

---

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

---

## DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPTIMAL CONTROL

---

УДК 517.956.32

### УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА КОНЦЕ СТРУНЫ, НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ И ПРАВОЙ ЧАСТИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Е. В. УСТИЛКО<sup>1)</sup>, Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь

Получены достаточные условия согласования зависящих от времени характеристических первых производных в граничном режиме с начальными условиями и более общим уравнением колебаний полуограниченной струны во множествах решений всех целых высших порядков гладкости. Они обобщают найденные ранее достаточные условия согласования в случае аналогичной смешанной задачи для самого простейшего уравнения колебаний струны. Характеристичность нестационарных первых косых производных в граничном режиме означает, что в каждый момент времени они направлены вдоль критической характеристики.

**Ключевые слова:** смешанная задача; характеристическая первая косая производная; начальные условия; требования гладкости; условия согласования.

---

#### Образец цитирования:

Устилко ЕВ, Ломовцев ФЕ. Условия согласования значений характеристической косой производной на конце струны, начальных данных и правой части волнового уравнения. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;1:30–37. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-30-37>

#### For citation:

Ustilko EV, Lomovtsev FE. Matching conditions for values of characteristic oblique derivative at the end of a string, initial data and right-hand side of the wave equation. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2020; 1:30–37. Russian. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-30-37>

---

#### Авторы:

**Екатерина Валерьевна Устилко** – аспирантка кафедры математической кибернетики механико-математического факультета. Научный руководитель – Ф. Е. Ломовцев.

**Фёдор Егорович Ломовцев** – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета.

#### Authors:

**Ekaterina V. Ustilko**, postgraduate student at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.

[ustilko@tut.by](mailto:ustilko@tut.by)

**Fiodar E. Lomovtsev**, doctor of science (physics and mathematics), full professor; professor at the department of mathematical cybernetics, faculty of mechanics and mathematics.

[lomovcev@bsu.by](mailto:lomovcev@bsu.by)

## MATCHING CONDITIONS FOR VALUES OF CHARACTERISTIC OBLIQUE DERIVATIVE AT THE END OF A STRING, INITIAL DATA AND RIGHT-HAND SIDE OF THE WAVE EQUATION

*E. V. USTILKO<sup>a</sup>, F. E. LOMOVTSSEV<sup>a</sup>*

*<sup>a</sup>Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

*Corresponding author: F. E. Lomovtsev (lomovtsev@bsu.by)*

Sufficient matching conditions the time-dependent characteristic first derivatives in the boundary mode with the initial conditions and the more general vibration equation of a semi-bounded string are derived in the sets of solutions of all higher order smoothness orders. They generalize the previously found sufficient matching conditions in the case of a similar mixed problem for the simplest string vibration equation. The characteristic of non-stationary first oblique derivatives in the boundary mode means that at each moment of time they are directed along the critical characteristic.

**Keywords:** mixed problem; characteristic first oblique derivative; initial conditions; smoothness requirements; matching conditions.

### Введение

В работе найдены достаточные (при завышенной на единицу гладкости решений) условия согласования нестационарных (зависящих от времени) характеристических первых производных в граничном режиме с начальными условиями и более общим ( $a_1 \neq a_2$ ) уравнением колебаний полуограниченной струны во множествах решений всех целых высших порядков гладкости (см. постановку задачи ниже). Характеристичность этих первых производных (называемых обычно косыми производными) в граничном режиме означает, что в каждый момент времени они направлены вдоль критической характеристики уравнения [1; 2]. Найденные условия согласования обобщают выведенные ранее достаточные условия согласования в случае классических решений аналогичной смешанной задачи [3]. Вместе с требованиями гладкости правой части уравнения, начальных и граничных данных эти условия согласования нужны для гладкости решения указанной смешанной задачи на критической характеристике уравнения.

