
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

THEORETICAL AND PRACTICAL MECHANICS

УДК 539.3,519.6

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ НА ПОЯВЛЕНИЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ У КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

С. М. БАУЭР^{1), 2)}, Е. Б. ВОРОНКОВА^{1), 2)}

¹⁾Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская набережная, 7/9, 199034, г. Санкт-Петербург, Россия

²⁾Научно-образовательный центр «Материалы»
Донского государственного технического университета,
пл. Гагарина, 1, 344000, г. Ростов-на-Дону, Россия

Рассматривается устойчивость осесимметричных форм равновесия неоднородных круглых пластин, загруженных нормальным давлением, с упруго закрепленным краем. В предположении, что несимметричная составляющая решения носит периодический характер, численным методом определяется наименьшее значение нагрузки,

Образец цитирования:

Бауэр СМ, Воронкова ЕБ. Влияние условий закрепления на появление несимметричных форм равновесия у круглых пластин под действием нормального давления. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;1:38–46.

<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-38-46>

For citation:

Bauer SM, Voronkova EB. Influence of boundary constraints on the appearance of asymmetrical equilibrium states in circular plates under normal pressure. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020;1:38–46. Russian.

<https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-38-46>

Авторы:

Светлана Михайловна Бауэр – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета¹⁾, ведущий исследователь лаборатории механики биосовместимых материалов²⁾.

Ева Боруховна Воронкова – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры математического моделирования энергетических систем факультета прикладной математики – процессов управления¹⁾, младший научный сотрудник лаборатории механики биосовместимых материалов²⁾.

Authors:

Svetlana M. Bauer, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of theoretical and applied mechanics, faculty of mathematics and mechanics^a, and leading researcher at the laboratory of mechanics of biomaterials^b.

s.bauer@spbu.ru

<https://orcid.org/0000-0003-3732-2110>

Eva B. Voronkova, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of mathematical modeling of power systems, faculty of applied mathematics and control processes^a, and junior researcher at the laboratory of mechanics of biomaterials^b.

e.voronkova@spbu.ru

<https://orcid.org/0000-0002-3065-4473>

при которой происходит бифуркация в несимметричное состояние. Исследовано влияние степени неоднородности материала и условий закрепления края на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости. Показано, что с увеличением жесткости пружины, препятствующей свободному смещению края пластины в радиальном направлении, бифуркация в несимметричное состояние может происходить при существенно больших нагрузках и с образованием большего числа волн в окружном направлении. Уменьшение жесткости оболочки к краю приводит к значительному снижению величины критической нагрузки, если радиальные перемещения края пластины ничем не ограничены.

Ключевые слова: круглая пластина; потеря устойчивости; неоднородность.

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (грант № 14.Z50.31.0046).

INFLUENCE OF BOUNDARY CONSTRAINTS ON THE APPEARANCE OF ASYMMETRICAL EQUILIBRIUM STATES IN CIRCULAR PLATES UNDER NORMAL PRESSURE

S. M. BAUER^{a, b}, E. B. VORONKOVA^{a, b}

^aSaint Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya Embankment,
Saint Petersburg 199034, Russia

^bResearch and Education Center «Materials», Don State Technical University,
1 Gagarina Square, Rostov-on-Don 344000, Russia

Corresponding author: E. B. Voronkova (e.voronkova@spbu.ru)

Unsymmetrical buckling of nonuniform circular plates with elastically restrained edge and subjected to normal pressure is studied in this paper. The unsymmetric part of the solution is sought in terms of multiples of the harmonics of the angular coordinate. A numerical method is employed to obtain the lowest load value, which leads to the appearance of waves in the circumferential direction. The effect of material heterogeneity and boundary on the buckling load is examined. It is shown that if the outer edge of a plate is elastically restrained against radial deflection, the buckling load for unsymmetrical buckling is larger than for a plate with a movable edge. The elasticity modulus decrease away from the center of a plate leads to sufficient lowering of the buckling pressure if the outer edge can move freely in the radial direction.

Keywords: circular plate; buckling; heterogeneity.

