УДК 515.12

## О НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКТОРОВ ВИДА $C(X, Y)$

***Г. О. КУКРАК*[1], *В. Л. ТИМОХОВИЧ*[1]**

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Рассматривается категория $\mathcal{P}$, объекты которой – пары топологических пространств $(X, Y)$. Каждой такой паре ставится в соответствие пространство непрерывных отображений $C_\tau(X, Y)$ с топологией $\tau$. Наложением некоторых ограничений на объекты и морфизмы категории $\mathcal{P}$ выделяется подкатегория $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}$, для которой указанное отображение является функтором из $\mathcal{K}$ в категорию Top топологических пространств и непрерывных отображений. Исследуется вопрос о том, при каких дополнительных условиях на $\mathcal{K}$ указанный функтор непрерывен. При этом решается задача нахождения предела обратного спектра в категории $\mathcal{P}$. Показано, что она сводится к отысканию пределов возникающих естественным образом прямого и обратного спектров в категории Top. В качестве $\tau$ рассмотрены топология поточечной сходимости, компактно-открытая топология и топология графика.

***Ключевые слова:*** пространство отображений; функтор $C(X, Y)$; непрерывный функтор; обратный спектр; прямой спектр.

**Образец цитирования:**
Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. О непрерывности функторов вида $C(X, Y)$. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2020;1:22–29.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-22-29

**For citation:**
Kukrak HO, Timokhovich VL. On the continuity of functors of the type $C(X, Y)$. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;1:22–29. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-22-29

**Авторы:**
***Глеб Олегович Кукрак*** – кандидат физико-математических наук; доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета.
***Владимир Леонидович Тимохович*** – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета.

**Authors:**
***Hleb O. Kukrak***, PhD (physics and mathematics); associate professor at the department of geometry, topology and methods of teaching mathematics, faculty of mechanics and mathematics.
*kukrak@bsu.by*
***Vladimir L. Timokhovich***, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of geometry, topology and methods of teaching mathematics, faculty of mechanics and mathematics.
*timvlaleo@gmail.com*

# ON THE CONTINUITY OF FUNCTORS OF THE TYPE $C(X, Y)$

***H. O. KUKRAK*[a], *V. L. TIMOKHOVICH*[a]**

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
*Corresponding author: H. O. Kukrak (timvlaleo@gmail.com)*

We consider the category $\mathcal{P}$, the objects of which are pairs of topological spaces $(X, Y)$. Each such pair $(X, Y)$ is assigned the space of continuous maps $C_\tau(X, Y)$ with some topology $\tau$. By imposing some restrictions on objects and morphisms of category $\mathcal{P}$, we define a subcategory $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}$, for which the above map is a functor from $\mathcal{K}$ to the category Top of topological spaces and continuous maps. The following question is investigated. What are the additional conditions on $\mathcal{K}$, under which the above functor is continuous? Along the way the problem of finding the limit of the inverse spectrum in the category $\mathcal{P}$ is solved. We show, that it reduces to finding the limits of the corresponding direct spectrum and inverse spectrum in the category Top. Point convergence topology, compact-open topology and graph topology are considered as the topology $\tau$.

***Keywords:*** function space; functor $C(X, Y)$; continuous functor; inverse spectrum; direct spectrum.

## Введение

Рассмотрим категорию $\mathcal{P}$, объектами которой являются произвольные упорядоченные пары $(X, Y)$ топологических пространств, а морфизмом пары $(X, Y)$ в пару $(E, Z)$ – любая упорядоченная пара $(\varphi, \psi)$ непрерывных отображений $E \xrightarrow{\varphi} X$, $Y \xrightarrow{\psi} Z$ (композиция $(\varphi', \psi') \circ (\varphi, \psi) = (\varphi \circ \varphi', \psi' \circ \psi)$). Переходя от пар $(X, Y)$, $(E, Z)$ и морфизма $(X, Y) \xrightarrow{(\varphi, \psi)} (E, Z)$ к множествам непрерывных отображений $C(X, Y)$, $C(E, Z)$ (кратко: $C(X)$ при $Y = \mathbb{R}$) и соответствующему отображению $C(X, Y) \xrightarrow{c(\varphi, \psi)}$ $\xrightarrow{c(\varphi, \psi)} C(E, Z): f \to \bar{f} = \psi \circ f \circ \varphi$, получаем функтор $C$ из категории $\mathcal{P}$ в категорию Set всех множеств и отображений. При задании на множествах вида $C(X, Y)$ некоторой топологии $\tau$ естественно возникает задача отыскания достаточно обширной подкатегории $\mathcal{K}$ в $\mathcal{P}$, в рамках которой любое отображение вида $C(X, Y) \xrightarrow{c(\varphi, \psi)} C(E, Z)$ непрерывно, и тогда $C$ – функтор из $\mathcal{K}$ в категорию Top топологических пространств и непрерывных отображений.

Исследования в указанном направлении начаты в работе [1], которая, в свою очередь, предваряется статьями [2–5]. В настоящей статье они продолжены. В качестве $\tau$ рассмотрены топология поточечной сходимости $\tau_p$, компактно-открытая топология $\tau_\kappa$ и топология графика $\tau_\Gamma$, а соответствующие функторы в категорию Top исследованы на непрерывность.

## Понятия и обозначения

Пусть $X$ – топологическое пространство (далее – просто пространство), $A \subset X$, $x \in X$. Обозначим: $\tau_X$ – топология пространства $X$, $\tau_X(A) = \{U \in \tau_X \mid A \subset U\}$, $\tau_X(x) = \tau_X(\{x\})$; $\mathrm{id}_X$ – тождественное отображение $X$ на себя.

Пространство $X$ называют:

• $k$-пространством [6, с. 236], если из того, что $A$ не замкнуто, следует существование компактного множества $B \subset X$, для которого $A \cap B$ не замкнуто в $B$;

• изокомпактным [7], если компактно любое счетно-компактное замкнутое множество $B \subset X$ (таково, например, любое слабо паракомпактное пространство [6, с. 477]).

