Интерполяционный многочлен Ньютона.

3.6. Представление погрешности интерполирования.

3.7. Минимизация погрешности интерполирования дискретно заданных функций.

3.8 Многочлены Чебышева.

3.9 Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке.

3.10 Интерполирование по равноотстоящим узлам.

3.11 Интерполирование сплайнами.

3.12 Интерполяционная задача Эрмита.

3.13 Тригонометрическое интерполирование. Дискретное и быстрое преобразование Фурье.

3.14 Численное дифференцирование и оценка его погрешности.

3.15 Задача аппроксимации. Метод наименьших квадратов.

Тема 4. Приближенное вычисление интегралов

4.1 Квадратурные формулы общего вида. Квадратурные формулы, основанные на алгебраическом интерполировании.

4.2 Простейшие квадратурные правила Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования.

4.3 Составные квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования.

4.4 Правила Рунге и Эйткена практической оценки погрешности квадратурных формул.

4.5 Квадратурные формулы типа Гаусса. Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы.

4.6 Частные случаи квадратур Гауссова типа. Вычисление интегралов от функций специального вида.

Тема 5. Обобщение интерполирования и численного интегрирования на случай функций многих переменных

5.1. Интерполирование многочленами многих переменных.

5.2. Численное дифференцирование функций многих переменных.

5.3 Вычисление кратных интегралов. Метод Монте-Карло.

Тема 6. Численные методы решения систем ЛАУ

6.1 Нормы векторов и матриц. Оценка погрешности решения систем ЛАУ. Число обусловленности.

6.2 Прямые методы. Метод Гаусса. Выбор ведущего элемента.

6.3 LU факторизация. Разложение Холецкого. Метод прогонки и ортогонализации.

6.4 Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации.

6.5 Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра.

6.6 Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации.

6.7 Методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов.

Тема 7. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц

7.1 Свойства собственных векторов и собственных значений матриц. Преобразование подобия.

7.2 Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского.

7.3 Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений.

7.4 Метод вращений. Понятие о QR алгоритме.

Тема 8. Решение нелинейных уравнений и систем

8.1 Отделение корней. Метод дихотомии. Кратные корни. Корни полиномов.

8.2 Метод простой итерации. Условие сходимости и скорость сходимости.

8.3 Метод Ньютона. Квадратичная сходимость. Модификации метода Ньютона.

8.4 Понятие о методах нелинейной оптимизации. Градиентные методы.

8.5 Обзорное занятие по теме «Численные методы линейной алгебры и методы решения нелинейных уравнений»

Тема 9. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

9.1 Одношаговые методы. Метод Эйлера. Оценка скорости сходимости.

9.2 Методы Рунге-Кутты.

9.3 Многошаговые методы. Устойчивость, условие корней. Метод Адамса.

9.4 Понятие о жестких системах ОДУ.

А-устойчивость. Метод Гира.

Тема 10. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

10.1 Разностный метод решения краевой задачи для уравнения второго порядка.

10.2 Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяционный метод. Понятие о компактных разностных схемах. Метод Галеркина.

10.3 Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем.

10.4 Разностные методы решения краевых задач для нелинейных ОДУ.

10.5 Методы редукции краевых задач к задачам Коши. Методы дифференциальной прогонки и метод стрельбы.

Тема 11. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма

11.1 Основные подходы к решению интегральных уравнений. Метод Фурье для численного решения интегральных уравнений типа свертки.

Тема 12. Построение и исследование разностных схем для задач математической физики

12.1 Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Канонический вид и условие устойчивости двухслойных разностных схем. Устойчивость, аппроксимация и сходимость.

12.2 Разностные схемы для уравнения переноса. Спектральный критерий устойчивости.

12.3 Разностные схемы для эллиптических уравнений. Принцип максимума

12.4 Обзорное занятие по теме «Методы численного решения дифференциальных уравнений»

12.5 Реализация разностных схем. Метод переменных направлений и метод дробных шагов.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения образования с применением дистанционных образовательных технологий

Номер темы	Название темы	Количество аудиторных часов					Литература	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Количество часов УСР		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**Введение**	**1**					**[2]**	
1.1 1.2	Об основных задачах и содержании вычислительной математики Содержание и назначение вычислительного эксперимента в трактовке А.А. Самарского	1					[2]	Опрос
2	**Элементы теории погрешностей**	**1**			**2**		**[1], [3]**	
2.1 2.2 2.3 2.4	Значащие и верные цифры в записи приближенного числа. Абсолютная и относительная погрешности. Погрешности арифметических операций Прямая и обратная задачи теории погрешностей Примеры неустойчивых алгоритмов Погрешность вычислений на ЭВМ. Погрешность округлений и компьютерная запись чисел	1			2		[1], [3]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
3	**Интерполирование и приближение функций**	**16**			**14**	**4**	**[1], [2], [3], [12], [17]**	
3.1	Системы Функций Чебышева. Интерполирование обобщенными многочленами	1			2		[2], [3], [12], [17]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по

								домашнему заданию
3.2	Алгебраическое интерполирование. Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа	1			1		[2], [3], [12], [17]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
3.3	Конечные разности	1					[2], [3], [12], [17]	Опрос
3.4	Разделенные и разности, их свойства	2					[2], [3], [12], [17]	Опрос
3.5	Интерполяционный многочлен Ньютона	1			1	2	[2], [3], [12], [17]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
3.6 3.7	Представление погрешности интерполирования Минимизация погрешности интерполирования дискретно заданных функций	1					[2], [12], [17]	Опрос
3.8	Многочлены Чебышева	1					[2]	Опрос
3.9	Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке	1			2	2	[2], [17]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
3.10	Интерполирование по равноотстоящим узлам	1					[2], [3], [12], [17]	Опрос
3.11	Интерполирование сплайнами	1			2		[2], [3], [17]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
3.12	Интерполяционная задача Эрмита	1					[2], [17]	Опрос
3.13	Тригонометрическое интерполирование. Дискретное и быстрое преобразование Фурье	1			1		[1], [2]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
3.14	Численное дифференцирование и оценка его погрешности	1			1		[2], [17]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию

3.15	Задача аппроксимации. Метод наименьших квадратов	2			2		[1], [2], [12]	Опрос, отчет по лабораторной работе, коллоквиум по теме 3, математический диктант по теме 3
								Зачет
4	**Приближенное вычисление интегралов**	**10**			**10**	**4**	**[1], [2], [3], [12], [17]**	
4.1	Квадратурные формулы общего вида. Квадратурные формулы, основанные на алгебраическом интерполировани	1					[2], [3], [12], [17]	Опрос
4.2	Простейшие квадратурные правила Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования	1			2		[2], [11], [17]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
4.3	Составные квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования	2			2	2	[2], [3], [12], [17]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
4.4	Правила Рунге и Эйткена практической оценки погрешности квадратурных формул	2			2		[1], [2]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
4.5	Квадратурные формулы типа Гаусса. Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы	2			2	2	[2], [3], [12], [17]	Опрос, отчет по лабораторной работе, коллоквиум по темам 4.1-4.5
4.6	Частные случаи квадратур гауссова типа. Вычисление интегралов от функций специального вида	2			2		[2], [3], [12], [17]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
5	**Обобщение интерполирования и численного интегрирования на случай функций многих переменных**	**6**			**4**		**[1], [2], [17]**	
5.1 5.2	Интерполирование многочленами многих переменных Численное дифференцирование функций многих переменных	4			2		[2], [17]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию

5.3	Вычисление кратных интегралов. Метод Монте-Карло	2			2		[1], [2], [17]	Опрос, отчет по лабораторной работе, математический диктант по темам 4-5
								Зачет
ВСЕГО (II курс)		**34**			**28**	**8**		**2 зачета**
6	**Численные методы решения систем ЛАУ**	**8**			**14**	**2**	**[1],[3],[5], [20]**	
6.1	Нормы векторов и матриц. Оценка погрешности решения систем ЛАУ. Число обусловленности	1			3		[1], [3],[5],[20]	Опрос, отчет по практическим заданиям
6.2	Прямые методы. Метод Гаусса. Выбор ведущего элемента	1			2		[5],[20]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
6.3	LU факторизация. Разложение Холецкого. Метод прогонки и ортогонализации	2			3		[5],[20]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
6.4	Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации	1					[5],[20]	Опрос
6.5	Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра	1			2	1	[1],[5]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
6.6	Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, Последовательной верхней релаксации	1			2	1	[1],[5]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
6.7	Методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов	1			2		[1]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
7	**Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц**	**4**			**6**	**1**	**[1],[3],[20]**	

