**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебной работе

и образовательным инновациям

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ О.Н.Здрок

«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 202\_\_ г.

Регистрационный № УД-\_\_\_\_\_ /уч.

***СОВРЕМЕННЫЕ АСПЕКТЫ***

***ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И МНОЖЕСТВ***

**Учебная программа учреждения высшего образования**

**по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направление специальности

1-31 03 01-01 Математика (научно-производственная деятельность)

2020 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 1-31 03 01-2013, утвержденного 30.08.2013 № 88 и учебного плана № G31-140/уч., утвержденного 30.05.2013.

**СоставителИ:**

**Александр Антонович Пекарский** – профессор кафедры теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

**Анатолий Борисович Антоневич** – профессор кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

**Евгений Мефодьевич** **Радыно** – доцент кафедры функционального анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**Рецензенты:**

**Евгений Алексеевич Ровба** – заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, профессор, доктор физико-математических наук;

**Иван Кузмич Асмыкович** – доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного технологическогоуниверситета, доцент, кандидат физико-математических наук.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета

(протокол № 9 от 23.03.2020);

Научно-методическим Советом Белорусского государственного университета (протокол № 4 от 25.03.2020).

Зав. кафедрой теории функций В.Г. Кротов

**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

Теория множеств в 20 веке легла в основу всех разделов математики, включая анализ, топологию, геометрию, алгебру и теорию чисел.

Учебная дисциплина «Современные аспекты теории функций и множеств» посвящена изучению теории множеств в её современной форме. Обсуждаются понятия функции, мощности множеств, вычислимости числа. Показывается, как понятие действия группы на множестве может быть положено в основу геометрии (так называемая Эрлангенская программа Ф. Клейна).

Также рассматриваются понятия аксиоматической теории и моделей ее реализующих. В качестве модели для теории поля приводится поле *р-*адических чисел, строятся модели неевклидовой геометрии.

В данной учебной дисциплине рассматриваются также классические разделы теории функций такие, как ортогональные многочлены и теория аппроксимации функций.

**Цели и задачи учебной дисциплины**

**Целью дисциплины учебной дисциплины** «Современные аспекты теории функций и множеств» является:

– повышение уровня профессиональной компетенции студента-математика – будущего специалиста в области научно производственной деятельности;

– изучениепонятийногоаппарата современной теории множеств и формирования навыков применения теории множеств в основании анализа, алгебры и геометрии.

**Образовательные цели:**

– изложение основ классической теории ортогональных многочленов и теории аппроксимации;

– ознакомление студентов с основными принципами теории множеств и примерами их применения.

**Развивающая цель:**

**–** формирование у студентов основ математического мышления, изучение алгоритмов и методов решения задач, связанных с ортогональными многочленами и теорией аппроксимации функций;

– дальнейшее формирование у студентов навыков абстрактного математического мышления и умения применять его в конкретных задачах, повышение их математической культуры.

**Основные задачи,** решаемые в рамках изучения учебной дисциплины «Современные аспекты теории функций и множеств»:

–формирование у студентов: устойчивого понимания основных понятий теории множеств; понятия ортогональных многочленов; понятия ряда Фурье по ортогональным многочленам; основных понятий теории аппроксимации функций;

– изучение действий группы на множестве и освоение этого понятия с целью практического использования при решении различных задач математики;

– усвоение понятия аксиоматической теории и модели ее реализующей;

– использование теории ортогональных многочленов и теории аппроксимации при решении теоретических задач и задач численных методов.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Современные аспекты теории функций и множеств» относится к циклу дисциплин специализации компонента учреждения высшего образования.

**Связи** с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Учебная дисциплина «Современные аспекты теории функций и множеств» включает основы теории ортогональных многочленов и теории аппроксимации функций. Эти теории тесно связаны с численными методами, теориями дифференциальных, интегральных уравнений и уравнениями математической физики, теориями дифференциальных и интегральных уравнений. Предполагается, что к моменту изучения дисциплины цикла дисциплин специализаций «Современные аспекты теории функций и множеств» изучены следующие дисциплины: «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ» и «Функциональный анализ».

**Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины «Современные аспекты теории функций и множеств» должно обеспечить формирование следующих академических, социально-личностных и профессиональныхкомпетенций:

***академические*** компетенции:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным вырабатывать новые идеи (обладать креативностью).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникаций.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

***социально-личностные*** компетенции:

СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.

СЛК-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

***профессиональные*** компетенции:

ПК-2. Владеть основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации. Применять современные методы проектирования информационных систем, использовать веб-сервисы, оформлять техническую документацию.

ПК-5. Заниматься аналитической и научно-исследовательской деятельностью в области математики и информационных технологий.

ПК-8. Работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой.

ПК-9. Осуществлять выбор оптимального варианта проведения научно-исследовательских работ.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

**– знать:**

основные методы и приёмы решения исследовательских математических задач, связанных теорией ортогональных многочленов и теорией аппроксимации;теорией множеств; теорией действия групп на множествах; понятием аксиоматической теории и модели.

**– уметь:**

применять методы и приёмы теории ортогональных многочленов и теории аппроксимации для решения исследовательских и прикладных задач; методы теории групп при изучении множеств;

использовать основные свойства множеств.

**– владеть:**

навыками самообразования, навыками использования методов и приемов решения теоретических и прикладных задач с использованием математических методов;

вычислительными методами теории множеств.

**Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в 4 и 5 семестрах. Всего на изучение учебной дисциплины «Современные аспекты теории функций и множеств» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 100 часов, в том числе 54 аудиторных часа, из них:

4 семестр: всего – 28 часов, в том числе – 18 аудиторных часов, из них: лекции – 16 часов, управляемая самостоятельная работа (аудиторный контроль) – 2 часа;

5 семестр: всего – 72 часа, в том числе – 36 аудиторных часа, из них: лекции – 34 часа, управляемая самостоятельная работа (аудиторный контроль) – 2 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 2 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

**СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА**

**Тема 1. Многочлены П.Л. Чебышёва и Эрмита.**

Многочлены П.Л. Чебышёва первого рода и ряды Фурье по ним. Многочлены П.Л. Чебышёва второго рода и ряды Фурье по ним. Многочлены Эрмита и ряды Фурье по ним. Понятие классических ортогональных многочленов.

**Тема 2. Аксиоматика теории множеств**

Элементы наивной теории множеств по Кантору. Парадоксы теории множеств.

Аксиоматика Цермело-Френкеля теории множеств. Булеан множества. Системы подмножеств: кольца, полукольца, алгебры, сигма-алгебры, топологии. Бинарные отношения, отношения порядка, отношения эквивалентности, функциональные отношения.

**Тема 3. Аксиома выбора и ее следствие**.

Декартово произведение конечного числа множеств, бесконечные декартовы произведения. Отображения и их графики. Биективные, сюръективные и инъективные отображения. Сравнение множеств при помощи функций, мощность. Теорема Кантора-Бернштейна.

**Тема 4. Вполне упорядоченные множества.**

Отношения полного порядка. Теорема Цермело. Арифметика порядковых чисел. Трансфинитная индукция.

**Тема 5. Действие групп на множествах**

Действие группы на множестве. Орбиты, стабилизаторы и нормализаторы. Формула Бернсайда для подсчета количества орбит. Эрлангенская программа Клейна.

**Тема 6. Аксиоматические теории и модели**

Понятие аксиоматической теории и модели ее реализующей. Примеры аксиоматических теорий: теория поля, аксиоматика неевклидовой геометрии. Модели поля, модели неевклидовой геометрии.

**Тема 7. Введение в теорию аппроксимации функций**

Модуль непрерывности функции и его свойства. Понятие наилучшего приближения и элемента наилучшего приближения. Теоремы П.Л.Чебышёва об альтернансе. Теоремы Джексона и С.Н.Бернштейна (тригонометрический и алгебраический случай).