Отображение $f \in C(X, Y)$ называют:

• совершенным [6, с. 277], если оно замкнуто (т. е. $f(F)$ замкнуто в $Y$ для любого замкнутого $F \subset X$) и $f^{-1}(y)$ компактно для любой точки $y \in Y$;

• $k$-накрывающим [6, с. 506], если для каждого компактного $B \subset Y$ найдется компактное $F \subset X$, для которого $f(F) = B$. Всякое совершенное сюръективное отображение является $k$-накрывающим [6, с. 278].

Отметим, что, в отличие от [6], в определениях $k$-пространства и совершенного и $k$-накрывающего отображений никакие условия отделимости нами не предполагаются.

На множестве $C(X, Y)$ топология поточечной сходимости $\tau_p$ [6, с. 172], компактно-открытая топология $\tau_\kappa$ [6, с. 243] и топология графика $\tau_\Gamma$ [8] определены предбазами, состоящими из всех множеств вида $\langle x, V\rangle = \left\{ f \in C(X, Y) \middle| f(x) \in V \right\}$ (для $\tau_p$), $\langle F, V\rangle = \left\{ f \in C(X, Y) \middle| f(F) \subset V \right\}$ (для $\tau_\kappa$) и $O(U) = \left\{ f \in \right.$ $\left. \in C(X, Y) \middle| \Gamma_f \in U \right\}$ (для $\tau_\Gamma$), где $x \in X$, $F \subset X$ и $F$ компактно, $V \in \tau_Y$, $\Gamma_f = \left\{ (x, f(x)) \in X \times Y \middle| x \in X \right\}$ – график отображения $f$ и $U$ – открытое множество в $X \times Y$. Соответствующие пространства обозначаем кратко через $C_p(X, Y)$, $C_\kappa(X, Y)$ и $C_\Gamma(X, Y)$.

Пусть $\mathcal{A}$ – некоторая категория, множество $\Sigma$ направлено (т. е. частично упорядочено и для любых $\alpha, \beta \in \Sigma$ можно выбрать $\gamma \in \Sigma$ так, что $\gamma \geq \alpha$ и $\gamma \geq \beta$) и для каждых $\alpha \in \Sigma$ и $\beta \geq \alpha$ определены объект $X_\alpha$ и морфизм $\varphi_\alpha^\beta$ из $\mathcal{A}$. Семейство $S$ указанных объектов и связующих морфизмов обозначают кратко $S = \left\{ X_\alpha, \varphi_\alpha^\beta, \Sigma \right\}$ и называют *обратным спектром* или *проективной системой* [9, с. 89; 10, с. 59] (*прямым спектром* или *индуктивной системой* [10, с. 59]), если $\varphi_\alpha^\alpha$ есть тождественный морфизм $1_{X_\alpha}$, $\varphi_\alpha^\beta : X_\beta \to$ $\to X_\alpha$ ($\varphi_\alpha^\beta : X_\alpha \to X_\beta$ соответственно) и $\varphi_\alpha^\gamma = \varphi_\alpha^\beta \circ \varphi_\beta^\gamma$ ($\varphi_\alpha^\gamma = \varphi_\beta^\gamma \circ \varphi_\alpha^\beta$) при $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Под *пределом* в категории $\mathcal{A}$ обратного (прямого) спектра $S$ понимают объект $X$ в совокупности с морфизмами $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ ($\pi_\alpha : X_\alpha \to X$), удовлетворяющими условиям:

(*a*) $\pi_\alpha = \varphi_\alpha^\beta \circ \pi_\beta$ ($\pi_\alpha = \pi_\beta \circ \varphi_\alpha^\beta$) при $\alpha \leq \beta$;

(*b*) если объект $X'$ из $\mathcal{A}$ и морфизмы $\pi'_\alpha : X' \to X_\alpha$ ($\pi'_\alpha : X_\alpha \to X'$) таковы, что $\pi'_\alpha = \varphi_\alpha^\beta \circ \pi'_\beta$ ($\pi'_\alpha =$ $= \pi'_\beta \circ \varphi_\alpha^\beta$) при $\alpha \leq \beta$, то существует единственный морфизм $h : X' \to X$ ($h : X \to X'$), для которого $\pi'_\alpha = \pi_\alpha \circ h$ ($\pi'_\alpha = h \circ \pi_\alpha$) при любом $\alpha \in \Sigma$. Если спектр $S$ обратный, то его предел обозначают $\varprojlim S$ или $\varprojlim X_\alpha$, если прямой, то $\varinjlim S$ или $\varinjlim X_\alpha$, а морфизмы $\pi_\alpha$ называют (в обоих случаях) *каноническими проекциями*.