7.1	Свойства собственных векторов и собственных значений матриц. Преобразование подобия				2		[1],[20]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
7.2	Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского	1			2		[1], [3], [20]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
7.3	Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений	1			2	1	[1], [3], [20]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
7.4	Метод вращений. Понятие о QR алгоритме	1					[1],[20]	Опрос
8	**Решение нелинейных уравнений и систем**	**6**			**12**	**1**	**[1],[3],[5], [10]**	
8.1	Отделение корней. Метод дихотомии. Кратные корни. Корни полиномов	1			2		[1],[5],[10]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
8.2	Метод простой итерации. Условие сходимости и скорость сходимости	1			4		[1],[3],[5], [10]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
8.3	Метод Ньютона. Квадратичная сходимость. Модификации метода Ньютона	2			4	1	[1],[3],[5], [10]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
8.4	Понятие о методах нелинейной оптимизации. Градиентные метод	1			2		[1],[3]	Опрос, отчет по лабораторной работе
8.5	Обзорные занятия по теме «Численные методы линейной алгебры и методы решения нелинейных уравнений»	1						Коллоквиум по темам 6-8
								Зачет
9	**Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений**	**4**			**10**	**1**	**[1],[3],[5], [10]**	
9.1	Одношаговые методы. Метод Эйлера. Оценка скорости сходимости	1			2		[3],[5],[10]	Опрос, отчет по лабораторной работе

9.2	Методы Рунге-Кутты	1			3	1	[3],[5],[10]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
9.3	Многошаговые методы. Устойчивость, условие корней. Метод Адамса	1			2		[1],[3],[5]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
9.4	Понятие о жестких системах ОДУ. А-устойчивость. Метод Гира	1			3		[1],[3],[5]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
10	**Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений**	**6**			**10**	**1**	**[1],[4],[5], [10]**	
10.1	Разностный метод решения краевой задачи для уравнения второго порядка	1			3		[4],[5]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
10.2	Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяционный метод. Понятие о компактных разностных схемах. Метод Галеркина	2			3		[4],[5]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
10.3	Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем	1			2	1	[4],[5]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
10.4	Разностные методы решения краевых задач для нелинейных ОДУ	1			2		[4],[5],[10]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
10.5	Методы редукции краевых задач к задачам Коши. Методы дифференциальной прогонки и метод стрельбы	1					[1],[4],[10]	Опрос
11	**Численное решение интегральных уравнений Фредгольма**	**1**					**[1],[3]**	
11.1	Основные подходы к решению интегральных уравнений. Метод Фурье для численного решения интегральных уравнений типа свертки	1					[1],[3]	Опрос
12	**Построение и исследование разностных схем для задач математической физики**	**5**			**10**	**2**	**[4],[5],[10], [18], [20]**	

12.1	Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Канонический вид и условие устойчивости двухслойных разностных схем	1			4		[4],[5],[10]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
12.2	Разностные схемы для уравнения переноса. Спектральный критерий устойчивости	1			2	2	[4],[5],[10]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
12.3	Разностные схемы для эллиптических уравнений. Принцип максимума	1			2		[4],[5], [18]	Опрос, отчет по лабораторной работе
12.4.	Обзорное занятие по теме «Методы численного решения дифференциальных уравнений»	1						Контрольный опрос
12.5	Реализация разностных схем. Метод переменных направлений и метод дробных шагов	1			2		[4],[5], [18]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию, коллоквиум по темам 9, 10, 12
								Экзамен
ВСЕГО (III курс)		**34**			**62**	**8**		**1 зачет, 1 экзамен**
ИТОГО		**68**			**90**	**16**		**3 зачета, 1 экзамен**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Заочная и заочная сокращенная формы получения образования с применением дистанционных образовательных технологий

Номер темы	Название темы	Количество аудиторных часов					Литература	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Контр. работы		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**Введение**						**[2]**	
1.1. 1.2	Об основных задачах и содержании вычислительной математики Содержание и назначение вычислительного эксперимента в трактовке А.А. Самарского						[2]	
2	**Элементы теории погрешностей**						**[1], [3]**	
2.1 2.2. 2.3 2.4	Значащие и верные цифры в записи приближенного числа. Абсолютная и относительная погрешности. Погрешности арифметических операций Прямая и обратная задачи теории погрешностей Примеры неустойчивых алгоритмов Погрешность вычислений на ЭВМ. Погрешность округлений и компьютерная запись чисел						[1], [3]	
3	**Интерполирование и приближение функций**	**4**			**6**		**[1], [2], [3], [12], [17]**	

3.1	Системы Функций Чебышева. Интерполирование обобщенными многочленами	0,5					[2], [3], [12], [17]	Опрос
3.2	Алгебраическое интерполирование. Построение интерполяционного многочлена в форме Лагранжа	0,5			2		[2], [3], [12], [17]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
3.3	Конечные разности	0,5					[2], [3], [12], [17]	
3.4	Разделенные и разности, их свойства	0,5					[2], [3], [12], [17]	
3.5	Интерполяционный многочлен Ньютона	0,5			2		[2], [3], [12], [17]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
3.6 3.7	Представление погрешности интерполирования Минимизация погрешности интерполирования дискретно заданных функций	0,5					[2], [12], [17]	
3.8	Многочлены Чебышева	0,5					[2]	
3.9	Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке	0,5			2		[2], [17]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
3.10	Интерполирование по равноотстоящим узлам						[2], [3], [12], [17]	
3.11	Интерполирование сплайнами						[2], [3], [17]	
3.12	Интерполяционная задача Эрмита						[2], [17]	
3.13	Тригонометрическое интерполирование. Дискретное и быстрое преобразование Фурье						[1], [2]	
3.14	Численное дифференцирование и оценка его погрешности						[2], [17]	

3.15	Задача аппроксимации. Метод наименьших квадратов						[1], [2], [12]	
4	**Приближенное вычисление интегралов**	**2**					**[1], [2], [3], [12], [17]**	
4.1	Квадратурные формулы общего вида. Квадратурные формулы, основанные на алгебраическом интерполировани	0,5					[2], [3], [12], [17]	
4.2	Простейшие квадратурные правила Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования	0,5					[2], [11], [17]	
4.3	Составные квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования	0,5					[2], [3], [12], [17]	
4.4	Правила Рунге и Эйткена практической оценки погрешности квадратурных формул						[1], [2]	
4.5	Квадратурные формулы типа Гаусса. Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы	0,5					[2], [3], [12], [17]	Опрос
4.6	Частные случаи квадратур гауссова типа. Вычисление интегралов от функций специального вида						[2], [3], [12], [17]	
5	**Обобщение интерполирования и численного интегрирования на случай функций многих переменных**						**[1], [2], [17]**	
5.1 5.2	Интерполирование многочленами многих переменных Численное дифференцирование функций многих переменных						[2], [17]	
5.3	Вычисление кратных интегралов. Метод Монте-Карло						[1], [2], [17]	
ВСЕГО (III курс)		**6**			**6**			**Зачет**
6	**Численные методы решения систем ЛАУ**	**4**			**6**		**[1],[3],[5], [20]**	
6.1	Нормы векторов и матриц. Оценка погрешности решения систем ЛАУ. Число обусловленности	1			1		[1], [3],[5],[20]	

