

# БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебной работе  
и образовательным инновациям

О.Н.Здрок

«29» сентября 2020 г

Регистрационный № УД-8075уч.

## СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 80 03 Математика и компьютерные науки  
*профилизация Математика*

2020 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 80 03-2019 и учебных планов G31-017/уч., №G31з -018/уч., утвержденных 11.04.2019.

**СОСТАВИТЕЛЬ:**

В.Г. Кротов, заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

**РЕЦЕНЗЕНТ:**

В.И. Берник, главный научный сотрудник Отдела теории чисел Института математики НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета (протокол № 9 от 23.03.2020);

Научно-методическим Советом Белорусского государственного университета (протокол № 4 от 25.03.2020).

Зав.кафедрой теории функций



В.Г. Кротов

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

### Цели и задачи учебной дисциплины

**Цель учебной дисциплины:** изложение основ теории базисов в банаховых пространствах. Повышение уровня профессиональной компетентности студентов, формирование понятия о возможностях одного из разделов современного анализа в задачах естествознания.

### Задачи учебной дисциплины:

1. Теория ортогональных систем в гильбертовом пространстве.
2. Изучение понятий базиса и безусловного базиса в банаховом пространстве и их свойств;
3. Построение классических базисов в пространствах непрерывных и суммируемых функций (системы Фабера-Шаудера и Хаара);
4. Ознакомление с современными методами гармонического анализа и их приложениями (кратномасштабный анализ и теория фреймов).

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием (магистра).

Дисциплина «Современные методы гармонического анализа» относится к дисциплинам по выбору (компонент учреждения высшего образования).

**Связи с другими учебными дисциплинами**, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Дисциплина «Современные методы гармонического анализа» является продолжением математических дисциплин «Математический анализ», «Функциональный анализ». Она посвящена основным направлениям развития гармонического анализа в XX веке и начале XXI века.

### Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Современные методы гармонического анализа» должно обеспечить формирование следующих специализированных компетенций:

СК-2. Быть способным использовать методы компьютерного моделирования на основе современных методик численного анализа прикладных дифференциальных задач;

СК-5. Быть способным применять современные методы гармонического анализа и дифференциальных уравнений в задачах естественных наук и экономики.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

**знать:**

– свойства ортогональных систем в гильбертовых пространствах;

– определения и свойства базисов и безусловных базисов в банаховых пространствах;

– свойства классических базисов Фабера-Шаудера и Хаара;

– определения кратномасштабных разложений и фреймов;

**уметь:**

– доказывать основные теоремы об ортогональных системах и базисах;

– доказывать свойства базисности и безусловной базисности систем Фабера-Шаудера и Хаара;

**владеть:**

– основными понятиями и результатами теории базисов;

– методами использования базисов в математических задачах.

### **Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается в 3 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Современные методы гармонического анализа» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 198 часов, в том числе 70 аудиторных часов, из них: лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 34 часа.

– для заочной формы получения высшего образования 198 часов, в том числе – 16 аудиторных часов, из них: лекции – 8 часов, лабораторные занятия – 8 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма текущей аттестации – экзамен.

## СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

### **ТЕМА 1. Сведения из функционального анализа**

Теорема Хана-Банаха, теорема Банаха-Штейнгауза, теорема Банаха об обратном операторе. Рефлексивность.

### **ТЕМА 2. Ортогональные системы в гильбертовом пространстве**

Вспомогательные сведения из функционального анализа (теорема о проекции, теорема Пифагора, критерий ближайшего элемента). Ортогональные системы, тождество Бесселя, равенство Парсеваля-Стеклова, сходимости рядов Фурье.

### **ТЕМА 3. Базисы в банаховых пространствах**

Замкнутые и минимальные системы, сопряженная система функционалов. Операторы частичных сумм, ряды Фурье. Определение базиса и теорема Банаха о базисе. Базисные системы, свойства системы, сопряженной к базису. Устойчивость базисов. Базисы в некоторых конкретных пространствах.

### **ТЕМА 4. Безусловные базисы**

Безусловная сходимости рядов в банаховых пространствах. Безусловные базисы и их свойства. Примеры безусловных базисов.

### **ТЕМА 5. Конкретные базисы в пространствах функций**

Двоично-рациональные точки и промежутки, Задача кусочно линейной интерполяции. Система функций Фабера-Шаудера и ее свойства. Система функций Хаара и ее свойства. Двоичная максимальная функция. Безусловная базисность системы Хаара.