**Тема 8. Функции, константы и неравенство Лебега**

Функции, константы и неравенство Лебега для частичных сумм рядов Фурье по тригонометрической системе и по многочленам П.Л.Чебышёва первого рода. Понятие интерполяционного процесса Лагранжа. Функции, константы и неравенство Лебега для интерполяционного процесса по нулям многочленов П.Л.Чебышёва первого рода.

|  |
| --- |
|  |

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Дневная форма получения образования

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер раздела, темы | Название раздела, темы | Количество аудиторных часов | | | | | Количество часов  УСР (аудиторный контроль) | Форма контроля знаний |
| Лекции | Практические  занятия | Семинарские  занятия | Лабораторные  занятия | Иное |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|  | **4 семестр** |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | Многочлены П.Л. Чебышёва и Эрмита. | 10 |  |  |  |  |  | Опрос, проверка индивидуальных заданий |
| 2 | Аксиоматика теории множеств. | 2 |  |  |  |  |  | Опрос, отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой |
| 3 | Аксиома выбора и ее следствие. | 4 |  |  |  |  | 2 | Контрольная работа |
|  | **5 семестр** |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 | Вполне упорядоченные множества. | 6 |  |  |  |  |  | Опрос, отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой |
| 5 | Действие групп на множествах. | 6 |  |  |  |  |  | Опрос, отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой |
| 6 | Аксиоматические теории и модели. | 6 |  |  |  |  |  | Опрос, отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой |
| 7 | Введение в теорию аппроксимации функций | 8 |  |  |  |  | 1 | Опрос, контрольная работа |
| 8 | Функции, константы и неравенство Лебега | 8 |  |  |  |  | 1 | Опрос, контрольная работа |
|  | **Всего** | **50** |  |  |  |  | **4** |  |

**ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ**

**Перечень основной литературы**

1. Даугавет И. К., Введение в теорию приближения функций, ЛГУ, 1977.
2. Серпинский, В. О теории множеств. М., Просвешение, 1966. – 63 с.
3. Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, М. ФИЗМАТЛИТ, 2005.
4. Хенл, Дж. Введение в теорию множеств. М., Радио и связь, 1993. – 105 с.

**Перечень дополнительной литературы**

1. Данилов Ю.А., Многочлены Чебышева. Мн.: Вышэйшая школа, 1984.
2. Колмогоров, А.Н., Драгалин, А.Г. Введение в математическую логику. М., 1982.
3. Сегё Г., Ортогональные многочлены. М.: Мир, 2002.

**Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки**

Для текущего контроля качества усвоения знаний студентами используется следующий диагностический инструментарий:

– опросы;

– проверка индивидуальных заданий;

– отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой;

– контрольные работы.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Современные аспекты теории функций и множеств» учебным планом предусмотрен зачет в 5 семестре.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая оценка предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку:

* – опросы – 10 %;
* – проверка индивидуальных заданий – 30 %;
* – отчеты по домашним практическим упражнениям с их устной защитой – 30 %;
* – контрольные работы – 30 %.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценки по текущей успеваемости составляет 50 %, экзаменационная оценка – 50 %.

**Примерный перечень заданий**

**для управляемой самостоятельной работы студентов**

**Тема 3. Аксиома выбора и ее следствие (2 ч)**

1.Применение аксиомы выбора в анализе и алгебре.

2.Примеры бесконечных Декартовых произведений.

3.Построение примеров биективных, сюръективных и инъективных отображений.

4.Нахождение мощности конкретных множеств.

(*Форма контроля – контрольная работа*).

**Тема 7. Введение в теорию аппроксимации функций (1 час)**

1. Найдите модули непрерывности функций x2,  , заданных на отрезке [0, 1].
2. Найдите модули непрерывности периодических функций: , .
3. Найдите наилучшие равномерные полиномиальные приближения функций, указанных в заданиях 1 и 2. Если же это невозможно, то оцените их, используя теоремы Джексона.

(*Форма контроля – контрольная работа*).

**Тема 8. Функции, константы и неравенство Лебега (1 час)**

1. Используя неравенство Лебега и теорему Джексона, оцените равномерную скорость сходимости тригонометрического ряда Фурье функции .
2. Для функции , заданной на отрезке [-1, 1], используя неравенство Лебега и теорему Джексона, оцените равномерную скорость сходимости интерполяционного процесса Лагранжа, построенного по нулям многочленов Чебышёва первого рода.