6.2	Прямые методы. Метод Гаусса. Выбор ведущего элемента	0,5			1		[5],[20]	
6.3	LU факторизация. Разложение Холецкого. Метод прогонки и ортогонализации	0,5			1		[5],[20]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
6.4	Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации	0,5			1		[5],[20]	
6.5	Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра	0,5			1		[1],[5]	
6.6	Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, Последовательной верхней релаксации	0,5			0,5		[1],[5]	
6.7	Методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов	0,5			0,5		[1]	Опрос, отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
7	**Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц**	**2**			**4**		**[1],[3],[20]**	
7.1	Свойства собственных векторов и собственных значений матриц. Преобразование подобия	0,5			1		[1],[20]	
7.2	Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского	0,5			1		[1], [3], [20]	
7.3	Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений	0,5			1		[1], [3], [20]	
7.4	Метод вращений. Понятие о QR алгоритме	0,5			1		[1],[20]	Отчет по лабораторной работе, отчет по домашнему заданию
8	**Решение нелинейных уравнений и систем**	**2**			**2**		**[1],[3],[5], [10]**	
8.1	Отделение корней. Метод дихотомии. Кратные корни. Корни полиномов	0,5			0,5		[1],[5],[10]	Опрос, отчет по домашнему заданию

8.2	Метод простой итерации. Условие сходимости и скорость сходимости	0,5			0,5		[1],[3],[5], [10]	
8.3	Метод Ньютона. Квадратичная сходимость. Модификации метода Ньютона	0,5			0,5		[1],[3],[5], [10]	
8.4	Понятие о методах нелинейной оптимизации. Градиентные метод	0,5			0,5		[1],[3]	Отчет по лабораторной работе, контрольная работа № 1 по темам 6-8
								Зачет
9	**Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений**	**2**			**2**		**[1],[3],[5], [10]**	
9.1	Одношаговые методы. Метод Эйлера. Оценка скорости сходимости	0,5			0,5		[3],[5],[10]	
9.2	Методы Рунге-Кутты	0,5			0,5		[3],[5],[10]	
9.3	Многошаговые методы. Устойчивость, условие корней. Метод Адамса	0,5			0,5		[1],[3],[5]	Опрос, отчет по домашнему заданию
9.4	Понятие о жестких системах ОДУ. А-устойчивость. Метод Гира	0,5			0,5		[1],[3],[5]	Отчет по лабораторной работе
10	**Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений**	**2**			**1**		**[1],[4],[5], [10]**	
10.1	Разностный метод решения краевой задачи для уравнения второго порядка	0,5					[4],[5]	
10.2	Методы построения разностных схем. Интегро-интерполяционный метод. Понятие о компактных разностных схемах. Метод Галеркина	0,5					[4],[5]	Опрос
10.3	Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем	0,5			0,5		[4],[5]	
10.4	Разностные методы решения краевых задач для нелинейных ОДУ				0,5		[4],[5],[10]	

10.5	Методы редукции краевых задач к задачам Коши. Методы дифференциальной прогонки и метод стрельбы	0,5					[1],[4],[10]	Отчет по лабораторной работе, контрольная работа № 2 по темам 9-10
11	**Численное решение интегральных уравнений Фредгольма**				**1**		**[1],[3]**	
11.1	Основные подходы к решению интегральных уравнений. Метод Фурье для численного решения интегральных уравнений типа свертки				1		[1],[3]	Опрос
12	**Построение и исследование разностных схем для задач математической физики**	**2**			**2**		**[4],[5],[10], [18], [20]**	
12.1	Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Канонический вид и условие устойчивости двухслойных разностных схем	0,5			0,5		[4],[5],[10]	
12.2	Разностные схемы для уравнения переноса. Спектральный критерий устойчивости	0,5			0,5		[4],[5],[10],[21]	
12.3	Разностные схемы для эллиптических уравнений. Принцип максимума	0,5			0,5		[4],[5], [18]	Опрос, отчет по домашнему заданию
12.5	Реализация разностных схем. Метод переменных направлений и метод дробных шагов	0,5			0,5		[4],[5], [18]	Отчет по лабораторной работе
								Зачет
ВСЕГО (IV курс)		**14**			**18**	**2**		**2 зачета**
ВСЕГО (V курс)								**Экзамен**
ИТОГО		**20**			**24**	**2**		**3 зачета, 1 экзамен**

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. 632 с.
2. *Игнатенко, М. В.* Методы вычислений. Интерполирование и интегрирование: курс лекций / М. В. Игнатенко. – Минск: БГУ, 2006. 116 с.
3. *Монастырный, П. И.* Сборник задач по методам вычислений: учебное пособие / А.И. Азаров, В.А. Басик, М.В. Игнатенко и др./ под ред. П.И. Монастырного. – Минск: Издательский центр БГУ, 2007. 376 с.
4. *Самарский, А. А.* Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989. 432 с.

Дополнительная литература

5. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы. Решения задач и упражнения: Учебное пособие / Н.С. Бахвалов, А. А Корнев, Е. В. Чижонков. – М.: Бином, 2016. – 352 с.
6. Волков, В. М. Численные методы. В 2 ч. / В. М. Волков. – Минск: БГУ, 2016. – Ч. 1. – 88 с.
7. *Березин, И. С.* Методы вычислений. В 2 т. / И. С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. Т. 2. – 640 с.
8. *Годунов, С. К.* Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
9. *Калиткин, Н. Н.* Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Academia, 2018. – 96 с.
10. *Крылов, В. И.* Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
11. *Крылов, В. И.* Вычислительные методы. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1976. – Т. 1. – 304 с.
12. *Крылов, В. И.* Вычислительные методы. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 400 с.
13. *Крылов, В. И.* Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Мн.: Наука и техника, 1982. – 286 с.
14. *Крылов, В. И.* Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Мн.: Наука и техника, 1986. – 311 с.
15. *Марчук, Г. И.* Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1989. – 608 с.
16. *Мысовских, И. П.* Лекции по методам вычислений: учеб. пособие / И. П. Мысовских. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998. – 470 с.
17. Самарский, А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Альянс, 2016. – 432 с.

18. *Самарский, А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.

19. *Самарский, А. А.* Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1987. – 600 с.

20. *Фаддеев, Д. К.* Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В. П. Фаддеева. – М.: Физматгиз, 1963. – 386 с.

21. *Волков, В. М.* Численный анализ и оптимизация/ В. М.Волков, О. Л.Зубко, И. Н. Катковская, И. Л. Ковалева, В. Г. Кротов, П. Лима. – Минск: Белгослес, 2017. – 207 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Рекомендуются следующие формы диагностики компетенций.

Устная форма

1. Опрос.
2. Коллоквиум.

Письменная форма

1. Опрос.
2. Математический диктант.
3. Контрольная работа.

Устно-письменная форма

1. Отчеты по лабораторным работам с их устной защитой.
2. Отчеты по домашним заданиям, с их устной защитой.
3. Зачет.
4. Экзамен.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Численные методы» учебным планом предусмотрен в 3–5 семестрах дневной формы обучения – зачет, в 6 семестре – экзамен.

На заочной форме обучения в 6–8 семестрах – зачет, в 9 семестре – экзамен. На заочной сокращенной форме обучения в 4–6 семестрах – зачет, в 7 семестре – экзамен.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Рекомендуются следующие примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в оценку текущей успеваемости:

- ответы на аудиторных занятиях – 5 %;
- отчеты по лабораторным работам – 40 %;
- отчеты по домашним заданиям – 20 %;
- математический диктант – 15 %;
- коллоквиум/контрольная работа – 20%.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов Вес оценки текущей успеваемости составляет 40 %, экзаменационной – 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

2 курс, 3-4 семестр, 8 часов УСР

Тема 3.5. Интерполяционный многочлен Ньютона (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 6, задачи и упражнения 18–26.

Форма контроля – опрос в письменной форме.

Тема 3.9. Минимизация погрешности интерполирования для функций, заданных на отрезке (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 6, задачи и упражнения 43–62.

Форма контроля – опрос в письменной форме.

Тема 4.3. Составные квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Погрешность интегрирования (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 8, задачи и упражнения 17-117.

Форма контроля – опрос в письменной форме.

Тема 4.5. Квадратурные формулы типа Гаусса. Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 8, задачи и упражнения 118-164.

Форма контроля – опрос в письменной форме.

Тема 6.5. Сходимость итерационных методов. Оценка числа итераций. Выбор оптимального параметра (1 ч.)

Исследовать зависимость количество итераций для достижения заданной точности в методе сопряженных градиентов в зависимости от размерности матрицы (матрица Пуассона, функции МАТЛАБ pcg, gallery).