### **ТЕМА 6. Кратномасштабный анализ и фреймы**

Базисы Рисса. Кратномасштабный анализ и масштабирующая функция. Системы Хаара, Баттла-Лемарье, Стрёмберга и Мейера. Фреймы и их свойства.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Сведения из функционального анализа	2						
2	Ортогональные системы в гильбертовом пространстве	4			2			Оценка выполнения упражнений, опрос
3	Базисы в банаховых пространствах	8			8			Отчет по лабораторным занятиям
4	Безусловные базисы	8			8			Отчет по лабораторным занятиям
5	Конкретные базисы в пространствах функций	8			8			Отчет по лабораторным занятиям
6	Кратномасштабный анализ и фреймы	8			8			Отчет по лабораторным занятиям
	<b>Всего по дисциплине</b>	<b>36</b>			<b>34</b>			

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Заочная форма обучения

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСП	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Сведения из функционального анализа	1						
2	Ортогональные системы в гильбертовом пространстве	1			1			Оценка выполнения упражнений, опрос
3	Базисы в банаховых пространствах	2			2			Отчет по лабораторным занятиям
4	Безусловные базисы	2			2			Отчет по лабораторным занятиям
5	Конкретные базисы в пространствах функций	1			2			Отчет по лабораторным занятиям
6	Кратномасштабный анализ и фреймы	1			1			Отчет по лабораторным занятиям
	– Всего по дисциплине	8			8			

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

- 1 Б.С.Кашин, А.А.Саакян, Ортогональные ряды, М.:Изд-во АФЦ. 1999.
- 2 И.Я. Новиков, В.Ю.Протасов, М.А.Скопина, Теория всплесков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
- 3 А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Минск: Университетское, Мн.: БГУ. 2006.
- 4 M. Mehra, Wavelets Theory and Its Applications. A First Course. Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2018.

### Перечень дополнительной литературы

- 5 I. Singer. Bases in Banach spaces. Vol. 1. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1970.

### Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Контроль освоения практических навыков осуществляется в форме опроса, оценки выполнения упражнений, отчет по лабораторным занятиям.

Формой текущей аттестации по дисциплине учебным планом предусмотрен – экзамен.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29.05.2012 г.).

Положение о рейтинговой системе оценки знаний студентов по дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ от 18.08.2015 № 382-ОД) (с изменениями, согласно приказу 491-ОД от 29.08.2018г.)

Критерии оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 22.12.2003 № 21-04-1/105).

Весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку.

Формирование оценки за текущую успеваемость:

- оценка выполнения упражнений – 20 %,
- опрос на знание основных понятий – 30%,
- отчет по лабораторным занятиям – 50%.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых



коэффициентов. Вес оценки по текущей успеваемости составляет 50 %, экзаменационная оценка – 50 %

## Примерная тематика лабораторных занятий

Занятие 1. Ортонормированные системы и ряды Фурье. Минимальное свойство сумм Фурье. Неравенство Бесселя.

Занятие 2. Полнота и замкнутость, равенство Парсеваля-Стеклова.

Занятие 3. Замкнутость. Минимальность и сопряженная система функционалов. Операторы проектирования. Ряды Фурье.

Занятие 4. Определение базиса и теорема Банаха.

Занятие 5. Базисные системы. Система, сопряженная к базису.

Занятие 6. Перестановки и безусловная сходимость. Различные описания безусловной сходимости, теорема Орлича-Петтиса.

Занятие 7. Безусловные базисы. Критерии безусловной базисности. свойства безусловных базисов.

Занятие 8. Лемма Рисса о почти перпендикулярном элементе. Теоремы об устойчивости Винера-Пэли.

Занятие 9. Устойчивость базисов при малых возмущениях, теорема Крейна-Мильмана-Рутмана.

Занятие 10. Определение мультипликаторов. Критерий базиса в терминах мультипликаторов. Безусловные базисы и мультипликаторы.

Занятие 11. Определение системы Хаара и ее свойства. Базисность системы Хаара.

Занятие 12. Двоичное разложение Кальдерона-Зигмунда. Безусловная базисность системы Хаара. Функция Литтлвуда-Пэли.

Занятие 13. Определение системы Фабера-Шаудера. Линейная интерполяция в двоично-рациональных точках. Базисность системы.

Занятие 14. Базисы Рисса.

Занятие 15. Кратномасштабный анализ и масштабирующая функция.

Занятие 16. Системы Хаара, Баттла-Лемарье, Стрёмберга и Мейера.

Занятие 17. Фреймы и их свойства.

### Задания для самостоятельной работы студентов

#### ТЕМА 2. Ортогональные системы в гильбертовом пространстве

1. Применить процесс ортогонализации к системе двоичных отрезков.
2. Доказать критерий ближайшего элемента.
3. Доказать тождество параллелограмма.
4. Доказать теорему Пифагора.

#### ТЕМА 3. Базисы в банаховых пространствах

1. Построить базис в пространствах суммируемых последовательностей.
2. Показать, что пространство ограниченных последовательностей не является сепарабельным.
3. Построить базис в пространстве сходящихся последовательностей.