В категории Top пределы спектров существуют и определены следующим образом. Если спектр $S$ обратный, то его предел – подпространство $L \subset \prod_{\alpha \in \Sigma} X_\alpha$, $L = \left\{ (x_\alpha | \alpha \in \Sigma) \middle| x_\alpha = \varphi_\alpha^\beta(x_\beta),\ \alpha \leq \beta \right\}$, а морфизмы $\pi_\alpha$ – естественные проекции $L \xrightarrow{\pi_\alpha} X_\alpha$. Элементы $L$ называют *нитями спектра S*. Базу в $L$ образуют множества вида $\pi_\alpha^{-1}(V)$, где $V \in \tau_{X_\alpha}$ [9, с. 90]. Предел прямого спектра $S$ – фактор-пространство $K$ дискретной суммы $\coprod_{\alpha \in \Sigma} X_\alpha$ по следующему отношению эквивалентности: $x \sim y$ ($x \in X_\alpha$, $y \in X_\beta$), если $\varphi_\alpha^\gamma(x) = \varphi_\beta^\gamma(y)$ при некотором $\gamma \in \Sigma$, а канонические проекции $X_\alpha \to K$ (их обозначаем через $\iota_\alpha$) определены как сужения $\iota_\alpha = \pi|_{X_\alpha}$, где $\pi : \coprod_{\alpha \in \Sigma} X_\alpha \to K$ – естественная проекция.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – категории, $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – ковариантный функтор, $S = \left\{ X_\alpha, \varphi_\alpha^\beta, \Sigma \right\}$ – обратный спектр в $\mathcal{A}$, имеющий в $\mathcal{A}$ предел $L = \varprojlim X_\alpha$ с каноническими проекциями $L \xrightarrow{\pi_\alpha} X_\alpha$. В категории $\mathcal{B}$ определены соответствующие обратный спектр $\mathcal{F}(S) = \left\{ \mathcal{F}(X_\alpha),\ \mathcal{F}(\varphi_\alpha^\beta), \Sigma \right\}$, объект $\mathcal{F}(L)$ и морфизмы $\mathcal{F}(\pi_\alpha) : \mathcal{F}(L) \to$ $\to \mathcal{F}(X_\alpha)$, причем $\mathcal{F}(\pi_\alpha) = \mathcal{F}(\varphi_\alpha^\beta) \circ \mathcal{F}(\pi_\beta)$ при $\alpha \leq \beta$. Функтор $\mathcal{F}$ называют *непрерывным* или *перестановочным с обратным пределом* [9, с. 187; 10, с. 64], если для любого такого $S$ объект $\mathcal{F}(L)$ в совокупности с морфизмами $\mathcal{F}(\pi_\alpha) : \mathcal{F}(L) \to \mathcal{F}(X_\alpha)$ является пределом обратного спектра $\mathcal{F}(S)$ в категории $\mathcal{B}$.

## Функторы $C_p$, $C_\kappa$ и $C_\Gamma$

Задавая на множествах вида $C(X, Y)$ некоторую топологию $\tau$, мы ставим в соответствие каждому объекту $(X, Y)$ категории $\mathcal{P}$ топологическое пространство $C_\tau(X, Y)$. Если при этом для любого морфизма $(X, Y) \xrightarrow{(\varphi, \psi)} (E, Z)$ из некоторой подкатегории $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}$ соответствующее отображение $C_\tau(X, Y) \xrightarrow{c(\varphi, \psi)} C_\tau(E, Z) : f \to \overline{f} = \psi \circ f \circ \varphi$ непрерывно, то получаем ковариантный функтор $C_\tau$ из $\mathcal{K}$ в категорию Top. Далее в качестве $\tau$ рассмотрим топологии $\tau_p$, $\tau_\kappa$ и $\tau_\Gamma$, а соответствующие функторы обозначим кратко через $C_p$, $C_\kappa$ и $C_\Gamma$. Нам понадобятся следующие из полученных ранее результатов.

**Теорема 1** [1]. *Отображения* $C_p(X, Y) \xrightarrow{c(\varphi,\, \psi)} C_p(E, Z)$ *и* $C_\kappa(X, Y) \xrightarrow{c(\varphi,\, \psi)} C_\kappa(E, Z)$ *непрерывны при любых X, Y, E, Z,* $\varphi \in C(E, X)$ *и* $\psi \in C(Y, Z)$.

**Следствие 1.** $C_p$ *и* $C_\kappa$ *– функторы из категории* $\mathcal{P}$ *в категорию Top.*

**Теорема 2** [1]. *Если отображение* $\varphi \in C(E, X)$ *совершенно, то* $C_\Gamma(X, Y) \xrightarrow{c(\varphi,\, \psi)} C_\Gamma(E, Z)$ *непрерывно для любых Y, Z и* $\psi \in C(Y, Z)$.

**Следствие 2.** *Пусть* $\mathcal{K}$ *– подкатегория в* $\mathcal{P}$*, в которой для каждого морфизма* $(\varphi, \psi)$ *отображение* $\varphi$ *совершенно. Тогда* $C_\Gamma$ *– функтор из* $\mathcal{K}$ *в категорию Top.*

При непрерывности отображений вида $C_\Gamma(X, Y) \xrightarrow{c(\varphi,\, \psi)} C_\Gamma(E, Z)$ вопрос (обратный) о совершенности $\varphi \in C(E, X)$ решается следующим образом.

**Теорема 3** [1]. *Отображение* $\varphi \in C(E, X)$ *совершенно, если отображение* $C_\Gamma(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{c(\varphi,\, \mathrm{id}_\mathbb{R})} C_\Gamma(E, \mathbb{R})$ *непрерывно, E изокомпактно, а X – вполне регулярное k-пространство.*

**Следствие 3.** *Пусть* $\mathcal{K}$ *– подкатегория в* $\mathcal{P}$*, в которой для любого объекта* $(X, Y)$ *пространство X – вполне регулярное и изокомпактное k-пространство, и вместе с каждым морфизмом* $(X, Y) \xrightarrow{(\varphi,\, \psi)} (E, Z)$ *содержится также морфизм* $(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{(\varphi,\, \mathrm{id}_\mathbb{R})} (E, \mathbb{R})$*. Если при этом* $C_\Gamma$ *является функтором из* $\mathcal{K}$ *в категорию Top, то для любого морфизма* $(\varphi, \psi)$ *из* $\mathcal{K}$ *отображение* $\varphi$ *совершенно.*