В дальнейшем полученные условия согласования будут изучены нами на необходимость, т. е. на ослабление требований гладкости, налагаемых на исходные данные (правую часть, начальные и граничные данные), до минимально достаточных. Затем их можно применить для поиска гладкого решения и установления критерия корректности по Адамару вспомогательной характеристической смешанной задачи для более общего ( $a_1 \neq a_2$ ) уравнения колебаний полуограниченной струны во множествах решений всех целых высших порядков гладкости. Работа [4] для простейшего ( $a_1 = a_2$ ) уравнения колебаний ограниченной струны указывает на важность условий согласования вспомогательных характеристических смешанных задач для полуограниченной струны во множествах решений всех высших порядков гладкости, потому что с увеличением значения времени возрастает гладкость всех исходных данных характеристических смешанных задач для ограниченной струны. Наконец, нами планируется использовать «метод вспомогательных смешанных задач для волнового уравнения на полупрямой» из [5], способ корректировки из [6] и эти условия согласования для нахождения устойчивого по правой части уравнения, начальным и граничным данным единственного классического решения смешанной задачи для более общего ( $a_1 \neq a_2$ ) уравнения колебаний ограниченной струны при нестационарных характеристических первых косых производных на ее концах. Указанный метод позволяет выводить в явном виде классические решения и критерии корректности смешанных задач для уравнений колебаний ограниченной струны без продолжений исходных данных задач вне множеств их изначального задания для гиперболических уравнений [7–9], а его аналог – для нестрогих гиперболических уравнений [10; 11].

### Постановка задачи поиска достаточных условий согласования

На множестве  $\dot{G}_\infty = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  рассматривается характеристическая смешанная задача

$$u_{tt}(x, t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x, t) - a_1 a_2 u_{xx}(x, t) = f(x, t), (x, t) \in \dot{G}_\infty, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in ]0, +\infty[, \quad (2)$$

$$\alpha(t)u_t(x, t) + \beta(t)u_x(x, t) + \gamma(t)u(x, t)|_{x=0} = \mu(t), t \in ]0, +\infty[, \quad (3)$$

где коэффициенты уравнения  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$  – вещественные постоянные; коэффициенты граничного режима  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t) = a_1\alpha(t)$ ,  $\gamma(t) \neq 0$  – заданные функции переменной  $t$ ; исходные данные задачи  $f$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\mu$  – заданные функции своих переменных  $x$  и  $t$ .

На основе физической интерпретации общего интеграла доказывается так же, как в [1, с. 54–59], что уравнение (1) моделирует вынужденные колебания однородной струны. Эти колебания представляют собой результат наложения прямой и обратной волн, движущихся соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси  $Ox$  со скоростями  $a_1$  и  $a_2$ , и воздействия вынуждающей силы с плотностью  $f$ . Если  $a_1 = a_2$ , то струна колеблется в покоящейся среде, не оказывающей сопротивления, и тогда уравнение (1) – общеизвестное уравнение колебаний однородной среды. Если же  $a_1 \neq a_2$ , то струна колеблется в движущейся, упруго сопротивляющейся однородной среде.

Пусть  $C(\Omega)$  – множество непрерывных функций на подмножестве  $\Omega$  плоскости  $\mathbb{R}^2$ ,  $C^k(\Omega)$  – множество всех  $k$  раз непрерывно дифференцируемых функций на  $\Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ .

Уравнение (1) в плоскости  $\mathbb{R}^2$  переменных  $x$  и  $t$  имеет два различных семейства характеристик:  $x - a_1t = C_1$ ,  $x + a_2t = C_2$ ,  $C_1, C_2 \in \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$ .