Acknowledgements. This research was supported by the Government of Russia (grant No. 14.Z50.31.0046).

Введение

Появлению неосесимметричных форм равновесия у сферических, торoidalных, эллипсоидальных оболочек, нагруженных нормальным внутренним давлением, посвящено множество работ [1–4]. При этом отмечается, что точность описания докритического состояния может существенно повлиять на вычисление значений критической нагрузки и формы потери устойчивости [2; 5].

Д. Ю. Панов и В. И. Феодосьев первыми предложили решение, соответствующее несимметричным формам равновесия круглой пластины, загруженной нормально распределенным давлением [3]. Они аппроксимировали неосесимметричный нормальный прогиб пластины выражением вида $w(r, \theta) = \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)^2 \left(A + B\left(\frac{r}{R}\right)^4 \cos n\theta\right)$, где r, θ – координаты срединной поверхности пластины $0 \leq r \leq R$,

$0 \leq \theta \leq 2\pi$; A, B – неизвестные константы, $n \geq 2$, и, используя метод Галёркина, нашли минимальное значение нагрузки и волновое число n , соответствующие появлению волн по краю пластины. Однако позже именно В. И. Феодосьевым было показано, что использования одного или двух параметров для описания докритического состояния пластины или оболочки недостаточно [5]. Доказательство существования решения, соответствующего несимметричным формам равновесия у симметрично загруженной пластины, проведено Н. Ф. Морозовым [6], единственность такого решения доказана В. О. Пиенчоски [7].

Л. С. Чео и Е. Л. Райсс численно определили значения критической нагрузки, при которой круглая пластина теряет устойчивость осесимметричных форм равновесия [8]. Сопоставляя свои решения с результатами Д. Ю. Панова и В. И. Феодосьева, авторы [8] также подчеркивают, что аппроксимация неосесимметричного решения, принятая в [3], недостаточно точно описывает устойчивое закритическое состояние равновесия.

Сравнение значений критической нагрузки, при которой пластина переходит в неосесимметричное состояние равновесия, найденных численным и асимптотическим методом, проведено в работах [9; 10]. Аналитические модели для описания краевого несимметричного выпучивания круглой пластины при равномерном нагреве и сравнение с экспериментальными данными представлены в [11]. Задача о потере устойчивости симметричных форм равновесия круглой или кольцевой пластины, модуль упругости которой изменяется при движении от центра пластины к ее краю, рассматривалась в [12]. В работе [13] исследована бифуркация в несимметричное состояние пологой сферической оболочки, загруженной внутренним давлением. Роль граничных условий в появлении несимметричных форм равновесия у пологой оболочки затронута в [10].

В настоящей работе обсуждается влияние условий закрепления на появление несимметричных форм равновесия у неоднородной круглой пластины.

Материалы и методы исследования

Постановка задачи. Рассмотрим круглую изотропную пластину, находящуюся под действием равномерно распределенного нормального давления. Считая, что модуль упругости пластины изменяется при удалении от центра пластины к ее краю, запишем разрешающую систему уравнений в виде [12; 13]

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w + \frac{\partial D}{\partial r}L_1^+(w) + \frac{\partial^2 D}{\partial r^2}L_2^+(w) &= p + L(w, F), \\ \frac{\Delta\Delta F}{E} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{E}\right)L_1^-(F) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{E}\right)L_2^-(F) &= -\frac{h}{2}L(w, w), \end{aligned} \quad (1)$$

где $w = w(r, \theta)$, $F = F(r, \theta)$ – искомые функция нормального прогиба и функция усилий соответственно, r, θ – введенные полярные координаты срединной поверхности пластины ($0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$);