## Непрерывность функторов $C_p$, $C_\kappa$ и $C_\Gamma$

В категории $\mathcal{P}$ рассмотрим обратный спектр $S = \left\{(X_\alpha, Y_\alpha), \left(\varphi_\alpha^\beta, \psi_\alpha^\beta\right), \Sigma\right\}$ и соответствующие спектры в категории Top: прямой спектр $S_X = \left\{X_\alpha, \varphi_\alpha^\beta, \Sigma\right\}$ и обратный спектр $S_Y = \left\{Y_\alpha, \psi_\alpha^\beta, \Sigma\right\}$. Пусть $K = \underline{\lim} X_\alpha$ и $L = \underline{\lim} Y_\alpha$ – их пределы, $\iota_\alpha : X_\alpha \to K$ и $\pi_\alpha : L \to Y_\alpha$ – соответствующие канонические проекции. Возвращаясь в $\mathcal{P}$, получим пару $(K, L)$ и дополнительно к морфизмам $(X_\beta, Y_\beta) \xrightarrow{(\varphi_\alpha^\beta,\, \psi_\alpha^\beta)} (X_\alpha, Y_\alpha)$ также морфизмы $(K, L) \xrightarrow{(\iota_\alpha,\, \pi_\alpha)} (X_\alpha, Y_\alpha)$, причем $(\iota_\alpha, \pi_\alpha) = \left(\varphi_\alpha^\beta, \psi_\alpha^\beta\right) \circ (\iota_\beta, \pi_\beta)$ при $\alpha \le \beta$. Пусть далее пара $(K', L')$ и морфизмы $(K', L') \xrightarrow{(\iota'_\alpha,\, \pi'_\alpha)} (X_\alpha, Y_\alpha)$ таковы, что $(\iota'_\alpha, \pi'_\alpha) = \left(\varphi_\alpha^\beta, \psi_\alpha^\beta\right) \circ (\iota'_\beta, \pi'_\beta)$ при $\alpha \le \beta$.

Очевидно, что для отображений $\iota'_\alpha : X_\alpha \to K'$ и $\pi'_\alpha : L' \to Y_\alpha$ выполняются соотношения $\iota'_\alpha = \iota'_\beta \circ \varphi_\alpha^\beta$ и $\pi'_\alpha = \psi_\alpha^\beta \circ \pi'_\beta$ при $\alpha \le \beta$ и, следовательно, определены однозначно непрерывные отображения $K \xrightarrow{u} K'$ и $L' \xrightarrow{\nu} L$ такие, что $\iota'_\alpha = u \circ \iota_\alpha$ и $\pi'_\alpha = \pi_\alpha \circ \nu$ для любого $\alpha \in \Sigma$. Но тогда морфизм $(K', L') \xrightarrow{(u,\, \nu)} (K, L)$ единственный, для которого $(\iota'_\alpha, \pi'_\alpha) = (\iota_\alpha, \pi_\alpha) \circ (u, \nu)$ при всех $\alpha \in \Sigma$. Итак, условия (*a*) и (*b*) категорного определения предела обратного спектра проверены и таким образом доказана следующая теорема.

**Теорема 4.** *В категории* $\mathcal{P}$ *пределом обратного спектра* $S = \left\{(X_\alpha, Y_\alpha), \left(\varphi_\alpha^\beta, \psi_\alpha^\beta\right), \Sigma\right\}$ *является пара* $(K, L)$*, где* $K = \underline{\lim} X_\alpha$*,* $L = \underline{\lim} Y_\alpha$*, а каноническими проекциями – морфизмы* $(K, L) \xrightarrow{(\iota_\alpha,\, \pi_\alpha)} (X_\alpha, Y_\alpha)$*, где* $\iota_\alpha$ *и* $\pi_\alpha$ *– канонические проекции пределов (в категории Top) K и L соответственно.*

Отметим, что категория $\mathcal{P}$ является произведением категории Top и дуальной категории Top$^*$ (полученной «поворотом стрелок»), $\mathcal{P}$ = Top$^*$ × Top, и теорему 4 можно доказать как простое утверждение в рамках общей теории категорий.

Рассмотрим тот же обратный спектр $S = \left\{(X_\alpha, Y_\alpha), \left(\varphi_\alpha^\beta, \psi_\alpha^\beta\right), \Sigma\right\}$. Предположим, что некоторая подкатегория $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}$ содержит все объекты спектра *S*, пару $(K, L) = \underline{\lim}(X_\alpha, Y_\alpha)$ и все морфизмы $\left(\varphi_\alpha^\beta, \psi_\alpha^\beta\right)$ и $(\iota_\alpha, \pi_\alpha)$, и при задании на множествах вида $C(X, Y)$ топологии $\tau$ возникает функтор $C_\tau$ из $\mathcal{K}$ в категорию Top. Теперь рассмотрим соответствующие обратный спектр $C_\tau(S) = \left\{C_\tau(X_\alpha, Y_\alpha), c\left(\varphi_\alpha^\beta, \psi_\alpha^\beta\right), \Sigma\right\}$ (в категории Top), его предел $\Lambda = \underline{\lim} C_\tau(X_\alpha, Y_\alpha)$ с каноническими проекциями $\Pi_\alpha : \Lambda \to C_\tau(X_\alpha, Y_\alpha)$, пространство $C_\tau(K, L)$ и непрерывные отображения $C_\tau(K, L) \xrightarrow{c(\iota_\alpha,\, \pi_\alpha)} C_\tau(X_\alpha, Y_\alpha)$. Поскольку $c(\iota_\alpha, \pi_\alpha) = c\left(\varphi_\alpha^\beta, \psi_\alpha^\beta\right) \circ c(\iota_\beta, \pi_\beta)$ при $\alpha \le \beta$, то определено, причем единственным образом, непрерывное отображение $h : C_\tau(K, L) \to \Lambda$ такое, что $c(\iota_\alpha, \pi_\alpha) = \Pi_\alpha \circ h$ для всех $\alpha \in \Sigma$.

**Лемма 1.** *Пусть* $f \in C_\tau(K, L)$ *и* $h(f) = (f_\alpha | \alpha \in \Sigma)$ $(f_\alpha = \Pi_\alpha(h(f)) \in C_\tau(X_\alpha, Y_\alpha))$. *Тогда* $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f \circ \iota_\alpha$, $\alpha \in \Sigma$.

Доказательство следует непосредственно из равенства $c(\iota_\alpha, \pi_\alpha) = \Pi_\alpha \circ h$.