Первая четверть плоскости  $G_\infty = [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$  разбивается характеристикой  $x = a_1t$  на два множества:  $G_- = \{(x, t) \in G_\infty : x > a_1t, t \geq 0\}$  и  $G_+ = \{(x, t) \in G_\infty : x \leq a_1t, x \geq 0\}$ . В процессе решения аналогичной смешанной задачи для уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических и нестационарных первых косых производных на ее концах во множестве классических решений  $C^2(G_\infty)$  возникает потребность в решении вспомогательной характеристической смешанной задачи (1)–(3) для уравнения колебаний полуограниченной струны во множествах гладких решений  $C^m(G_\infty)$ ,  $m \geq 2$ . Согласно алгоритму нахождения единственного и устойчивого по исходным данным  $f$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\mu$  решения этой вспомогательной задачи сначала ищут решение  $u_-$  задачи Коши (1), (2) в  $G_-$ , затем решение  $u_+$  соответствующей задачи Пикара в  $G_+$  и с помощью необходимых и достаточных требований гладкости и условий согласования доказывают  $m$  раз непрерывную дифференцируемость функций  $u_-$ ,  $u_+$  на  $x = a_1t$ . В настоящей работе требуется найти только достаточные условия согласования граничного режима (3) с начальными условиями (2) и уравнением (1) на  $x = a_1t$  для более гладких решений из  $C^{m+1}(G_\infty)$ ,  $m \geq 2$ .

### Вывод достаточных условий согласования

Для более гладких решений  $u \in C^{m+1}(G_\infty)$  смешанной задачи (1)–(3) из уравнения (1), начальных условий (2) и граничного режима (3) вытекают очевидные требования гладкости исходных данных:

$$f \in C^{m-1}(G_\infty), \varphi \in C^{m+1}[0, +\infty[, \psi \in C^m[0, +\infty[, \mu \in C^m[0, +\infty[. \quad (4)$$

Полагая  $t = 0$  в режиме (3) и первой производной по  $t$  от этого режима и вычисляя значения слагаемых их левых частей с помощью начальных условий (2) при  $x = 0$  и уравнения (1) при  $t = 0$ ,  $x = 0$ , получаем для классических решений этой задачи два первых достаточных условия согласования начальных и граничных данных и правой части уравнения:

$$\alpha(0)(\psi(0) + a_1\varphi'(0)) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0), \quad (5)$$

$$\alpha'(0)(\psi(0) + a_1\varphi'(0)) + \gamma'(0)\varphi(0) + \alpha(0)(a_2(\psi'(0) + a_1\varphi''(0)) + f(0, 0)) + \gamma(0)\psi(0) = \mu'(0). \quad (6)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение.** Пусть в граничном режиме (3) с коэффициентами  $\alpha, \beta, \gamma \in C^m(\mathbb{R}_+)$  косая производная является характеристической, т. е.  $a_1\alpha(t) = \beta(t)$ ,  $\gamma(t) \neq 0$ ,  $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ . Если существует решение  $u \in C^{m+1}(G_\infty)$  смешанной задачи (1)–(3), то для  $f \in C^{m-1}(G_\infty)$ ,  $\varphi \in C^{m+1}(\mathbb{R}_+)$ ,  $\psi \in C^m(\mathbb{R}_+)$ ,  $\mu \in C^m(\mathbb{R}_+)$  из (4) верны условия согласования (5), (6) и справедливо

$$\begin{aligned}
 & \alpha^{(q)}(0)(\psi(0) + a_1\varphi'(0)) + \gamma^{(q)}(0)\varphi(0) + \\
 & + q\left(\alpha^{(q-1)}(0)(a_2(\psi'(0) + a_1\varphi''(0)) + f(0, 0)) + \gamma^{(q-1)}(0)\psi(0)\right) + \\
 & + \sum_{i=2}^q C_q^i \left( \alpha^{(q-i)}(0) \left( a_2^i (\psi^{(i)}(0) + a_1\varphi^{(i+1)}(0)) + \sum_{j=0}^{i-1} a_2^j f^{(j; i-j-1)}(0, 0) \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \gamma^{(q-i)}(0) \left( a_2 \frac{a_2^{i-1} - (-a_1)^{i-1}}{a_1 + a_2} (\psi^{(i-1)}(0) + a_1\varphi^{(i)}(0)) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{a_2^{k+1} - (-a_1)^{k+1}}{a_1 + a_2} f^{(k; i-k-2)}(0, 0) + (-a_1)^{i-1} \psi^{(i-1)}(0) \right) \right) = \mu^{(q)}(0), \quad q = 2, 3, \dots, m. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Доказательство. Введем обозначение  $\frac{\partial^{k+l} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^l} = u^{(k; l)}(x, t)$ . Тогда, учитывая характеристичность режима (3), т. е.  $\beta(t) = a_1 \alpha(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , его можно записать в виде

$$\left( \alpha(t) \left( u^{(0; 1)}(x, t) + a_1 u^{(1; 0)}(x, t) \right) + \gamma(t) u(x, t) \right) \Big|_{x=0} = \mu(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (8)$$