$D = D(r) = \frac{E(r)}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины, ν – коэффициент Пуассона материала пластины; $E = E(r)$ – модуль упругости пластины, зависящий от радиальной координаты; p – нормальное давление, действующее на пластину; h – толщина пластины; оператор Лапласа Δ и дифференциальные операторы L , L_i^\pm ($i = 1, 2$) имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta &= (\)'' + \frac{(\)'}{r} + \frac{(\)}{r^2}, \\ L(x, y) &= x''\left(\frac{y'}{r} + \frac{\ddot{y}}{r^2}\right) + y''\left(\frac{x'}{r} + \frac{\ddot{x}}{r^2}\right) - 2\left(\frac{\dot{x}'}{r} - \frac{\dot{x}}{r^2}\right)\left(\frac{\dot{y}'}{r} - \frac{\dot{y}}{r^2}\right), \\ L_1^\pm(y) &= 2y''' + \frac{2 \pm \nu}{r}y'' + \frac{2}{r^2}(\ddot{y})' - \frac{y'}{r^2} - 3\frac{\ddot{y}}{r^3}, \\ L_2^\pm(y) &= y'' \pm \nu\left(\frac{y'}{r} + \frac{\ddot{y}}{r^2}\right), \end{aligned}$$

здесь введены обозначения $(\)' = \frac{\partial(\)}{\partial r}$, $(\) = \frac{\partial(\)}{\partial \theta}$.

Предположим, что точки края $r = R$ закреплены от смещения в направлении нормали к срединной поверхности и от поворотов, т. е. $w = w' = 0$. Стандартные варианты граничных условий требуют положить дополнительно равными нулю одну из двух величин в каждой из следующих пар: u или T_r , v или S , где u, v – проекции вектора перемещения на оси r и θ ; T_r, S – тангенциальные усилия. Жестко заделанный край моделируется условиями $u = v = w = w' = 0$, а случай $w = w' = T_r = S = 0$ соответствует свободному смещению точек края в радиальном и окружном направлениях.

Пусть по краю пластины имеется упругая связь (пружина), препятствующая ее свободному смещению в радиальном направлении, тогда перемещение u и усилие T_r на внешнем крае взаимосвязаны, т. е. $k_u u + T_r = 0$, где k_u – коэффициент упругости заделки. Таким образом, граничные условия запишутся в виде

$$w = w' = k_u u + T_r = S = 0. \quad (2)$$

Чтобы записать с помощью искомых функций w, F граничное условие (2), связывающее компоненту перемещения $u(r, \theta)$ с радиальным усилием T_r , воспользуемся представлением компонент деформации $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \omega$ через компоненты вектора перемещения u, v, w , с одной стороны, и усилий T_r, T_θ, S – с другой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \varepsilon_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{T_\theta - v T_r}{E(r) h} \right) - \frac{1}{E(r) h} \frac{T_r - v T_\theta}{r} - \frac{2(1+v)}{E(r) h} \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \theta} = \\ &= -\frac{u}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{r}{R}, \quad w^* = \beta \frac{w}{h}, \quad p^* = \beta^3 \frac{p R^4}{E_{av} h^4}, \quad F^* = \beta^2 \frac{F}{E_{av} h^3}, \\ u^* &= \beta^2 \frac{R}{h^2} u, \quad k_u^* = \frac{R}{h E_{av}} k_u, \quad \beta^2 = 12(1-v^2), \end{aligned} \quad (4)$$

где E_{av} – среднее значение модуля упругости:

$$E_{av} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R E(r) r dr d\theta.$$

Зависимость модуля упругости материала пластины от радиальной координаты может быть представлена в виде $E(r) = E_0 f(r)$, где $f(r)$ – достаточно гладкая и положительная на отрезке $[0, R]$ функция, E_0 – параметр, характеризующий величину модуля Юнга в центре пластины. Тогда система уравнений (1) примет вид (знак * у безразмерных величин (4) в дальнейшем опускаем)

$$\begin{aligned} g_1(r) \Delta \Delta w + g_1'(r) L_1^+(w) + g_1''(r) L_2^+(w) &= p + L(w, F), \\ g_2(r) \Delta \Delta F + g_2'(r) L_1^-(F) + g_2''(r) L_2^-(F) &= -\frac{L(w, w)}{2}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{здесь } g_1(r) = \frac{E_0 f(r)}{E_{av}}, \quad g_2(r) = \frac{1}{g_1(r)}.$$