(*Форма контроля – контрольная работа*).

**Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса используется ***практико-ориентированный подход,*** который предполагает***:***

– освоение содержание образования через решения практических задач;

– приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;

– ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;

– использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

**Методические рекомендации**

**по организации самостоятельной работы обучающихся**

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине используются современные информационные ресурсы: размещается на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, задания, вопросы для самоконтроля и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

При составлении заданий УСР по учебной дисциплине задания располагаются в порядке возрастания их сложности: задания, формирующие достаточные знания по изученному учебному материалу на уровне узнавания; задания, формирующие компетенции на уровне воспроизведения; задания, формирующие компетенции на уровне применения полученных знаний.

**Примерный перечень вопросов к зачёту**

1. Многочлены Чебышёва первого рода и ряды Фурье по ним.
2. Экстремальные свойства многочленов П.Л. Чебышёва 1-го рода.
3. Многочлены Чебышёва второго рода и ряды Фурье по ним.
4. Элементы наивной теории множеств по Кантору.
5. Парадоксы теории множеств.
6. Аксиоматика Цермело-Френкеля теории множеств.
7. Булеан множества.
8. Системы подмножеств: кольца, полукольца, алгебры, сигма-алгебры, топологии.
9. Бинарные отношения, отношения порядка, отношения эквивалентности, функциональные отношения.
10. Декартово произведение конечного числа множеств, бесконечные декартовы произведения.
11. Отображения и их графики.
12. Биективные, сюръективные и инъективные отображения.
13. Сравнение множеств при помощи функций, мощность.
14. Теорема Кантора-Бернштейна.
15. Отношения полного порядка.
16. Теорема Цермело. Арифметика порядковых чисел.
17. Трансфинитная индукция.
18. Действие группы на множестве.
19. Орбиты, стабилизаторы и нормализаторы.
20. Формула Бернсайда для подсчета количества орбит. Эрлангенская программа Клейна.
21. Понятие аксиоматической теории и модели ее реализующей.
22. Примеры аксиоматических теорий: теория поля, аксиоматика неевклидовой геометрии.
23. Модели поля, модели неевклидовой геометрии.
24. Модуль непрерывности функции и его свойства.
25. Понятие наилучшего приближения и элемента наилучшего приближения.
26. Теорема П.Л.Чебышёва об альтернансе.
27. Теоремы Джексона и С.Н. Бернштейна (тригонометрический случай).
28. Теоремы Джексона и С.Н. Бернштейна (алгебраический случай).
29. Функции и константы Лебега. Неравенство Лебега.
30. Сходимость рядов Фурье по ортогональным многочленам.
31. Интерполяционный процесс Лагранжа.
32. Интерполяционный процесс по нулям многочленов П.Л.Чебышева.

**ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Название учебной  дисциплины,  с которой  требуется согласование | Название  кафедры | Предложения  об изменениях в содержании учебной программы  учреждения высшего  образования по учебной дисциплине | Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и  номера протокола) |
| 1.Функциональный анализ | функционального анализа и аналитической экономики | нет | вносить изменения не требуется  (протокол № № 9 от 23.03.2020) |
| 2.Дифференциальные уравнения | Кафедра дифференциальных уравнений и системного анализа | нет | вносить изменения не требуется  (протокол № № 9 от 23.03.2020) |
| 3.Уравнения математической физики | Кафедра математической кибернетики | нет | вносить изменения не требуется  (протокол № № 9 от 23.03.2020) |
| 4.Экстремальные задачи и вариационное исчисление | Кафедра нелинейного анализа и аналитической экономики | нет | вносить изменения не требуется  (протокол № № 9 от 23.03.2020) |

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на \_\_\_\_\_/\_\_\_\_\_ учебный год

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| №  п/п | Дополнения и изменения | Основание |
|  |  |  |

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_\_\_\_ 202\_ г.)

(название кафедры)

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(ученая степень, ученое звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

(ученая степень, ученое звание) (подпись) (И.О.Фамилия)