Оценить зависимость числа обусловленности матрицы Пуассона от размерности матрицы (функции МАТЛАБ gallery, condest).

Форма контроля – опрос в письменной форме.

Тема 6.6. Неявные итерационные методы. Понятие о переобуславливателе. Методы Якоби, Зейделя, последовательной верхней релаксации (1 ч.)

Исследовать зависимость количество итераций для достижения заданной точности в методе сопряженных градиентов с переобусловливателем iLU в зависимости от размерности матрицы (матрица Пуассона, функции МАТЛАБ pcg, gallery, ilu).

Форма контроля – опрос в письменной форме.

Тема 7.3. Степенной метод нахождения максимальных по модулю собственных значений (1 ч.)

Построить зависимость максимального собственного значения матрицы Пуассона от ее размерности (функции МАТЛАБ eigs, gallery).

Форма контроля – опрос в письменной форме.

Тема 8.3. Метод Ньютона. Квадратичная сходимость (1 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 5.2, задачи и упражнения 55-62.

Форма контроля – опрос в письменной форме.

Тема 9.2. Методы Рунге-Кутты (1 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 9.4, задачи и упражнения 30-44.

Форма контроля – опрос в письменной форме.

Тема 10.3. Аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности линейных разностных схем (1 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным в сборнике задач [3]: гл. 10.5, задачи и упражнения 63-72.

Форма контроля – опрос в письменной форме.

Тема 12.2. Разностные схемы для уравнения переноса. Спектральный критерий устойчивости (2 ч.)

В качестве заданий для УСР студентам рекомендуется выполнить задачи и упражнения, аналогичные приведенным учебном пособии [21]: гл. 3.1, упражнения 3.3 (1-7).

Форма контроля – опрос в письменной форме.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются

1) эвристический подход:

- осуществление студентами личностно-значимых открытий окружающего мира;
- демонстрация многообразия решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем;
- творческую самореализация обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;
- индивидуализация обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;

2) практико-ориентированный подход:

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентация на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;
- использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

3) метод анализа конкретных ситуаций (кейс-метод):

- приобретение студентом знаний и умений для решения практических задач;
- анализ ситуации, используя профессиональные знания, собственный опыт, дополнительную литературу и иные источники.

4) метод проектного обучения:

- способ организации учебной деятельности студентов, развивающий актуальные для учебной и профессиональной деятельности навыки планирования, самоорганизации, сотрудничества и предполагающий создание собственного продукта;
- приобретение навыков для решения исследовательских, творческих, социальных, предпринимательских и коммуникационных задач.

5) методы и приемы развития критического мышления, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

6) метод группового обучения, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– изучение литературы и материалов электронных источников по проблемам дисциплины;

– работы, предусматривающие аналитическое решение задач и выполнение заданий лабораторных занятий;

– выполнение домашнего задания;

– подготовка к лабораторным занятиям;

– курсовые, дипломные и научно-исследовательские работы, связанные с тематикой дисциплины;

– подготовка к участию в конференциях с докладами по проблемам дисциплины.

Для организации дистанционной и самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине рекомендуется использовать современные информационные ресурсы, размещенные на образовательном портале смешанного и дистанционного обучения БГУ:

https://edummf.bsu.by/course/view.php?id=21 (2 курс, дневное),
https://edummf.bsu.by/course/view.php?id=24 (3 курс, заочное),
https://edummf.bsu.by/course/view.php?id=117 (3 курс, дневное),
https://edummf.bsu.by/course/view.php?id=210 (4 курс, заочное)

и содержащие учебные материалы (курс лекций, вопросы и задачи к коллоквиуму, вопросы к математическому диктанту, задания к лабораторным работам и т.п.) для электронного сопровождения изучаемой дисциплины.

Примерный перечень заданий исследовательского характера для домашней работы студентов

Индивидуальные задания исследовательского характера для самостоятельной работы включают аналитические решения теоретических задач различного уровня сложности, которые сдаются на проверку в письменном виде.

Темы 1-2. Введение. Элементы теории погрешностей (5 семестр)

1. Определить относительную погрешность при вычислении полной поверхности усеченного конуса, если радиусы его оснований R и r и образующая l, измеренные с точностью до 0,01 см, следующие $R=23,64$ см, $r=17,31$ см, $l=10,21$ см.

2. Высота h и радиус основания R цилиндра измерены с точностью до 0,5%. Какова относительная погрешность при вычислении объема цилиндра?

3. Длина периметра правильного вписанного 96-угольника, которым пользовался Архимед при вычислении π, выражается при $r=1$ формулой

$p = 96\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$. Если вычислять непосредственно по этой формуле, желая получить π с точностью до 0,001, то с какой точностью нужно производить вычисления подкоренных величин?

4. Какая из формул $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$ или $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2\right)$, где $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ является численно более устойчивой для вычисления отклонения S^2 множества событий $x_1, \ldots, x_n$.

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 1 , задачи 1-30.

Тема 3. Интерполирование и приближение функций (5 семестр)

1. Функция $f(x) = \dfrac{1}{A^2 - x}$ приближается на $[-4;\ -1]$ многочленом Лагранжа по узлам $x_i = -4, -3, -2, -1$. При каких значениях A оценка погрешности в равномерной норме не превосходит 10^{-5}?

2. Функция $f(x) = e^{2x}$ приближается на отрезке $\left[-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2}\right]$ интерполяционным многочленом второй степени по трём узлам: $-1/2$, 0, $1/2$. Доказать, что погрешность интерполяции в равномерной норме не превосходит $\sqrt{3}/9$.

3. Пусть функция $f(x) = \sin x$ задана на отрезке $[4; b]$. При каком $b > 4$ многочлен Лагранжа третьей степени, построенный по оптимальным узлам, приближает эту функцию с погрешностью $\varepsilon \le 10^{-3}$?

4. Оценить число равноудаленных на отрезке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ точек, обеспечивающее интерполирование функции $f(x) = \sin x$ с точностью $\varepsilon \le 10^{-2}$.

5. Дана таблица натуральных логарифмов чисел от 1000 до 10000. Какова наибольшая погрешность линейной (квадратичной) интерполяции, если шаг равен 1?

6. Оценить погрешность приближения функции e^{2x} на [2; 5] интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени, построенным по оптимальным узлам.

7. С какой точностью можно вычислить по формуле Ньютона $\cos 10{,}5$ по известным значениям $\cos 10$, $\cos 11$, $\cos 12$, $\cos 13$, $\cos 14$, $\cos 15$?

8. Оценить число точек на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$, обеспечивающее интерполирование функции $f(x)=\sin x$ с точностью $\varepsilon \le 10^{-2}$.

9. Функция $\ln(x)$ приближается на отрезке $[1,2]$ интерполяционным многочленом третьей степени по четырём узлам 1, $4/3$, $5/3$, 2. Доказать, что погрешность интерполирования в равномерной норме не превосходит $1/300$.

10 Дана таблица синусов с шагом 1. Какова наибольшая погрешность линейной интерполяции?

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 6, задачи 1-62.

Тема 4. Приближенное вычисление интегралов (6 семестр)

1. Пусть весовая функция $p(x)$ четна, узлы x_i расположены симметрично относительно нуля, т.е. $x_{n+1-i}=-x_i$, $i=1,\ldots,n$. Доказать, что в интерполяционной квадратурной формуле $I(f)\approx\sum_{i=1}^{n}c_i f(x_i)$ для вычисления интеграла $I(f)=\int_{-a}^{a}p(x)f(x)dx$ коэффициенты, соответствующие симметричным узлам равны, т.е. $c_{n+1-i}=c_i$, $i=1,\ldots,n$.

2. Для вычисления $\int_0^1 f(x)dx$ применяется составная формула трапеций. Оценить минимальное число разбиений N, обеспечивающее точность $0{,}5\cdot10^{-3}$ на двух классах функций:

$$1)\ \|f''(x)\|\le 1; \qquad 2)\ \int_0^1 |f''(x)|dx \le 1.$$

3. Найти оценку погрешности вычисления интеграла $\int_0^1 f(x)dx$ при $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ по составной квадратурной формуле

$$S(f)=\big(f(0)+4f(0{,}1)+2f(0{,}2)+4f(0{,}3)+\ldots+4f(0{,}9)+f(1{,}0)\big)/30.$$

4. Оценить минимальное количество узлов составной квадратурной формулы Симпсона для вычисления интеграла $\int_0^2 f(x)dx$, обеспечивающее точность $\varepsilon\le 0{,}5\cdot10^{-4}$ на классе функций, удовлетворяющих условию $\sup\limits_{x\in[0;2]}\left|f^{(IV)}(x)\right|\le 1$.