Для сплошной пластины граничные условия (2) должны быть дополнены условиями ограниченности решений в центре

$$w' = F' = 0.$$

Симметричное решение. При значениях нагрузки, меньших критической величины p_{cr} , система (5), дополненная необходимыми граничными условиями, имеет только симметричное решение [4; 8; 12]. В этом случае, принимая $w(r, \theta) = w_s(r)$, $F(r, \theta) = F_s(r)$, симметричное решение задачи определяется из уравнений

$$\begin{aligned} g_1 \left(\omega_0'' + \frac{\omega_0'}{r} - \frac{\omega_0}{r^2} \right) + g_1' \left(\omega_0' + \frac{v}{r} \omega_0 \right) &= \frac{pr}{2} + \frac{\omega_0 \phi_0}{r}, \\ g_2 \left(\phi_0'' + \frac{\phi_0'}{r} - \frac{\phi_0}{r^2} \right) + g_2' \left(\phi_0' + \frac{v}{r} \phi_0 \right) &= -\frac{\omega_0^2}{2r} \end{aligned} \quad (6)$$

с учетом обозначений $\omega_0 = w_s'$, $\phi_0 = F_s'$.

Граничные условия (2) на краю пластины $r = 1$ в силу соотношений (3) примут вид

$$\omega_0(1) = \phi_0(1) = k_u g_2(1) (\phi_0'(1) - v \phi_0(1)) + \phi_0(1) = 0. \quad (7)$$

В центре пластины необходимо положить

$$\omega_0(0) = \varphi_0(0) = 0. \quad (8)$$

Несимметричное решение. Следуя [4; 8], будем искать решение в виде

$$w(r, \theta) = w_s(r) + w_n(r) \cos n\theta, \quad F(r, \theta) = F_s(r) + F_n(r) \cos n\theta, \quad (9)$$

где функции $w_s(r)$, $F_s(r)$ определяют докритическое симметричное решение и могут быть найдены из решения системы (6) совместно с (7)–(8), а функции $w_{ns}(r, \theta) = w_n(r) \cos n\theta$, $F_{ns}(r, \theta) = F_n(r) \cos n\theta$ описывают поведение пластины сразу после ее перехода в неосесимметричное состояние, при этом $w_{ns}(r)$ и $F_{ns}(r)$ полагаются малыми. Число волн в окружном направлении, образовавшихся в результате бифуркации, обозначено n .

После подстановки (9) в систему (5) с учетом малости w_{ns} , F_{ns} получим линейную систему относительно $w_n(r)$, $F_n(r)$

$$\begin{aligned} g_1 \Delta_n \Delta_n w_n + g_1' L_{1n}^+(w_n) + g_1'' L_{2n}^+(w_n) = \\ = \omega_0' \left(\frac{F_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} F_n \right) + \varphi_0' \left(\frac{w_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) + \frac{w_n''}{r} \varphi_0 + \frac{F_n''}{r} \omega_0, \\ g_2 \Delta_n \Delta_n F_n + g_2' L_{1n}^-(F_n) + g_2'' L_{2n}^-(F_n) = -\omega_0' \left(\frac{w_n'}{r} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) - \frac{w_n''}{r} \omega_0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_n y = y'' + \frac{y'}{r} - \frac{n^2}{r^2} y; \\ L_{1n}^\pm(y) = 2y''' + \frac{2 \pm \nu}{r} y'' - \frac{2n^2 + 1}{r^2} y' + \frac{3n^2}{r^3} y; \\ L_{2n}^\pm(y) = y'' \pm \nu \left(\frac{y'}{r} - \frac{n^2}{r^2} y \right). \end{aligned}$$

Границные условия (2) примут вид

$$w_n(1) = w_n'(1) = k_u u_n(1) + F_n'(1) - n^2 F_n(1) = F_n'(1) - F_n(1) = 0. \quad (11)$$

Здесь несимметричная составляющая компоненты перемещения $u_n(r)$ связана с функцией усилия $F_n(r)$ на краю пластины $r = 1$ соотношением

$$\begin{aligned} u_n = \frac{1}{n^2 - 1} \left(g_2 \left(F_n''' - ((2 + \nu)n^2 + 1 - \nu) F_n' + 3n^2 F_n \right) + \right. \\ \left. + g_2'(1) \left(F_n'' - \nu(F_n' - n^2 F_n) \right) \right), \end{aligned}$$

которое получено из записанной в безразмерном виде зависимости (3) с учетом $u(r, \theta) = u_s(r) + u_n(r) \cos n\theta$ и $w_n(1) = w_n'(1) = 0$.