Продифференцируем  $q$  раз граничный режим (8) по переменной  $t$ :

$$\sum_{i=0}^q C_q^i \left( \alpha^{(q-i)}(t) \left[ u^{(0; i+1)}(x, t) + a_1 u^{(1; i)}(x, t) \right] + \gamma^{(q-i)}(t) u^{(0; i)}(x, t) \right) \Big|_{x=0} = \mu^{(q)}(t), \quad (9)$$

где  $C_q^i = \frac{q!}{i!(q-i)!}$ ,  $q \geq 2$ . Непосредственно из уравнения (1) следует равенство

$$\begin{aligned}
 u^{(0; 2)}(x, t) &= a_1 a_2 u^{(2; 0)}(x, t) + (a_2 - a_1) u^{(1; 1)}(x, t) + f(x, t) = \\
 &= a_2 \left( u^{(1; 1)}(x, t) + a_1 u^{(2; 0)}(x, t) \right) - a_1 u^{(1; 1)}(x, t) + f(x, t).
 \end{aligned}$$

Дифференцируем это равенство  $l$  раз по переменной  $x$  и  $n-2$  раза по переменной  $t$ :

$$u^{(l; n)}(x, t) = a_2 \left( u^{(l+1; n-1)}(x, t) + a_1 u^{(l+2; n-2)}(x, t) \right) - a_1 u^{(l+1; n-1)}(x, t) + f^{(l; n-2)}(x, t), \quad n \geq 2. \quad (10)$$

В выражении в квадратных скобках из (9) запишем производную  $u^{(0; i+1)}(x, t)$ , используя формулу (10) при  $l=0$ ,  $n=i+1$ :

$$\begin{aligned}
 u^{(0; i+1)}(x, t) + a_1 u^{(1; i)}(x, t) &= a_2 \left( u^{(1; i)}(x, t) + a_1 u^{(2; i-1)}(x, t) \right) - a_1 u^{(1; i)}(x, t) + \\
 + f^{(0; i-1)}(x, t) + a_1 u^{(1; i)}(x, t) &= a_2 \left( u^{(1; i)}(x, t) + a_1 u^{(2; i-1)}(x, t) \right) + f^{(0; i-1)}(x, t). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Можно заметить, что по сравнению с левой частью равенства (11) в его правой части порядок производных от функции  $u$  по переменной  $t$  снизился на единицу, а порядок производных по переменной  $x$  повысился на единицу. Более того, она записана в виде  $u^{(1; i)}(x, t) + a_1 u^{(2; i-1)}(x, t)$ , аналогичном виду исходного выражения  $u^{(0; i+1)}(x, t) + a_1 u^{(1; i)}(x, t)$ ,  $i = \overline{1, q}$ . Поэтому и далее будем пользоваться формулами (10) и (11) так, чтобы положительный порядок производных по переменной  $t$  от функции  $u$  стал не выше 1.