5. Пусть $f \in C^{(1)}[-1;1]$ и $P_5(x)$ — алгебраический полином пятой степени, удовлетворяющий условиям $P(x_k) = f(x_k)$, $P'(x_k) = f'(x_k)$, $k = 1,2,3$, где $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Рассмотрим квадратурную формулу следующего вида:

$$S_5(f) = \left(7f(-1) + 16f(0) + 7f(1) + f'(-1) - 15f'(1)\right)/15.$$

Проверить, что $\int\limits_{-1}^{1} P_5(x)dx = S_5(P_5)$, и доказать, что $S_5(f)$ точна на полиномах пятой степени, но найдется полином степени 6, на котором она не точна.

6. Доказать, что ортогональный многочлен степени n имеет ровно n различных корней на отрезке $[a,b]$.

7. Доказать, что среди всех многочленов степени n вида $P_n(x) = x^n + \ldots$ минимальную норму $\|P_n\|^2 = \int\limits_a^b p(x)P_n^2(x)dx$ имеет ортогональный многочлен $\psi_n(x)$ со старшим коэффициентом 1.

8. Для ортогональных многочленов вида $\psi_n(x) = x^n + \ldots$ показать справедливость рекуррентного соотношения $\psi_n(x) = (x + b_n)\psi_{n-1}(x) - c_n\psi_{n-2}(x)$ с коэффициентом $c_n > 0$.

9. Доказать, что ортогональные многочлены на симметричном относительно нуля отрезке с четным весом $p(x)$ обладают свойством $\psi_n(-x) = (-1)^n\psi_n(x)$.

10. Доказать, что все коэффициенты квадратуры Гаусса положительны.

Также можно рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл. 7, задачи 1-4; гл. 8, задачи 1-217.

Тема 5. Обобщение интерполирования и численного интегрирования на случай функций многих переменных (6 семестр)

1. В пространстве R^2 выбрать произвольную ньютоновскую систему точек $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{\mu}$, $\mu = C_{2+m}^2$, для заданного m. Убедиться, что выбранные точки не лежат на алгебраической кривой порядка m (проверить равносильное условие $|V_m| \neq 0$, где V_m – матрица Вандермонда, построенная по точкам $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{\mu}$). Для заданной функции $f(x,y)$ построить интерполяционный многочлен $P_m(x,y)$ степени не выше m от n переменных вида $P_m(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{\mu} b_i\varphi_i(x,y)$, удовлетворяющий условиям $\sum\limits_{i=1}^{\mu} b_i\varphi_i(x_j, y_j) = f(x_j, y_j)$, $j = 1,2,\ldots,\mu$, где $\{\varphi_i(x,y)\}_{i=1}^{\mu}$ – множество всех одночленов степени не выше

m от n переменных в случае *а)* $m=3$, $f(x,y)=5x\sin y$; *б)* $m=2$, $f(x,y,z)=2xz\cos y$.

2. Пусть известна таблица значений функции $f(x,y,z)$ для аргументов из некоторой произвольно выбранной ньютоновской системы точек $\{(x_i,y_i,z_i)\}_{i=1}^{\mu}$, $\mu=C_{3+m}^{3}$, в пространстве R^3, где m – заданное натуральное число. Найти приближенные значения следующих частных производных:

$$а)\ \frac{\partial f\,(x_{m-1},y_{m-1},z_{m-1})}{\partial x},\ б)\ \frac{\partial f^{m}\quad(x_m,y_m,z_m)}{\partial x^{m-2}\partial y\,\partial z},$$

с помощью соответствующих частных производных от интерполяционного многочлена $P_m(x,y,z)=\sum_{i=1}^{\mu}b_i\varphi_i(x,y,z)$ степени не выше m от трех переменных для функции $f(x,y,z)$, удовлетворяющего условиям $\sum_{i=1}^{\mu}b_i\varphi_i(x_j,y_j,z_j)=f(x_j,y_j,z_j)$, $j=1,2,...,\mu$, где $\{\varphi_i(x,y,z)\}_{i=1}^{\mu}$ – множество всех одночленов степени не выше m от трех переменных; а также методом неопределенных коэффициентов в случае *1)* $m=2$; $f(x,y,z)=2^{y}\cos(x+y+z)$; *2)* $m=3$; $f(x,y,z)=3^{xy}\sin(y+z)$.

3. Вычислить n-кратный интеграл от заданной функции f по области $\Omega=[0;1]^n$, применяя интерполяционную кубатурную формулу с числом узлов $\mu=C_{n+m}^{n}$, для указанных значений n и m:

а) $n=2$; $m=4$; $f(x,y)=2x\cos y$; *б)* $n=3$; $m=2$; $f(x,y,z)=5ze^{x+y}$.

4. Вычислить n – кратный интеграл от заданной функции f по области $\Omega=[0;1]^n$ методом повторного применения квадратурной формулы гауссова типа $(p(x)\equiv 1)$ для отрезка $[0;1]$ с числом узлов, равным m; убедиться, что полученная кубатурная формула является точной для всех одночленов степени не выше $2m-1$ по каждой из n переменных:

а) $n=2$; $m=4$; $f(x,y)=2x\cos y$; *б)* $n=3$; $m=2$; $f(x,y,z)=5ze^{x+y}$.

5. Вычислить n – кратный интеграл от заданной функции f по области $\Omega=[-1;1]^n$ методом Монте-Карло дважды с различным числом испытаний N; убедиться, что абсолютная погрешность интегрирования не превышает оценки погрешности интегрирования методом Монте-Карло, полученной с помощью правила «трёх сигм»: *а)* $n=2$; $f(x,y)=2x\cos y$; $N=5000$, 15000; *б)* $n=3$; $f(x,y,z)=5ze^{x+y}$; $N=6000$, 10000.

Темы 6-7. Численные методы решения систем ЛАУ. Вычисление собственных значений и собственных векторов матриц (7 семестр)

1. Доказать, что для операторной нормы матрицы $A \in M_n(R)$, порожденной векторной нормой $\|x\|_1$, справедливо представление $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

2. Доказать, что для операторной нормы матрицы $A \in M_n(R)$, порожденной векторной нормой $\|x\|_\infty$, справедливо представление $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

3. Пусть $A = A^T$. Доказать, что $\max\limits_{\|x\|_2=1} |(Ax,x)| = \rho(A)$.

4. Пусть числа $d_k > 0, k=\overline{1,n}$. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} d_k |x_k|$ является нормой вектора x. Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

5. Пусть числа $d_k > 0, k=\overline{1,n}$. Доказать, что $\max\limits_{k}(d_k|x_k|)$ является нормой вектора x. Найти норму матрицы, подчиненную этой векторной норме.

6. Пусть $|a_{jj}| > \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n} |a_{ij}|$. Доказать, что метод простой итерации $x^{(n+1)} = Sx^{(n)} + \phi$ для системы $Ax = b$ сходится.

7. Пусть $|a_{jj}| > \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n} |a_{ij}|$. Доказать, что $\det A \ne 0$.

8. Пусть $A = A^T > 0$. Доказать, что итерационный процесс $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau\left(A\dfrac{x^{(k+1)} + x^{(k)}}{2} - b\right)$ сходится при $\tau > 0$. Оценить его скорость сходимости, если известны $\lambda_{\max}(A)$ и $\lambda_{\min}(A)$.

9. Найти все матрицы, для которых метод итераций будет сходящимися ($x = Bx + g$), $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$, где α, β – некоторые числа.

10. При каких значениях параметра τ метод $x^{(k+1)} = (E - \tau A)x^{(k)} + \tau f$ для системы уравнений $Ax = f$ с матрицей $A = \begin{bmatrix} 5 & 0{,}8 & 4 \\ 2{,}5 & 3 & 0 \\ 2 & 0{,}8 & 4 \end{bmatrix}$ сходится для произвольного приближения?