В центре пластины, как и в симметричном случае,

$$w_n'(0) = F_n'(1) = 0.$$

Схема поиска несимметричного решения аналогична схемам, изложенным в работах [4; 8]. Сначала решается симметричная задача (6)–(8), а далее проверяется существование решения несимметричной задачи. Обозначим p_n нагрузку, при которой для заданного числа волн в окружном направлении n существуют отличные от нуля функции w_n , F_n , удовлетворяющие соотношениям (10), (11). Тогда под критической нагрузкой p_{cr} , при которой происходит бифуркация в неосесимметричное состояние, будем понимать наименьшее значение нагрузки p_n , когда появляются волны в окружном направлении, т. е. $p_{cr} = \min_n p_n$.

Результаты и их обсуждение

Предпосылки для перехода симметрично нагруженной пластины в неосесимметричное состояние создают сжимающие напряжения, которые появляются в окрестности края пластины при больших прогибах. На рис. 1 показано, как изменяется интенсивность безразмерных окружных усилий $T_\theta(r)$ при

различных значениях коэффициента жесткости пружины k_u . Величина $k_u = 0$ соответствует отсутствию ограничений на перемещение точек края пластины в радиальном направлении, т. е. условию $T_r = 0$. Абсолютно жесткой заделке края при $u = 0$ соответствует кривая, обозначенная как $k_u = \infty$.

Из рис. 1 видно, что с увеличением жесткости пружины k_u , ограничивающей свободное перемещение пластины в радиальном направлении, интенсивность сжимающих окружных напряжений уменьшается, а зона, в которой эти напряжения принимают отрицательные значения, сужается. Для величин параметра k_u , соответствующих условию жесткого защемления края пластины, окружные усилия принимают только положительные значения, и в этом случае бифуркация в неосесимметричное состояние невозможна [8; 10].

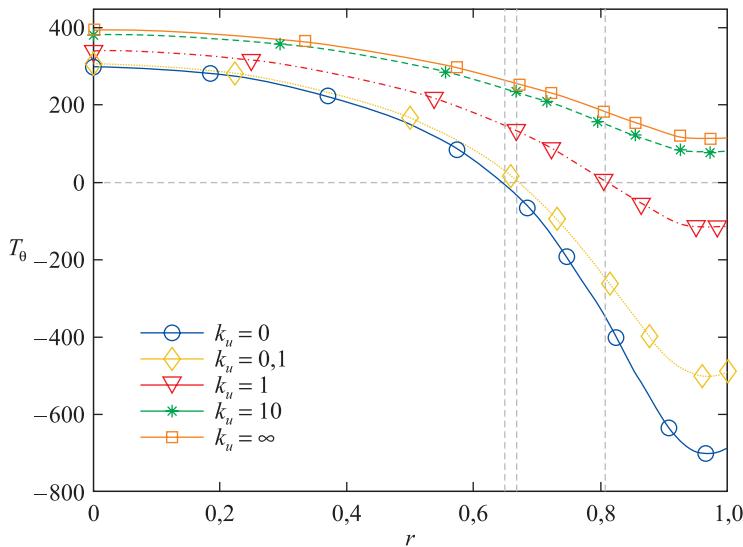


Рис. 1. Безразмерное окружное усилие $T_\theta(r)$
при различных значениях коэффициента жесткости пружины k_u .
Для нагрузки принято $p = 30\ 000$

Fig. 1. Dimensionless circumferential stress resultant $T_\theta(r)$
for different value of spring stiffness k_u . Load value is taken as $p = 30\ 000$

Для однородной пластины с краем, который может свободно смещаться в радиальном направлении ($k_u = 0$), критическая нагрузка и соответствующее ей волновое число ($p_{\text{cr}} = 64\ 453$, $n = 14$) найдены в [12]. Обозначим это значение критической нагрузки через p_{cr}^0 .