**Лемма 2.** *Отображение* $h : C_\tau(K, L) \to \Lambda$ *– непрерывная биекция.*

Доказательство. Непрерывность $h$ уже отмечена. Докажем биективность. Для этого сперва покажем инъективность. Пусть $f, g \in C(K, L)$, $h(f) = (f_\alpha | \alpha \in \Sigma)$, $h(g) = (g_\alpha | \alpha \in \Sigma)$ и $f \neq g$. Тогда для некоторого класса эквивалентности $[x_\beta] \in K$ $(x_\beta \in X_\beta)$ нити $f([x_\beta]) = (y_\alpha | \alpha \in \Sigma)$ и $g([x_\beta]) = (z_\alpha | \alpha \in \Sigma)$ различны, т. е. $y_\gamma \neq z_\gamma$ для некоторого $\gamma \in \Sigma$. Выберем $\delta \in \Sigma$ такое, что $\delta \geq \beta$ и $\delta \geq \gamma$, и обозначим $x_\delta = \varphi_\beta^\delta(x_\beta)$ $(x_\delta \in X_\delta)$. Используя лемму 1 и соотношение $[x_\delta] = [x_\beta]$, получим $f_\delta(x_\delta) = (\pi_\delta \circ f \circ \iota_\delta)(x_\delta) = y_\delta$ и $g_\delta(x_\delta) = (\pi_\delta \circ g \circ \iota_\delta)(x_\delta) = z_\delta$. Но $y_\delta \neq z_\delta$, поскольку $\psi_\gamma^\delta(y_\delta) = y_\gamma \neq z_\gamma = \psi_\gamma^\delta(z_\delta)$. Итак, $f_\delta \neq g_\delta$, т. е. $h(f) \neq h(g)$. Инъективность доказана.

Пусть теперь $(f_\alpha | \alpha \in \Sigma) \in \Lambda$. Покажем существование $f \in C_\tau(K, L)$ такого, что $h(f) = (f_\alpha | \alpha \in \Sigma)$, т. е. $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f \circ \iota_\alpha$, $\alpha \in \Sigma$ (см. лемму 1). Для произвольных $\gamma, \alpha \in \Sigma$ выберем $\delta \in \Sigma$, $\delta \geq \gamma$, $\delta \geq \alpha$, и положим $f_{\gamma\alpha} = \psi_\alpha^\delta \circ f_\delta \circ \varphi_\gamma^\delta$. Проверим корректность определения. Пусть $\kappa \in \Sigma$, $\kappa \geq \gamma$ и $\kappa \geq \alpha$. Покажем, что $\psi_\alpha^\kappa \circ f_\kappa \circ \varphi_\gamma^\kappa = \psi_\alpha^\delta \circ f_\delta \circ \varphi_\gamma^\delta$. Подберем $\nu \in \Sigma$ так, чтобы выполнялись соотношения $\nu \geq \delta$ и $\nu \geq \kappa$. Тогда $\psi_\alpha^\kappa \circ f_\kappa \circ \varphi_\gamma^\kappa = \psi_\alpha^\kappa \circ \psi_\kappa^\nu \circ f_\nu \circ \varphi_\kappa^\nu \circ \varphi_\gamma^\kappa = \psi_\alpha^\nu \circ f_\nu \circ \varphi_\gamma^\nu$. С другой стороны, $\psi_\alpha^\delta \circ f_\delta \circ \varphi_\gamma^\delta = \psi_\alpha^\delta \circ \psi_\delta^\nu \circ f_\nu \circ \varphi_\delta^\nu \circ \varphi_\gamma^\delta = \psi_\alpha^\nu \circ f_\nu \circ \varphi_\gamma^\nu$. Корректность доказана.

Отметим, что $f_{\gamma\gamma} = f_\gamma$. Для проверки соотношения $f_{\gamma\alpha} = \psi_\alpha^\beta \circ f_{\delta\beta} \circ \varphi_\gamma^\delta$ при $\gamma \leq \delta$ и $\alpha \leq \beta$ выберем $\nu \in \Sigma$, $\nu \geq \beta$, $\nu \geq \gamma$, и получим $\psi_\alpha^\beta \circ f_{\delta\beta} \circ \varphi_\gamma^\delta = \psi_\alpha^\beta \circ \psi_\beta^\nu \circ f_\nu \circ \varphi_\delta^\nu \circ \varphi_\gamma^\delta = \psi_\alpha^\nu \circ f_\nu \circ \varphi_\gamma^\nu = f_{\gamma\alpha}$. Таким образом, определены непрерывные отображения $f_{\gamma L} : X_\gamma \to L$, $f_{\gamma L}(x_\gamma) = (f_{\gamma\alpha}(x_\gamma) | \alpha \in \Sigma)$ и $f_{\gamma L} = f_{\nu L} \circ \varphi_\gamma^\nu$ при $\gamma \leq \nu$. Но тогда по определению существует единственное непрерывное отображение $f : K \to L$, для которого $f_{\gamma L} = f \circ \iota_\gamma$ при любом $\gamma \in \Sigma$. А поскольку $\pi_\alpha \circ f \circ \iota_\alpha = \pi_\alpha \circ f_{\alpha L} = f_{\alpha\alpha} = f_\alpha$, то в силу леммы 1 отображение $f$ – искомое. Итак, $h$ сюръективно. Лемма 2 доказана.

**Следствие 4.** *Функтор* $C_\tau$ *непрерывен на категории* $\mathcal{K}$ *тогда и только тогда, когда обратное отображение* $h^{-1} : \Lambda \to C_\tau(K, L)$ *непрерывно при любом выборе в* $\mathcal{K}$ *обратного спектра S, для которого в* $\mathcal{K}$ *существует предел* $(K, L) = \underleftarrow{\lim} S$.