11. Доказать неравенство $\|x\|_C^2 \le \rho(C)\|x\|_2^2$, где $C = C^T > 0$.

12. Пусть $A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5}/2 \\ \sqrt{5}/2 & 1 \end{bmatrix}$. Записать сходящийся метод простой итерации. Найти оптимальное значение итерационного параметра τ.

13. Показать, что для системы ЛАУ $Ax = b$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 4.8 \end{bmatrix}$, метод $x^{(k+1)} = (E - \tau A)x^{(k)} + \tau b$ сходится для любого начального приближения при $0 < \tau < 0.4$.

14. Найти все матрицы, для которых метод Зейделя будет сходящимися ($x = Bx + g$), $B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, где α, β – некоторые числа.

15. Пусть $A = A^T$ имеет собственные значения $\lambda(A) \in [m, M]$, $m > 0$ Доказать, что при любом $\tau > 0$ итерационный процесс $\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + A\left(\dfrac{x^{(k+1)} + x^{(k)}}{2}\right) = b$ сходиться. Определить оптимальное значение $\tau_{опт}$.

16. Найти α, β, при которых метод Зейделя будет сходящимся для систем уравнений $x = Hx + \phi$ с матрицей вида $H = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

17. Число обусловленности матрицы A равно q. Найти число обусловленности матрицы A^{-1}.

18. При решении системы ЛАУ с матрицей размерности 128×128 методом сопряженных градиентов за 50 итераций достигается относительная погрешность приближенного решения 1.*e*-3. Какое максимальное число итераций потребуется для достижения точности не хуже, чем 1.*e*-9?

19. Число обусловленности симметричной матрицы *K*=1.*e*9. Максимальное собственное значение при этом равно 1000. Вычислить минимальное и максимальное собственные значения обратной матрицы.

20. Какой будет значение переменной x, если все переменные класса double p=(S+1)^2/(S-1)^2; if(p==1); x=1; else x=0; end;

a) p=1.e-20; b) p=1.e-12; c) p=1.e12; d) p=1.e151; p=1.e155.

21. Какая геометрическая фигура в R^3 будет определена множеством точек $\|x\| = const$ в случае максимальной и квадратичной норм?

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл.2, задачи 81-88, 107-114.

Тема 8. Решение нелинейных уравнений и систем (7 семестр)

1. Построить итерационный процесс Ньютона для вычисления корня n-ой степени $\sqrt[n]{a}$, $a>0$, n-вещественное число.

2. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения $f(x)=x^3-3x^2-1=0$ методом простой итерации.

3. Определить область начальных приближений x_0, для которых итерационный процесс $x_{n+1}=\dfrac{x_n^3+1}{20}$ сходится.

4. Пусть уравнение $f(x)=0$ имеет на отрезке $[a,b]$ корень кратности $p>1$, причем функция $f(x)$ дважды дифференцируема. Показать, что при этих условиях метод Ньютона сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $(p-1)/p$.

5. Пусть уравнение $f(x)=0$ имеет на отрезке $[a,b]$ корень кратности $p>1$, причем функция $f(x)$ дважды дифференцируема. Построить модификацию метода Ньютона, имеющую квадратичную скорость сходимости.

6. Построить метод Ньютона для вычисления числа $\dfrac{1}{a}$ так, чтобы расчетные формулы не содержали операций деления. Определить область сходимости метода при $a>0$.

7. Пусть дана функция $\phi(x)=\alpha\sin^2 x+\beta\cos^2 x-\gamma$. При каких ограничениях на параметры α,β,γ метод простой итерации сходится при любом начальном приближении.

8. Пусть дана функция $\phi(x)=ae^{-bx^2}+c$, $a\neq 0$, $b\geq 0$. При каких ограничениях на a,b и c метод простой итерации сходится при любом начальном приближении.

9. Построить метод простой итерации для решения уравнения $2+x=e^x$, $x>0$.

10. Исследовать сходимость метода простой итерации $x_{n+1}=x_n^2-2x_n+2$ в зависимости от выбора начального приближения x_0.

11. Дано уравнение $x=\phi(x)=\pi/2\sin x$, которое решается методом простой итерации $x_{n+1}=\phi(x_n)$. Найти область сходимости к корням уравнения.

12. Определить скорость сходимости метода Ньютона к корням уравнения $x^3-4x^2+5x-2=0$.

13. Для вычисления $x=\sqrt{2}$ используется итерационный процесс $x_{n+1}=\phi(x_n)=x_n+\nu(x_n^2-2)$. При каком выборе ν этот процесс имеет квадратичную скорость сходимости?

14. Построить метод простой итерации для решения уравнения $\cos x-\frac{1}{x}\sin x=0$, сходящийся при любом начальном приближении $x_0\neq 0$.

15. Найти область сходимости метода простой итерации для следующего уравнения $x=e^{2x}-1$.

16. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения $f(x)=3x+\cos x+1=0$ методом простой итерации.

17. Уравнение $x=2^{x-1}$ решается методом простой итерации. Исследовать его сходимость в зависимости от выбора начального приближения x_0.

18. Пусть $x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}$. Исследовать его сходимость в зависимости от выбора начального приближения x_0.

19. При каких значениях p метод простой итерации $x_{k+1}=x_k+p\left(1-x^{1/2}\right)$ сходится к корню $x=1$: а) если $x_0>1$; б) если $x_0<1$.

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл.4, задачи 52, 54, 105.

Темы 9-10. Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Численное решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (8 семестр)

1. Используя разностное уравнение, выписать формулу для вычисления интеграла $I_k(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\frac{\cos(kx)-\cos(k\alpha)}{\cos x-\cos\alpha}dx$, где α – параметр.

2. Доказать, что для чисел Фибоначчи f_k: $f_{k+1}=f_k+f_{k-1}$, $f_0=0$, $f_1=1$, справедливо равенство $f_kf_{k+2}-f_{k+1}^2=(-1)^{k+1}$, $k=0,1,2,\ldots$.

3. Доказать, что любое решение разностного уравнения $y_{k+1}-5y_k+6y_{k-1}=0$ удовлетворяет уравнению $y_{k+1}-9y_k+27y_{k-1}-23y_{k-2}-24y_{k-3}+36y_{k-4}=0$

4. Доказать, что любое решение разностного уравнения $y_{k+1}-12y_{k-1}+2y_{k-2}+27y_{k-3}-18y_{k-4}=0$ однозначно представимо в виде суммы решений уравнений $y_{k+1}-3y_{k-1}+2y_{k-2}=0$ и $y_{k+1}-9y_{k-1}=0$.

5. Вычислить определитель $\Delta_k=\det A_k$ трехдиагональной матрицы порядка k $A_k=\begin{pmatrix} b & c & 0 & . & . & . & 0 & 0\\ a & b & c & 0 & . & . & . & 0\\ 0 & a & b & c & 0 & . & . & 0\\ . & . & . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & . & 0 & a & b & c\\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & a & b\end{pmatrix}$, учитывая, что $\Delta_0=1$.

6. Найти решение разностной задачи $y_{k+2}+y_k=0$, $y_0=2$, $y_1=1$.

7. Пусть ϕ_k и z_k – два частных решения уравнения $a_1 y_{k+1} + a_0 y_k + a_{-1} y_{k-1} = 0$, $a_1 a_{-1} \neq 0$. Доказать, что определитель матрицы $A_k = \begin{pmatrix} \phi_k & \phi_{k+1} \\ z_k & z_{k+1} \end{pmatrix}$ либо равен нулю, либо отличен от нуля для всех k одновременно.

8. Найти решение разностной задачи $y_{k+2} + 4y_{k+1} + 4y_k = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 4$.

9. Показать, что решением задачи Коши $y_{i-1} - 2xy_i + y_{i+1} = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = x$ являются полиномы Чебышева первого рода $T_i(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^i + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^i\right]$, $|x| \geq 1$.

10. Показать, что решением задачи Коши $y_{i-1} - 2xy_i + y_{i+1} = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2x$, являются полиномы Чебышева второго рода $U_i(x) = \dfrac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{i+1} - \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{i+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}$, $|x| \geq 1$.