На первом шаге этого процесса с помощью формулы (10) при  $l=1$ ,  $n=i$  имеем равенство

$$\begin{aligned}
 & a_2 \left( u^{(1; i)}(x, t) + a_1 u^{(2; i-1)}(x, t) \right) + f^{(0; i-1)}(x, t) = \\
 & = a_2^2 \left( u^{(2; i-1)}(x, t) + a_1 u^{(3; i-2)}(x, t) \right) + a_2 f^{(1; i-2)}(x, t) + f^{(0; i-1)}(x, t),
 \end{aligned}$$

аналогичное равенству (11). На втором шаге из формулы (10) при  $l = 2, n = i - 1$  находим

$$\begin{aligned} & a_2^2 \left( u^{(2;i-1)}(x, t) + a_1 u^{(3;i-2)}(x, t) \right) + a_2 f^{(1;i-2)}(x, t) + f^{(0;i-1)}(x, t) = \\ & = a_2^3 \left( u^{(3;i-2)}(x, t) + a_1 u^{(4;i-3)}(x, t) \right) + a_2^2 f^{(2;i-3)}(x, t) + a_2 f^{(1;i-2)}(x, t) + f^{(0;i-1)}(x, t). \end{aligned}$$

После  $i$ -го шага при  $l = i - 1, n = 2$  приходим к формуле

$$u^{(0;i+1)}(x, t) + a_1 u^{(1;i)}(x, t) = a_2^i \left( u^{(i;1)}(x, t) + a_1 u^{(i+1;0)}(x, t) \right) + \sum_{j=0}^{i-1} a_2^j f^{(j;i-j-1)}(x, t), \quad i \geq 1. \quad (12)$$

В равенстве (9) осталось преобразовать слагаемое  $u^{(0;i)}(x, t), i = \overline{2, q}$ . Верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & u^{(0;i)}(x, t) = u^{(0;i)}(x, t) + a_1 u^{(1;i-1)}(x, t) - a_1 u^{(1;i-1)}(x, t) = \\ & = u^{(0;i)}(x, t) + a_1 u^{(1;i-1)}(x, t) - a_1 \left( u^{(1;i-1)}(x, t) + a_1 u^{(2;i-2)}(x, t) \right) + a_1^2 u^{(2;i-2)}(x, t) = \\ & = \sum_{k=0}^{i-2} (-a_1)^k \left[ u^{(k;i-k)}(x, t) + a_1 u^{(k+1;i-k-1)}(x, t) \right] + (-a_1)^{i-1} u^{(i-1;1)}(x, t). \end{aligned} \quad (13)$$

Продифференцируем  $l$  раз по  $x$  равенство (12) при  $i = n - 1$  и получим представления

$$\begin{aligned} & u^{(l;n)}(x, t) + a_1 u^{(l+1;n-1)}(x, t) = \\ & = a_2^{n-1} \left( u^{(l+n-1;1)}(x, t) + a_1 u^{(l+n;0)}(x, t) \right) + \sum_{j=0}^{n-2} a_2^j f^{(l+j;n-j-2)}(x, t), \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (14)$$

Для выражения в квадратных скобках из (13) применим формулу (14) при  $l = k, n = i - k$ . Тогда частная производная  $u^{(0;i)}(x, t)$  равна функции

$$\sum_{k=0}^{i-2} (-a_1)^k \left( a_2^{i-k-1} \left[ u^{(i-1;1)}(x, t) + a_1 u^{(i;0)}(x, t) \right] + \sum_{j=0}^{i-k-2} a_2^j f^{(k+j;i-k-j-2)}(x, t) \right) + (-a_1)^{i-1} u^{(i-1;1)}(x, t).$$

Поскольку слагаемые в квадратных скобках не зависят от индекса  $k$ , то эту функцию можно записать как

$$\begin{aligned} & \left( u^{(i-1;1)}(x, t) + a_1 u^{(i;0)}(x, t) \right) \sum_{k=0}^{i-2} (-a_1)^k a_2^{i-k-1} + \\ & + \sum_{k=0}^{i-2} (-a_1)^k \sum_{j=0}^{i-k-2} a_2^j f^{(k+j;i-k-j-2)}(x, t) + (-a_1)^{i-1} u^{(i-1;1)}(x, t). \end{aligned}$$