#### ТЕМА 4. Безусловные базисы

1. Построить безусловный базис в пространствах суммируемых последовательностей.
2. Построить безусловный базис в пространстве сходящихся последовательностей.

#### ТЕМА 5. Конкретные базисы в пространствах функций

1. Доказать оценку для приближений суммами Фабера-Шаудера через модули гладкости.
2. Доказать оценку для приближений суммами Хаара в пространстве ограниченных функций через модули непрерывности.
3. Доказать оценку для приближений суммами Хаара в пространствах суммируемых функций через модули непрерывности.

### Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются:

– *эвристический подход*, который предполагает выбор содержания и способа его организации при подготовке образовательных продуктов (сообщений, докладов, презентаций) по проблемам методологии математики и их соотнесения и многообразием решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем; творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов; индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;

– *методы и приемы развития критического мышления*, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

## Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Основными направлениями управляемой самостоятельной работы в овладении знаниями учебной дисциплины «Современные методы гармонического анализа» являются:

- первоначально подробное ознакомление с программой учебной дисциплины;
- ознакомление со списком рекомендуемой литературы по дисциплине в целом и ее разделам, наличие ее в библиотеке и других доступных источниках, изучение необходимой литературы по теме, подбор дополнительной литературы;
- изучение и расширение лекционного материала преподавателя за счет специальной литературы, консультаций;
- подготовка к зачету.

Тем самым, имеется в виду постепенное превращение обучения в самообучение, когда магистрант должен получать знания главным образом за счет креативной самостоятельной работы, самостоятельно осуществляя поиск необходимой информации и созидательно прорабатывая ее с тем, чтобы произвести необходимые умозаключения и получить результаты. В этом случае, выполняя учебные задачи, магистранты самостоятельно приобретают новые знания, навыки и умения (в частности, умение анализировать и принимать решения в нестандартных ситуациях), что очень важно для эффективной будущей профессиональной деятельности.

Самостоятельная работа для магистрантов важнейшая часть учебного процесса. Решение задач по подготовке квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, невозможно без наличия навыков самостоятельной работы магистрантов.

Цель самостоятельной работы магистрантов:

- углубление фундаментальных и профессиональных знаний, умений и навыков в соответствии с профилем деятельности;
- сознательно и самостоятельно осуществлять работу с учебным и научным материалом;
- совершенствование опыта исследовательской и созидательной деятельности;
- совершенствование навыков творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального формата;
- укрепление навыков самоорганизации и самовоспитания для получения навыков перманентного повышения профессионализма.

Для достижения целей самостоятельной работы магистрантов необходимо решение следующих задач:

- развитие творческого мышления;
- овладение основными методами исследовательской работы;

- приобретение магистрантами через самостоятельную деятельность собственного опыта и профессиональных навыков.
- углубление, расширение, систематизация и закрепление полученных знаний и умений;
- выработка навыка использования и анализа источниковой базы и специальной литературы;
- формирование исследовательских навыков и умений;
- овладение способностью использовать собранную в ходе самостоятельной работы информацию в учебных целях.

### Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Ортонормированные системы и ряды Фурье. Минимальное свойство сумм Фурье. Неравенство Бесселя. Полнота и замкнутость, равенство Парсеваля-Стеклова.
2. Замкнутость. Минимальность и сопряженная система функционалов. Операторы проектирования. Ряды Фурье.
3. Определение базиса и теорема Банаха. Базисные системы. Система, сопряженная к базису.
4. Перестановки и безусловная сходимость. Различные описания безусловной сходимости, теорема Орлича-Петтиса.
5. Безусловные базисы. Критерии безусловной базисности. свойства безусловных базисов.
6. Лемма Рисса о почти перпендикулярном элементе. Теоремы об устойчивости Винера-Пэли. Устойчивость базисов при малых возмущениях, теорема Крейна-Мильмана-Рутмана.
7. Определение мультипликаторов. Критерий базиса в терминах мультипликаторов. Безусловные базисы и мультипликаторы.
8. Определение системы Хаара и ее свойства. Базисность системы Хаара.
9. Двоичное разложение Кальдерона-Зигмунда. Безусловная базисность системы Хаара. Функция Литтлвуда-Пэли.
10. Определение системы Фабера-Шаудера. Линейная интерполяция в двоично-рациональных точках. Базисность системы.
11. Базисы Рисса. Кратномасштабный анализ и масштабирующая функция.
12. Системы Хаара, Баттла-Лемарье, Стрёмберга и Мейера.
13. Фреймы и их свойства.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1.			
2.			

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО  
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
\_\_\_\_\_ (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 201\_ г.)

Заведующий кафедрой  
\_\_\_\_\_

**УТВЕРЖДАЮ**  
Декан факультета  
\_\_\_\_\_