**Теорема 5.** *Функтор* $C_p$ *из категории* $\mathcal{P}$ *в категорию Top непрерывен.*

Доказательство. Учитывая следствие 4, рассмотрим произвольные $f \in C_p(K, L)$ и окрестность $f$ вида $\langle [x_\gamma], \pi_\beta^{-1}(V_\beta) \rangle$, где $[x_\gamma] \in K$ $(x_\gamma \in X_\gamma)$, $V_\beta$ открыто в $Y_\beta$. Пусть $f([x_\gamma]) = (y_\alpha | \alpha \in \Sigma) \in L$. Ясно, что $y_\beta \in V_\beta$. Выберем $\delta \in \Sigma$, $\delta \geq \gamma$, $\delta \geq \beta$, и обозначим $x_\delta = \varphi_\gamma^\delta(x_\gamma)$ $(x_\delta \in X_\delta)$. Затем в $Y_\delta$ выберем окрестность $V_\delta$ точки $y_\delta$ так, чтобы выполнялось включение $\psi_\beta^\delta(V_\delta) \subset V_\beta$. Перейдем к нити (в $\Lambda$) $h(f) = (f_\alpha | \alpha \in \Sigma)$. Заметим (см. лемму 1), что $f_\delta(x_\delta) = \pi_\delta(f([x_\delta])) = \pi_\delta(f([x_\gamma])) = y_\delta \in V_\delta$ и, следовательно, $\Pi_\delta^{-1}(\langle x_\delta, V_\delta \rangle)$ – окрестность в $\Lambda$ нити $h(f)$. Пусть $g \in C_p(K, L)$, $h(g) = (g_\alpha | \alpha \in \Sigma) \in \Pi_\delta^{-1}(\langle x_\delta, V_\delta \rangle)$. Тогда $g_\delta(x_\delta) = \pi_\delta(g([x_\delta])) = \pi_\delta(g([x_\gamma])) \in V_\delta$, откуда $g \in \langle [x_\gamma], \pi_\delta^{-1}(V_\delta) \rangle$. Но $\pi_\delta^{-1}(V_\delta) \subset \pi_\beta^{-1}(V_\beta)$, значит, $\langle [x_\gamma], \pi_\delta^{-1}(V_\delta) \rangle \subset \langle [x_\gamma], \pi_\beta^{-1}(V_\beta) \rangle$, что влечет $g \in \langle [x_\gamma], \pi_\beta^{-1}(V_\beta) \rangle$. Итак, $h^{-1}$ непрерывно. Теорема 5 доказана.

Перейдем к топологии $\tau_\kappa$.

**Лемма 3** [1] (см. также [9, с. 100]). *Если* $\{Y_\alpha, \psi_\alpha^\beta, \Sigma\}$ *– обратный спектр в категории Top,* $L = \underleftarrow{\lim} Y_\alpha$, $F \subset U \subset L$, *U открыто в L, а F компактно, то* $F \subset \pi_\beta^{-1}(W) \subset U$ *для некоторых* $\beta \in \Sigma$ *и открытого* $W \subset Y_\beta$.

**Теорема 6.** *Пусть* $\mathcal{K}$ *– подкатегория в* $\mathcal{P}$ *и для любого морфизма* $(\varphi, \psi)$ *из* $\mathcal{K}$ *отображение* $\varphi$ *k-накрывающее. Тогда функтор* $C_\kappa$ *непрерывен на* $\mathcal{K}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольные $f \in C_\kappa(K, L)$ и окрестность $f$ вида $\langle F, G\rangle$, где $F \subset K$ и $F$ компактно, $G$ открыто в $L$. Учитывая лемму 3 и компактность $f(F)$, считаем, что $G = \pi_\beta^{-1}(V)$, где $V$ открыто в $Y_\beta$. Выберем компактное $B \subset X_\beta$ такое, что $\iota_\beta(B) = F$, и рассмотрим нить $h(f) = (f_\alpha | \alpha \in \Sigma) \in \Lambda$, где $\Lambda = \underleftarrow{\lim} C_\kappa(X_\alpha, Y_\alpha)$. Поскольку $f_\beta(B) = (\pi_\beta \circ f \circ \iota_\beta)(B) \subset V$, то $h(f) \in \Pi_\beta^{-1}(\langle B, V\rangle)$. Пусть теперь $g \in C_\kappa(K, L)$, $h(g) = (g_\alpha | \alpha \in \Sigma) \in \Pi_\beta^{-1}(\langle B, V\rangle)$. Ясно, что $(\pi_\beta \circ g)(F) = (\pi_\beta \circ g \circ \iota_\beta)(B) = g_\beta(B) \subset V$, откуда $g \in \left\langle F, \pi_\beta^{-1}(V)\right\rangle$. Таким образом, непрерывность $h^{-1}$ проверена и теорема 6 доказана.

Мотивацией выбора $k$-накрывающих отображений может служить следующее утверждение.

**Утверждение.** Пусть в подкатегории $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}$ для любого объекта $(X, Y)$ пространство $X$ вполне регулярно, вместе с любым морфизмом $(\varphi, \psi) : (X, Y) \to (E, Z)$ присутствует и морфизм $(\varphi, \mathrm{id}_\mathbb{R}) : (X, \mathbb{R}) \to \to (E, \mathbb{R})$ и функтор $C_\kappa$ непрерывен на $\mathcal{K}$. Тогда если в $\mathcal{K}$ определены обратный спектр $\left\{(X_\alpha, Y_\alpha), (\varphi_\alpha^\beta, \psi_\alpha^\beta), \Sigma\right\}$ и его предел $(K, L)$ ($K = \underleftarrow{\lim} X_\alpha$, $L = \underleftarrow{\lim} Y_\alpha$), то для некоторого $\beta \in \Sigma$ все отображения $\iota_\alpha : X_\alpha \to K$ $k$-накрывающие при $\alpha \geq \beta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что $Y_\alpha = \mathbb{R}$ и $\psi_\alpha^\beta = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ при $\alpha \leq \beta$ (в рамках $\mathcal{K}$ такой переход возможен). Ясно, что $L = \mathbb{R}$ и $\pi_\alpha = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ для любого $\alpha \in \Sigma$. Пусть $F \subset K$ и $F$ компактно. Рассмотрим $f \in C_\kappa(K, L)$, $f(K) = \{0\}$, нить $h(f) = (f_\alpha | \alpha \in \Sigma) \in \Lambda$, где $\Lambda = \underleftarrow{\lim} C_\kappa(X_\alpha, Y_\alpha)$, и окрестность $\left\langle F, \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\rangle$ в $C_\kappa(K, L)$ функции $f$. По условию существуют $\beta \in \Sigma$ и окрестность $G$ в $C_\kappa(X_\beta, Y_\beta)$ функции $f_\beta$ такие, что $h^{-1}\left(\Pi_\beta^{-1}(G)\right) \subset \left\langle F, \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\rangle$. Поскольку $f_\beta(X_\beta) = \{0\}$, можно считать, что $G = \langle B, (-\varepsilon; \varepsilon)\rangle$, где $B \subset X_\beta$ и $B$ компактно, $\varepsilon > 0$. Покажем, что $F \subset \iota_\beta(B)$. Допустим, что найдется точка $z \in F \setminus \iota_\beta(B)$. Выберем функцию $g \in C(K)$ такую, чтобы выполнялись равенства $g(x) = 0$ при $x \in \iota_\beta(B)$ и $g(z) = 1$. Очевидно, $h(g) \in \Pi_\beta^{-1}(G)$, но $g \notin \left\langle F, \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\rangle$. Получено противоречие, значит, $F \subset \iota_\beta(B)$. Обозначим $P = B \cap \iota_\beta^{-1}(F)$. Множество $P$ компактно, и $\iota_\beta(P) = F$. Итак, $\iota_\beta$ – $k$-накрывающее. Но тогда и $\iota_\alpha$ – $k$-накрывающее при $\alpha \geq \beta$ в силу соотношения $\iota_\beta = \iota_\alpha \circ \varphi_\beta^\alpha$. Утверждение доказано.