11. Найти общее решение уравнения $y_{i-1} - 5y_i + 6y_{i+1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

12. Найти общее решение уравнения $y_{i-1} - \frac{5}{2} y_i + y_{i+1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

13. Определить 1000-й член последовательности, первые два члена которой равны единице, а последующие определяются рекуррентными соотношениями $y_{i+1} = y_{i-1} + y_i$, $i = 2, 3 \dots$.

14. Найти общее решение уравнения $by_{i+1} - cy_i + ay_{i-1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

15. Найти общее действительное решение уравнения $2y_{i-1} - y_i + y_{i+1} = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

16. Найти решение разностной задачи $2y_i + 3y_{i+1} + y_{i+2} = 0$, $y_0 = 2$, $y_1 = 1$.

17. Найти решение разностной задачи $y_{k+2} + 4y_{k+1} + 4y_k = 0$, $y_0 = 1$, $y_1 = 4$.

Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл.10, задачи 51-56.

Темы 11-12. Численное решение интегральных уравнений Фредгольма. Построение и исследование разностных схем для задач математической физики (8 семестр)

1. Построить разностное уравнение, аппроксимирующее дифференциальное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + \phi(x,t)$ на сетке (x_m, t_n), где $x_m = mh$, $t_n = n\tau$, используя шаблоны:

1) $Ш(x_m,t_n) = \{(x_{m-1},t_n),(x_{m+1},t_n),(x_{m-1},t_{n+1}),(x_{m+1},t_{n+1})\}$;

2) $Ш(x_m,t_n) = \{(x_m,t_{n-1}),(x_{m-1},t_n),(x_m,t_n),(x_{m+1},t_n),(x_m,t_{n+1})\}$;

Оценить погрешность аппроксимации дифференциального уравнения разностным в точке (x_m,t_n).

2. Построить аппроксимацию условия $u(0,t) = \psi(t)$ с привлечением значений сеточных функций в точках: 1) $\left(\frac{1}{2}h,t_n\right)$; 2) $\left(\frac{1}{2}h,t_n\right),\left(\frac{3}{2}h,t_n\right),\left(\frac{5}{2}h,t_n\right)$. Оценить погрешность аппроксимации.

3. Показать, что разностная схема $\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2}$ аппроксимирует дифференциальное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ на сетке (x_m,t_n), $x_m = mh$, $t_n = n\tau$, со вторым порядком по τ и четвертым по h, если $\frac{\tau}{h^2} = \frac{1}{6}$.

4. Пусть даны дифференциальное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и разностная схема $\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \sigma\frac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\sigma)\frac{y_{m+1}^n - 2y_m^n + y_{m-1}^n}{h^2}$. Найти, при каком значении параметра σ порядок аппроксимации будет вторым по τ и вторым по h.

5. Исследовать сходимость к решению задачи Коши $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x}$, $-\infty < x < +\infty$, $0 \le t \le T$, $u(x,0) = \psi(x)$, $-\infty < x < +\infty$, $a > 0 - Const$ решений следующей разностной схемы

$$\frac{y_m^n - y_m^{n-1}}{\tau} = a\sigma\frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h} + a(1-\sigma)\frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h},$$

$$y_m^0 = \psi(x_m),\ m = 0,\pm1,\pm2,\ldots,\ n = 0,1,\ldots N-1,\ N\tau = T.$$

6. Исследовать сходимость разностной схемы

$$\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}=(1-\sigma)\frac{y_{m-1}^{n+1}-2y_m^{n+1}+y_{m+1}^{n+1}}{2h^2}+\sigma\frac{y_{m-1}^n-2y_m^n+y_{m+1}^n}{2h^2},$$

$$m=1,2,\ldots M-1,\ n=0,1,\ldots N-1,\ N\tau=T,\ Mh=1,$$

$$y_m^0=\psi(x_m),\ u_0^n=0,\ u_M^n=0,$$

к решению дифференциальной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0\le x\le 1,\ 0\le t\le T,$$

$$u(x,0)=\psi(x),$$

$$u(0,t)=0,\ u(1,t)=0,$$

Здесь $x_m=mh$, $t_n=n\tau$, $0\le\sigma\le 1$.

7. При каких значениях параметра $\theta\in[0;1]$ разностная схема $\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}=(1-\theta)\frac{u_{m+1}^{n+1}-2u_m^{n+1}+u_{m-1}^{n+1}}{h^2}+\theta\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h^2}$ устойчива?

8. Определить, при каких значениях параметра $\theta\in[0;1]$ схема $\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\theta\frac{u_{m+1}^n-u_m^n}{h}+(1-\theta)\frac{u_m^n-u_{m-1}^n}{h}=0$ устойчива?

9. Пусть даны дифференциальное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и разностная схема $\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}=\sigma\frac{y_{m+1}^{n+1}-2y_m^{n+1}+y_{m-1}^{n+1}}{h^2}+(1-\sigma)\frac{y_{m+1}^n-2y_m^n+y_{m-1}^n}{h^2}$. Найти, при каком значении параметра σ порядок аппроксимации будет вторым по τ и четвертым по h.

10. Исследовать с помощью спектрального признака устойчивость разностной схемы $\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+a\frac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n}{2h}-\frac{h^2}{2\tau}\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h^2}=0$.

11. Исследовать с помощью спектрального признака устойчивость разностной схемы $\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+a\frac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n}{2h}-\frac{a^2\tau}{2}\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{h^2}=0$.

12. Определить порядок аппроксимации разностных схем на решении уравнения теплопроводности и переноса

а) $\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}=\frac{y_{m-1}^n-2y_m^n+y_{m+1}^n}{h^2}+f_m$, б) $\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}+\frac{y_{m+1}^n-y_m^n}{h}=0$.

13. Методом гармоник исследовать устойчивость разностной схемы

$$\frac{y_m^{n+1}-y_m^n}{\tau}+\frac{y_{m+1}^n-y_m^n}{h}=0.$$

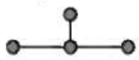
14. Какой(ие) из шаблонов соответствует типовым неявным двухслойным схемам для нестационарного уравнения теплопроводности?

15. Разностная схема для уравнения теплопроводности имеет порядок аппроксимации $O(h^2 + \tau)$ и сходится. Во сколько раз возрастут вычислительные затраты по данной разностной схеме если требуется увеличить точность решения в 16 раз. Предполагается, что вычислительные затраты растут пропорционально числу узлов сетки.

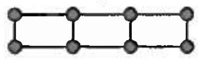
1

2

3



4



Можно также рекомендовать в качестве заданий для самостоятельной работы упражнения из сборника задач [3]: гл.11, задачи 49-57.

Примерный перечень вопросов к зачету

3 семестр

1. Системы функций Чебышева
1.1. Определение и примеры
1.2. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы система функций была чебышевской
2. Интерполирование обобщенными многочленами
2.1. Постановка задачи. Достаточное условие существования и единственности интерполяционного обобщенного многочлена
3. Алгебраическое интерполирование
3.1. Алгебраическое интерполирование как частный случай интерполирования обобщенными многочленами.
3.2. Представление алгебраического интерполяционного многочлена в форме Лагранжа. Инвариантность относительно алгебраических многочленов соответствующей степени
4. Конечные разности
4.1. Определение, таблица. Свойства линейности и равенства постоянной величине для многочленов соответствующей степени
4.2. Представление конечной разности произвольного порядка через значения функции
4.3. Представление значения функции через значения последовательных конечных разностей
5. Разделенные разности
5.1. Определения, таблица. Свойства линейности и равенства постоянной величине для многочленов соответствующей степени
5.2. Представление разделенных разностей произвольного порядка через значения функции. Свойство симметрии
5.3. Представление значения функции через значения последовательных разделенных разностей
5.4. Представление разделенной разности через производную функции соответствующего порядка
5.5. Связь между разделенными и конечными разностями для равноотстоящих аргументов. Выражение конечной разности через производную функции
6. Интерполяционная формула Ньютона
6.1. Определение, построение, свойство инвариантности относительно многочленов соответствующей степени
7. Многочлены Чебышева
7.1. Определение, корни, точки экстремума