Как видно из рис. 2, с ростом жесткости пружины k_u пластина переходит в несимметричное состояние при более высоких величинах критической нагрузки и с образованием большего числа волн в окружном направлении (см. также таблицу). Так, для безразмерной жесткости $k_u = 0,1$, что при отношении $\frac{h}{R} = \frac{1}{100}$ соответствует жесткости пружины $10^{-3}E_{\text{av}}$, критическая нагрузка возрастает более чем в 2,5 раза, а число волн увеличивается до 17. Это согласуется с расчетами окружных усилий T_θ , представленными на рис. 1.

Результаты расчетов критической нагрузки для неоднородных пластин с модулем упругости $E(r) = E_0 e^{-qr}$ приведены в таблице и на рис. 3. Параметры E_0 , q закона изменения модуля выбирались так, чтобы его среднее значение E_{av} оставалось постоянным. При отсутствии сопротивления ($k_u = 0$) или достаточно слабом сопротивлении перемещению в окружном направлении края пластины ($k_u = 0,05$) потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия происходит при более низких нагрузках, чем для однородной пластины (см. рис. 3 и таблицу).

С ростом жесткости пружины k_u , когда закрепление края приближается к жесткому защемлению, переход к несимметричной форме равновесия может происходить при нагрузке большей, чем для однородной пластины, если материал пластины достаточно сильно ослаблен к краю. Так, для $k_u = 0,15$ критическая нагрузка для неоднородной пластины сначала незначительно падает при $q = 0,05$, а затем увеличивается на 18 % с ростом параметра неоднородности пластины до $q = 2$. При этом для всех рассчитанных значений q и условий закрепления k_u потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия неоднородной пластины происходит с образованием большего числа складок в окружном направлении, чем для однородной пластины (см. таблицу).

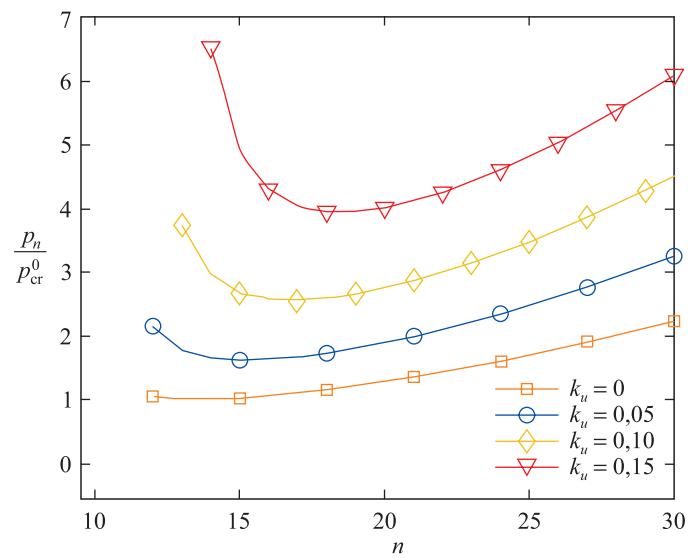


Рис. 2. Зависимость нагрузки $\frac{p_n}{p_{\text{cr}}^0}$ от волнового числа n в форме потери устойчивости для однородной пластины (p_{cr}^0 – критическая нагрузка, соответствующая однородной круглой пластине при $k_u = 0$)

Fig. 2. Dependence of the normalized critical load $\frac{p_n}{p_{\text{cr}}^0}$ on the mode number n

for a uniform circular plate (p_{cr}^0 corresponds to the buckling load for a uniform circular plate with $k_u = 0$)