Воспользуемся очевидными равенствами

$$\sum_{k=0}^{i-2} (-a_1)^k a_2^{i-k-2} = a_2^{i-2} - a_1 a_2^{i-3} + a_1^2 a_2^{i-4} - \dots + (-a_1)^{i-2} = \frac{a_2^{i-1} - (-a_1)^{i-1}}{a_1 + a_2}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{i-2} (-a_1)^k \sum_{j=0}^{i-k-2} a_2^j f^{(k+j;i-k-j-2)}(x, t) = \\ & = \sum_{s=0}^{i-2} f^{(s;i-s-2)}(x, t) \sum_{v=0}^s (-a_1)^v a_2^{s-v} = \sum_{s=0}^{i-2} \frac{a_2^{s+1} - (-a_1)^{s+1}}{a_1 + a_2} f^{(s;i-s-2)}(x, t) \end{aligned}$$

и придем к формуле

$$u^{(0;i)}(x, t) = a_2 \frac{a_2^{i-1} - (-a_1)^{i-1}}{a_1 + a_2} \left( u^{(i-1;1)}(x, t) + a_1 u^{(i;0)}(x, t) \right) + \sum_{s=0}^{i-2} \frac{a_2^{s+1} - (-a_1)^{s+1}}{a_1 + a_2} f^{(s;i-s-2)}(x, t) + (-a_1)^{i-1} u^{(i-1;1)}(x, t). \quad (16)$$

Здесь во второй строке равенств (15) мы сначала в соответствующей сумме меняем индекс  $s = k + j$ , потом суммируем коэффициенты при одинаковых частных производных от  $f$  и, наконец, находим значения числовых сумм с помощью первой строки этих равенств.

В левой части (9) к слагаемым суммы для  $i \geq 2$  применим формулы (12) и (16) и получим

$$\begin{aligned} & \left( \alpha^{(q)}(t) \left( u^{(0;1)}(x, t) + a_1 u^{(1;0)}(x, t) \right) + \gamma^{(q)}(t) u(x, t) \right) + \\ & + q \left( \alpha^{(q-1)}(t) \left( u^{(0;2)}(x, t) + a_1 u^{(1;1)}(x, t) \right) + \gamma^{(q-1)}(t) u^{(0;1)}(x, t) \right) + \\ & + \sum_{i=2}^q C_q^i \left( \alpha^{(q-i)}(t) \left( a_2^i \left( u^{(i;1)}(x, t) + a_1 u^{(i+1;0)}(x, t) \right) + \sum_{j=0}^{i-1} a_2^j f^{(j;i-j-1)}(x, t) \right) + \right. \\ & \left. + \gamma^{(q-i)}(t) \left( a_2 \frac{a_2^{i-1} - (-a_1)^{i-1}}{a_1 + a_2} \left( u^{(i-1;1)}(x, t) + a_1 u^{(i;0)}(x, t) \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=0}^{i-2} \frac{a_2^{k+1} - (-a_1)^{k+1}}{a_1 + a_2} f^{(k;i-k-2)}(x, t) + (-a_1)^{i-1} u^{(i-1;1)}(x, t) \right) \right) \Bigg|_{x=0} = \mu^{(q)}(t), \quad q \geq 2. \quad (17) \end{aligned}$$

В силу представления (14) при  $l = 0$ ,  $n = 2$  справедливо преобразование

$$u^{(0;2)}(x, t) + a_1 u^{(1;1)}(x, t) = a_2 \left( u^{(1;1)}(x, t) + a_1 u^{(2;0)}(x, t) \right) + f(x, t).$$

Если в (17) воспользоваться этим преобразованием, положить  $t = 0$  и учесть начальные условия (2), то будем иметь условия согласования (7).