В завершение рассмотрим топологию $\tau_\Gamma$ на $C(X, Y)$, отдельные свойства которой, в частности связь с топологиями равномерной сходимости при метризуемом $Y$, были установлены в [2; 5]. В [1] получено необходимое условие непрерывности функтора $C_\Gamma$ на некоторой подкатегории $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}$.

**Теорема 7** [1]. *Пусть $\mathcal{K}$ – подкатегория в $\mathcal{P}$, в которой вместе с любым объектом $(X, Y)$ присутствует и любой объект вида $(X, W_0(\theta))$, где $\theta$ – бесконечный начальный ординал и $W_0(\theta)$ – множество всех ординалов $\alpha \leq \theta$ с порядковой топологией, и для каждого морфизма $(X, Y) \xrightarrow{(\varphi, \psi)} (E, Z)$ непременно $E = X$ и $\varphi = \mathrm{id}_X$. Если при этом функтор $C_\Gamma$ непрерывен на $\mathcal{K}$, то для любого объекта $(X, Y)$ из $\mathcal{K}$ пространство $X$ компактно.*

**Пример.** Пусть $\Sigma$ – семейство некоторых непустых замкнутых в $\mathbb{R}$ множеств $A \subset I = [0; 1]$ такое, что $\cup\Sigma = I$, $|A| \leq \omega$ ($\omega = |\mathbb{N}|$) и $A \cup B \in \Sigma$ для любых $A, B \in \Sigma$, и если $(x_n | n \in \mathbb{N})$ – сходящаяся последовательность точек из $I$, то $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \subset A$ для некоторого $A \in \Sigma$. Положим $A \leq B$, если $A \subset B$; $X_A = A$ (с евклидовой топологией) и $\varphi_A^B : X_A \to X_B$ – обычное вложение при $A \leq B$; $Y_A = \mathbb{R}$ и $\psi_A^B = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ при $A \leq B$. Ясно, что $K = \underleftarrow{\lim} X_A = I$ (с евклидовой топологией) и $\iota_A : X_A \to K$ – обычное вложение (о подобных примерах см. [11, с. 188]), $L = \underleftarrow{\lim} Y_A = \mathbb{R}$ и $\pi_A = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ для любого $A \in \Sigma$. Рассмотрим $f \in C_\Gamma(K, L)$, $f(K) = \{0\}$, $h(f) = (f_A | A \in \Sigma) \in \Lambda$, где $\Lambda = \underleftarrow{\lim} C_\Gamma(X_A, Y_A)$, и окрестность $O(U)$ в $C_\Gamma(K, L)$ функции $f$, где $U = I \times \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Допустим, что существует окрестность нити $h(f)$ вида $\Pi_B^{-1}(O(G))$ ($G$ открыто в $X_B \times \mathbb{R}$), для которой $h^{-1}\left(\Pi_B^{-1}\left(O(G)\right)\right) \subset O(U)$. Поскольку $f_B\left(X_B\right) = \{0\}$ и $X_B = B$ компактно, можно считать, что $G = X_B \times (-\varepsilon; \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Выберем функцию $g \in C(I)$ так, чтобы выполнялись равенства $g(B) = \{0\}$ и $g(x) = 1$ для некоторой точки $x \in I \setminus B$. Ясно, что $g_B = g \circ \iota_B \in O(G)$, следовательно, $h(g) \in \in \Pi_B^{-1}\left(O(G)\right)$. Но поскольку $g \notin O(U)$, то $h^{-1}$ разрывно.

С учетом следствия 2, теоремы 7 и примера представляются разумными следующие ограничения на подкатегорию $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}$ в «области непрерывности» $C_\Gamma$.