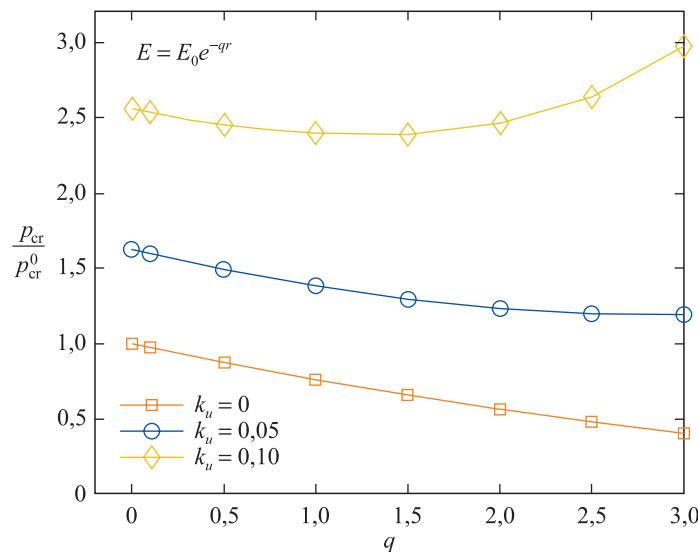


Рис. 3. Влияние коэффициента неоднородности q на критическую нагрузку $\frac{p_{\text{cr}}}{p_{\text{cr}}^0}$ (p_{cr}^0 – критическая нагрузка, соответствующая однородной круглой пластине)

Fig. 3. Change of the normalized buckling pressure $\frac{p_{\text{cr}}}{p_{\text{cr}}^0}$

when the degree of heterogeneity of the plate q changes
 $(p_{\text{cr}}^0$ – denotes the buckling pressure for a uniform circular plate)

Критическая нагрузка $\frac{p_{cr}}{p_{cr}^0}$ и волновое число n для неоднородной пластины
в зависимости от коэффициента жесткости заделки

The Buckling load $\frac{p_{cr}}{p_{cr}^0}$ and wave number n for different value of spring stiffness

Жесткость заделки k_u	Нагрузка				Волновое число			
	$q = 0$	$q = 0,5$	$q = 1$	$q = 2$	$q = 0$	$q = 0,5$	$q = 1$	$q = 2$
0	1	0,87	0,76	0,56	14	14	14	14
0,05	1,62	1,49	1,38	1,23	14	15	16	16
0,10	2,56	2,45	2,39	2,47	17	17	17	19
0,15	3,96	3,92	4,01	4,69	18	19	19	21

Заключение

В работе представлены результаты численного исследования потери устойчивости осесимметричных форм равновесия изотропных пластин с переменным модулем упругости при различных условиях закрепления внешнего края. Показано, что с увеличением жесткости пружины, ограничивающей перемещение края пластины в радиальном направлении, бифуркация в несимметричное состояние может происходить при значительно больших нагрузках и с образованием большего числа волн в окружном направлении. Уменьшение жесткости оболочки к краю приводит к существенному снижению величины критической нагрузки, если радиальные перемещения края пластины ничем не ограничены.