7.2. Приведенный многочлен Чебышева, его норма в пространстве непрерывных функций
8. Оценка остаточного члена интерполяционного полинома и ее минимизация
8.1. Представление погрешности интерполирования в форме Лагранжа
8.2. Минимизация погрешности интерполяционного полинома дискретных функций в фиксированной точке
8.3. Минимизация погрешности интерполяционного полинома по норме в пространстве непрерывных функций на заданном отрезке
9. Интерполирование по равноотстоящим узлам
9.1. Формула Ньютона для интерполирования в начале таблицы. Погрешность интерполирования
9.2. Формула Ньютона для интерполирования в конце таблицы. Погрешность интерполирования
10. Тригонометрическое интерполирование. Дискретное преобразование Фурье
10.1. Существование и единственность тригонометрического интерполяционного многочлена
10.2. Случай равноотстоящих узлов
10.3. Дискретное (прямое) преобразование Фурье
10.4. Дискретное (обратное) преобразование Фурье
11. Определение интерполяционного сплайна. Схема построения
12. Постановка задачи аппроксимации. Метод наименьших квадратов

4 семестр

1. Квадратурные формулы общего вида
1.1. Определение
1.2. Квадратуры, основанные на алгебраическом интерполировании
1.3. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы квадратурная формула была интерполяционной
1.4. Алгебраическая степень точности квадратурной формулы. Ее максимальное значение, выраженное через число узлов квадратурной формулы. Связь между точностью и числом узлов квадратурной формулы
2. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса
2.1. Определение. Степень точности
2.2. Частные случаи формулы Ньютона-Котеса. Представление погрешности
3. Составные квадратурные формулы
3.1. Составные квадратурные формулы общего вида
3.2. Примеры построения составных квадратурных формул

3.3. Алгебраическая степень точности составной квадратурной формулы
3.4. Представление погрешности составной квадратурной формулы
4. Правило Рунге практической оценки погрешности квадратурных формул
5. Квадратурные формулы типа Гаусса
5.1. Определение
5.2. Необходимое и достаточное условие того, чтобы квадратурная формула была точна для многочленов максимально возможной степени
5.3. Существование и единственность квадратурной формулы гауссова типа
5.4. Свойство положительности квадратурных коэффициентов
5.5. Представление остаточного члена формулы типа Гаусса
6. Частные случаи квадратурных формул гауссова типа
6.1. Квадратурная формула гауссова типа с весом Якоби
6.2. Квадратурные формулы гауссова типа с весом Чебышева-Эрмита
6.3. Квадратурные формулы гауссова типа с весом Чебышева-Лагерра
7. Вычисление кратных интегралов
7.1. Кубатурные формулы, основанные на интерполировании. Существование и единственность
7.2. Свойство инвариантности интерполяционной кубатурной формулы относительно многочленов соответствующей степени
7.4. Методы построения кубатурных формул
7.5. Метод Монте-Карло

5 семестр

1. Особенности компьютерной арифметики Машинные эпсилон, ноль и бесконечность
2. Нормы векторов и матриц. Понятие согласованности и подчиненности матричных норм.
3. Число обусловленности матрицы системы ЛАУ. Невязка. Оценки погрешности при решении систем ЛАУ с возмущенной правой частью.
4. Метод Гаусса (вычислительная сложность, выбор ведущего элемента).
5. LU-декомпозиция.
6. Разложение Холецкого.
7. Метод простой итерации для решения систем ЛАУ.
8. Условия сходимости метода простой итерации и выбор оптимального итерационного параметра. Критерий остановки итераций.
9. Итерационный метод наименьших невязок.
10. Итерационные методы градиентного типа. Метод скорейшего спуска.
11. Неявные итерационные методы (Зейделя, Якоби, Последовательной верхней релаксации).
12. Свойства собственных векторов и собственных значений. Теорема Гершгорина. Преобразования подобия матриц.

13. Степенной метод вычисления границ спектра матрицы.
14. Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского.
15. Преобразования Гивенса. Метод вращений.
16. Ортогональная матрица. Преобразования Хаусхолдера и QR – разложение.
17. Методы решения нелинейных уравнений. Отделение корней. Метод дихотомии.
18. Метод неподвижной точки для решения нелинейных уравнений.
19. Метод релаксации и выбор оптимального итерационного параметра.
20. Итерационный метод Ньютона для решения нелинейных уравнений.
21. Квадратичная сходимость итерационного метода Ньютона. Локальная сходимость.
22. Модификации итерационного метода Ньютона для нелинейных уравнений и систем.
23. Численные. Методы нахождения экстремумов функций одной и нескольких переменных.

Примерный перечень вопросов к экзамену
6 семестр

1. Представление чисел с плавающей запятой и особенности арифметических операций с ними. Машинные эпсилон, ноль и бесконечность
2. Нормы векторов и матриц. Понятие согласованности и подчиненности матричных норм.
3. Оценка погрешности решения систем ЛАУ с возмущенной правой частью. Невязка. Число обусловленности матрицы системы ЛАУ.
4. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса (вычислительная сложность, выбор ведущего элемента).
5. LU-декомпозиция.
6. Разложение Холецкого.
7. Итерационные методы решения систем ЛАУ. Метод простой итерации.
8. Условия сходимости метода простой итерации и выбор оптимального итерационного параметра. Критерий остановки итераций.
9. Итерационный метод наименьших невязок.
10. Итерационные методы градиентного типа. Метод скорейшего спуска.
11. Неявные итерационные методы (Зейделя, Якоби, Последовательной верхней релаксации).
12. Проблема собственных значений.
13. Свойства собственных векторов и собственных значений. Теорема Гершгорина. Преобразования подобия матриц.
14. Степенной метод вычисления границ спектра матрицы.
15. Каноническая форма Фробениуса. Метод Данилевского.
16. Преобразования Гивенса. Метод вращений.
17. Ортогональная матрица. Преобразования Хаусхолдера и QR – разложение.

18. Методы решения нелинейных уравнений. Отделение корней. Метод дихотомии.
19. Метод неподвижной точки для решения нелинейных уравнений.
20. Метод релаксации и выбор оптимального итерационного параметра.
21. Итерационный метод Ньютона для решения нелинейных уравнений.
22. Квадратичная сходимость итерационного метода Ньютона. Локальная сходимость.
23. Модификации итерационного метода Ньютона для нелинейных уравнений и систем.
24. Численные. Методы нахождения экстремумов функций одной и нескольких переменных.
25. Метод Эйлера для решения задачи Коши.
26. Сходимость и оценка погрешности метода Эйлера.
27. Правило Рунге для апостериорной оценки погрешности методов решения задачи Коши.
28. Одношаговые численные методы решения задачи Коши. Методы Рунге-Кутты.
29. Многошаговые численные методы решения задачи Коши. Методы Адамса.
30. Устойчивость численных методов решения задачи Коши. Правило корней.
31. Численные методы решения жестких систем. А-устойчивость. Метод Гирра.
32. Численные методы решения краевых задач. Метод Стрельбы.
33. Разностный метод решения краевых задач.
34. Основные понятия теории разностных схем для уравнений математической физики. Аппроксимация (согласованность), устойчивость, сходимость, сеточный шаблон.
35. Разностные схемы для нестационарного уравнения теплопроводности.
36. Разностные схемы для уравнения переноса.
37. Разностные схемы для эллиптических уравнений.
38. Теорема Лакса об эквивалентности.
39. Метод гармоник для исследования устойчивости разностных схем.
40. Канонический вид и условие устойчивости двухслойных разностных схем.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Функциональный анализ	Функционального анализа	Нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 6 от 13.02.2020г.)
Дифференциальные уравнения	Дифференциальных уравнений и системного анализа	Нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 6 от 13.02.2020г.)
Уравнения математической физики	Математической кибернетики	Нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 6 от 13.02.2020г.)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
на ________/________ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры *Веб–технологий и компьютерного моделирования* (протокол № ___ от _____ 201_ г.)

Заведующий кафедрой

доктор физ.-мат. наук, доцент _______________ В.М. Волков

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

доктор физ.-мат. наук, доцент _______________ С.М. Босяков