*Замечание.* Условия согласования (7) при  $q = 0$  и  $q = 1$ , очевидно, становятся условиями согласования (5) и (6) соответственно. Для функций  $u \in C^m(G_\infty)$  условие (7) при  $q = m$  определено для  $\varphi \in C^{m+1}(\mathbb{R}_+)$ ,  $\psi, \mu \in C^m(\mathbb{R}_+)$ ,  $f \in C^{m-1}(G_\infty)$  и является лишь достаточным, потому что для  $u \in C^m(G_\infty)$  эти исходные данные – только  $\varphi(x) = u(x, 0) \in C^m(\mathbb{R}_+)$ ,  $\psi(0) = u_t(x, 0) \in C^{m-1}(\mathbb{R}_+)$ ,  $f(x, t) = u_{tt}(x, t) + (a_1 - a_2)u_{xt}(x, t) - a_1 a_2 u_{xx}(x, t) \in C^{m-2}(G_\infty)$ . Для существования слагаемых левой части равенства (7) при  $q = m$  не нужна завышенная гладкость  $u \in C^{m+1}(G_\infty)$ , но хватает минимальной (необходимой) гладкости, а именно  $\alpha(0)\varphi^{(m+1)}(0)$ ,  $\alpha(0)\psi^{(m)}(0) \in \mathbb{R}_+$  и существования произведения  $\alpha(0)$  и производной по вектору  $\vec{v} = (a_2, 1)$  от соответствующей суммы частных производных порядка  $m - 2$  от правой части  $f$  в начале координат  $(0, 0)$ .

Необходимость этих и более общих требований гладкости для решений  $u \in C^m(G_\infty)$  будет строго доказана модификацией метода характеристик [1] в наших следующих исследованиях. В дальнейшем необходимость условий согласования типа (7) характеристической смешанной задачи для решений  $u \in C^m(G_\infty)$ ,  $m \geq 2$ , получится предельным переходом с гладких функций  $u \in C^{m+1}(G_\infty)$  на данные  $f, \varphi, \psi, \mu$  с минимально возможной их гладкостью. При  $m = 2$  это уже сделано в работе [3]. В случае  $a_1 = a_2 = a > 0$  и гладкости исходных данных  $f, \varphi, \psi, \mu$ , указанной в утверждении, условия согласования (7) совпадают с условиями согласования из критерия корректности вспомогательной смешанной задачи для полуограниченной струны, который использован в [4].

## Заключение

В настоящей работе выведены достаточные условия согласования характеристических нестационарных первых производных на конце полуограниченной струны с начальными условиями и более общим одномерным волновым уравнением для решений  $u \in C^{m+1}(G_\infty)$ ,  $m \geq 2$ , этой смешанной задачи. Указанные условия очевидно обеспечивают  $m$  раз непрерывную дифференцируемость решения  $u$  на критической характеристике  $x = a_1 t$  уравнения. В дальнейшем полученные достаточные условия согласования (5)–(7) будут ослаблены до необходимых и использованы для явного вычисления единственного и устойчивого по  $f$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\mu$  классического решения и вывода критерия корректности по Адамару аналогичной вспомогательной смешанной задачи во множестве решений, принадлежащих  $C^m(G_\infty)$ ,  $m \geq 2$ .

## Библиографические ссылки

1. Тихонов АН, Самарский АА. *Уравнения математической физики*. Москва: Наука; 2004. 798 с.
2. Барановская СН, Юрчук НИ. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии. *Дифференциальные уравнения*. 2009;45(8):1188–1191.
3. Ломовцев ФЕ, Устилко ЕВ. Критерий корректности смешанной задачи для общего уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной характеристической первой косой производной в граничном условии. *Вестник Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта*. 2018;4(101):18–28.
4. Ломовцев ФЕ, Точко ТС. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических нестационарных первых косых производных на концах. *Вестник Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальна тэхніка і кіраванне*. 2019;9(2):56–75.
5. Ломовцев ФЕ. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны. В: *Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Материалы Международной математической конференции; 7–10 декабря 2015 г.; Минск, Беларусь. Часть 2*. Минск: Институт математики НАН Беларуси; 2015. с. 74–75.
6. Ломовцев ФЕ. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2017;3:38–52.
7. Ломовцев ФЕ. Решение без продолжения данных смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний струны при граничных косых производных. *Дифференциальные уравнения*. 2016;52(8):1128–1132.
8. Ломовцев ФЕ. Необходимые и достаточные условия вынужденных колебаний полуограниченной струны с первой характеристической косой производной в нестационарном граничном условии. *Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2016;1:21–27.
9. Новиков ЕН. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными [диссертация]. Минск: БГУ; 2017. 258 с.
10. Ломовцев ФЕ, Юрчук НИ. Решение начально-краевой задачи для нестрого гиперболического уравнения при смешанных граничных условиях в четверти плоскости. *Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2016;3:51–57.
11. Ломовцев ФЕ. Критерий корректности смешанной задачи для одного параболического уравнения на отрезке со смешанными граничными условиями на концах. В: *Современные методы теории функций и смежные проблемы. Воронежская зимняя математическая школа. Материалы международной конференции; 28 января – 2 февраля 2019 г.; Воронеж, Россия*. Воронеж: Издательский дом ВГУ; 2019. с. 184–185.