Библиографические ссылки

1. Adachi J. *Stresses and buckling in thin domes under internal pressure*. Watertown: U. S. Army Materials and Mechanics Research Center; 1968.
2. Bushnell D. Buckling of shells-pitfall for designers. *AIAA Journal*. 2015;19(9):1183–1226. DOI: 10.2514/3.60058.
3. Панов ДЮ, Феодосьев ВИ. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах. *Прикладная математика и механика*. 1948;12:389–406.
4. Huang NC. Unsymmetrical buckling of shallow spherical shells. *Journal of Applied Mechanics*. 1964;31(3):447–457. DOI: 10.1115/1.3629662.
5. Feodos'ev VI. On a method of solution of the nonlinear problems of stability of deformable systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1963;27(2):392–404. DOI: 10.1016/0021-8928(63)90008-X.
6. Морозов НФ. К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластинки, загруженной симметричной нагрузкой. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1961;2:126–129.
7. Piechocki W. On the nonlinear theory of thin elastic spherical shells: nonlinear partial differential equations solutions in theory of thin elastic spherical shells subjected to temperature fields and external loading. *Archives of Mechanics*. 1969;21(1):81–102.
8. Cheo LS, Reiss EL. Unsymmetric wrinkling of circular plates. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1973;31(1):75–91. DOI: 10.1090/qam/99710.
9. Coman CD. Asymmetric bifurcations in a pressurised circular thin plate under initial tension. *Mechanics Research Communications*. 2013;47:11–17. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2012.09.005.
10. Coman CD, Bassom AP. Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurised shallow spherical cap. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2016;81:8–18. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.12.004.
11. Гольдштейн РВ, Попов АЛ, Козинцев ВМ, Челюбоеев ДА. Неосесимметрична потеря устойчивости при осесимметричном нагреве круглой пластины. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016;2:45–53. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.04.
12. Bauer SM, Voronkova EB. Models of shells and plates in the problems of ophthalmology. *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*. 2014;47(3):123–139. DOI: 10.3103/S1063454114030029.
13. Bauer SM, Voronkova EB. Unsymmetrical wrinkling of nonuniform annular plates and spherical caps under internal pressure. In: Altenbach H, Chróscielewski J, Eremeyev V, Wiśniewski K, editors. *Recent developments in the theory of shells. Advanced structured materials. Volume 110*. Cham: Springer; 2019. p. 79–89. DOI: 10.1007/978-3-030-17747-8_6.

References

1. Adachi J. *Stresses and buckling in thin domes under internal pressure*. Watertown: U. S. Army Materials and Mechanics Research Center; 1968.
2. Bushnell D. Buckling of shells-pitfall for designers. *AIAA Journal*. 2015;19(9):1183–1226. DOI: 10.2514/3.60058.
3. Panov DYU, Feodos'ev VI. [On the equilibrium and loss of stability of shallow shells in the case of large displacement]. *Prikladnaya matematika i mehanika*. 1948;12:389–406. Russian.

4. Huang NC. Unsymmetrical buckling of shallow spherical shells. *Journal of Applied Mechanics*. 1964;31(3):447–457. DOI: 10.1115/1.3629662.
5. Feodos'ev VI. On a method of solution of the nonlinear problems of stability of deformable systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1963;27(2):392–404. DOI: 10.1016/0021-8928(63)90008-X.
6. Morozov NF. [On the existence of a non-symmetric solution in the problem of large deflections of a circular plate with a symmetric load]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*. 1961;2:126–129. Russian.
7. Piechocki W. On the nonlinear theory of thin elastic spherical shells: nonlinear partial differential equations solutions in theory of thin elastic spherical shells subjected to temperature fields and external loading. *Archives of Mechanics*. 1969;21(1):81–102.
8. Cheo LS, Reiss EL. Unsymmetric wrinkling of circular plates. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1973;31(1):75–91. DOI: 10.1090/qam/99710.
9. Coman CD. Asymmetric bifurcations in a pressurised circular thin plate under initial tension. *Mechanics Research Communications*. 2013;47:11–17. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2012.09.005.
10. Coman CD, Bassom AP. Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurised shallow spherical cap. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2016;81:8–18. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.12.004.
11. Goldstein RV, Popov AL, Kozintsev VM, Chelyubeev DA. Non-axisymmetric edge buckling of circular plates when heated. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016;2:45–53. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.04. Russian.
12. Bauer SM, Voronkova EB. Models of shells and plates in the problems of ophthalmology. *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*. 2014;47(3):123–139. DOI: 10.3103/S1063454114030029.
13. Bauer SM, Voronkova EB. Unsymmetrical wrinkling of nonuniform annular plates and spherical caps under internal pressure. In: Altenbach H, Chróscielewski J, Eremeyev V, Wiśniewski K, editors. *Recent developments in the theory of shells. Advanced structured materials. Volume 110*. Cham: Springer; 2019. p. 79–89. DOI: 10.1007/978-3-030-17747-8_6.

Статья поступила в редколлегию 04.01.2020.
Received by editorial board 04.01.2020.