**Теорема 8.** *Пусть в подкатегории $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}$ для любого морфизма $(X, Y) \xrightarrow{(\varphi, \psi)} (E, Z)$ пространства $X$ и $E$ компактны, $\varphi$ – совершенная сюръекция. Тогда функтор $C_\Gamma$ непрерывен на $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Фиксируем произвольные $f \in C_\Gamma(K, L)$ $(K = \varprojlim X_\alpha,\ L = \varprojlim Y_\alpha)$ и окрестность $O(G)$ отображения $f$ ($G$ открыто в $K \times L$). Для каждой точки $(k, f(k)) \in \Gamma_f$ подберем окрестности $U_k$ точки $k$ и $V(k)$ точки $f(k)$, где $V(k) = \pi_{\alpha(k)}^{-1}\left(W(k)\right)$, $W(k)$ открыто в $Y_{\alpha(k)}$, так, чтобы выполнялись включения $f(U_k) \subset V(k)$ и $U_k \times V(k) \subset G$. В силу компактности $K$ существует конечное семейство окрестностей $U_{k_1}, \ldots, U_{k_n}$ такое, что $\bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i} = K$. Выберем $\gamma \in \Sigma$, чтобы выполнялись соотношения $\gamma \geq \alpha(k_1), \ldots, \gamma \geq \alpha(k_n)$. Отметим, что $\pi_\alpha^{-1}(A) = \pi_\beta^{-1}\left(\left(\psi_\alpha^\beta\right)^{-1}(A)\right)$, где $A \subset Y_\alpha$ и $\alpha \leq \beta$ произвольные. Обозначив $H_i = \left(\psi_{\alpha(k_i)}^\gamma\right)^{-1}\left(W(k_i)\right)$ ($H_i$ открыто в $Y_\gamma$), получим $V(k_i) = \pi_\gamma^{-1}(H_i)$ и $\Gamma_f \subset \bigcup_{i=1}^{n}\left(U_{k_i} \times \times V(k_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{n}\left(U_{k_i} \times \pi_\gamma^{-1}(H_i)\right) \subset G$. Далее положим $Q_i = \iota_\gamma^{-1}\left(U_{k_i}\right)$ и обозначим $S = \bigcup_{i=1}^{n}\left(Q_i \times H_i\right)$. Ясно, что $S$ открыто в $X_\gamma \times Y_\gamma$ и $f_\gamma = \pi_\gamma \circ f \circ \iota_\gamma \in O(S)$, т. е. $h(f) = \left(f_\alpha \mid \alpha \in \Sigma\right) \in \Pi_\gamma^{-1}\left(O(S)\right)$. Пусть теперь $g \in C_\Gamma(K, L)$, $h(g) = \left(g_\alpha \mid \alpha \in \Sigma\right)$ и $h(g) \in \Pi_\gamma^{-1}\left(O(S)\right)$, т. е. $g_\gamma = \pi_\gamma \circ g \circ \iota_\gamma \in O(S)$. Несложно проверить, что при этом $\Gamma_g \subset \bigcup_{i=1}^{n}\left(U_{k_i} \times \pi_\gamma^{-1}(H_i)\right) \subset G$, т. е. $g \in O(G)$. Итак, $C_\Gamma(K, L) \xrightarrow{h} \Lambda = \varprojlim C_\Gamma\left(X_\alpha, Y_\alpha\right)$ – гомеоморфизм. Теорема доказана.

Отметим, что теоремы 5, 6 и 8 существенно усиливают аналогичные результаты, полученные в [1].

## Библиографические ссылки

1. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ, Фролова ДС. Некоторые топологические свойства функтора $C(X, Y)$. *Труды Института математики НАН Беларуси.* 2018;26(1):71–78.

2. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. Некоторые топологические свойства пространства отображений. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2010;1:144–149.

3. Тимохович ВЛ, Фролова ДС. Об инфимальной топологии пространства отображений. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2011;2:136–140.

4. Тимохович ВЛ, Фролова ДС. Инфимальная топология пространства отображений и отображение вычисления. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2012;1:68–72.

5. Тимохович ВЛ, Фролова ДС. Топологии равномерной сходимости. Собственность (в смысле Аренса – Дугунджи) и секвенциальная собственность. *Известия вузов. Математика.* 2013;9:45–58.

6. Энгелькинг Р. *Общая топология.* Москва: Мир; 1986. 752 с.

7. Bacon P. The compactness of countably compact spaces. *Pacific Journal of Mathematics.* 1970;32(3):587–592.

8. Naimpally S. Graph topology for function spaces. *Transactions of the American Mathematical Society.* 1966;123:267–272.

9. Федорчук ВВ, Филиппов ВВ. *Общая топология. Основные конструкции.* Москва: Физматлит; 2006. 336 с.

10. Букур И, Деляну А. *Введение в теорию категорий и функторов.* Райкова ДА, Ретах ВС, переводчики. Москва: Мир; 1972. 259 с.

11. Александрян РА, Мирзаханян ЭА. *Общая топология.* Москва: Высшая школа; 1979. 336 с.

## References

1. Kukrak HO, Timokhovich VL, Frolova DS. [Some topological properties of the functor of $C(X, Y)$]. *Trudy Instituta matematiki NAN Belarusi.* 2018;26(1):71–78. Russian.

2. Kukrak HO, Timokhovich VL. [Some topological properties of mapping spaces]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2010;1:144–149. Russian.

3. Timokhovich VL, Frolova DS. [On infimal topology of mapping spaces]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2011;2:136–140. Russian.

4. Timokhovich VL, Frolova DS. [Infimal topology of mapping spaces and evaluation map]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2012;1:68–72. Russian.

5. Timokhovich VL, Frolova DS. [Topologies of uniform convergence. The property in the sense of Arens – Dugundji and the sequential property]. *Izvestiya vuzov. Matematika.* 2013;9:45–58. Russian.

6. Engelking R. *General topology.* Berkeley: John L. Keller; 1955. 298 p.

Russian edition: Engelking R. *Obshchaya topologiya*. Moscow: Mir; 1986. 752 p.

7. Bacon P. The compactness of countably compact spaces. *Pacific Journal of Mathematics.* 1970;32(3):587–592.

8. Naimpally S. Graph topology for function spaces. *Transactions of the American Mathematical Society.* 1966;123:267–272.

9. Fedorchuk VV, Filippov VV. *Obshchaya topologiya. Osnovnie konstruktsii* [General topology. The main constructions]. Moscow: Fizmatlit; 2006. 336 p. Russian.

10. Bucur I, Deleanu A. *Introduction to the theory of categories and functors.* New York: NYWiley; 1968. 224 p.

Russian edition: Bucur I, Deleanu A. *Vvedenie v teoriyu kategoriy i funktorov.* Raikova DA, Retakh VS, translators. Moscow: Mir; 1972. 259 p.

11. Aleksandrian RA, Mirzakhanyan EA. *Obshchaya topologiya* [General topology]. Moscow: Vyshaya shkola; 1979. 336 p. Russian.

*Статья поступила в редколлегию 27.12.2019.*
*Received by editorial board 27.12.2019.*