## References

1. Tikhonov AN, Samarskiy AA. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [The equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka; 2004. 798 p. Russian.
2. Baranovskaya SN, Yurchuk NI. [Mixed problem for the oscillation equation of a string with a time-dependent oblique derivative in the boundary condition]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2009;45(8):1188–1191. Russian.
3. Lomovtsev FE, Ustilko EV. Correctness criterion of a mixed problem for the general oscillations equation of a semi-bounded string with a non-stationary characteristic of first directional derivative in a boundary condition. *Vesnik Vicebskaga dzjarzhawnaga wniversitjeta*. 2018;4(101):18–28. Russian.
4. Lomovtsev FE, Tochko TS. [Mixed problem for the inhomogeneous equation of oscillations of a bounded string for characteristic unsteady first oblique derivatives at the ends]. *Vesnik Grodzenskaga dzjarzhawnaga wniversitjeta imja Janki Kupaly. Serija 2. Matjematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naja tjehnika i kiravanne*. 2019;9(2):56–75. Russian.
5. Lomovtsev FE. [The method of auxiliary mixed problems for a semi-bounded string]. In: *Shesty Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsial'nyim uravneniyam. Materialy Mezhdunarodnoi matematicheskoi konferentsii; 7–10 dekabrya 2015 g.; Minsk, Belarus'. Chast' 2* [The sixth Bogdanov readings on ordinary differential equations. Proceedings of the International mathematical conference; 2015 December 7–10; Minsk, Belarus. Part 2]. Minsk: Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus; 2015. p. 74–75. Russian.
6. Lomautsau FE. Correction method of test solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for minimal smoothness of its right-hand side. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2017;3:38–52. Russian.
7. Lomovtsev FE. [Solution without extension of the data of the mixed problem for the inhomogeneous oscillation equation of a string with boundary oblique derivatives]. *Differentsial'nye uravneniya*. 2016;52(8):1128–1132. Russian.

8. Lomovtsev FE. Necessary and sufficient conditions for forced vibrations of a semibounded string with the first characteristic directional derivative in the unsteady boundary condition. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2016;1:21–27. Russian.

9. Novikov EN. [Mixed problems for the equation of forced oscillations of a bounded string under non-stationary boundary conditions with first and second oblique derivatives] [dissertation]. Minsk: Belarusian State University; 2017. 258 p. Russian.

10. Lomovtsev FE, Yurchuk NI. Initial boundary value problem for the non-strictly hyperbolic equation with mixed boundary conditions in a quadrant. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*. 2016;3:51–57. Russian.

11. Lomovtsev FE. [Correctness criterion of the mixed problem for one parabolic equation on an interval with mixed boundary conditions at the ends]. In: *Sovremennye metody teorii funktsii i smezhnye problemy. Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola. Materialy mezhdunarodnoi konferentsii; 28 yanvarya – 2 fevralya 2019 g.; Voronezh, Rossiya* [Voronezh Winter Mathematical School. Proceedings of the International conference; 2019 January 28 – February 2; Voronezh, Russia]. Voronezh: Voronezh State University Publishing House; 2019. p. 184–185. Russian.

Статья поступила в редколлегию 03.06.2019.  
Received by editorial board 03.06.2019.