

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. П. Побегайло

**ПРИМЕНЕНИЕ КВАТЕРНИОНОВ
В КОМПЬЮТЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ
И ГРАФИКЕ**

**МИНСК
БГУ
2019**

УДК 514:004.92

*Печатается по решению
Редакционно-издательского совета
Белорусского государственного университета*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук *А. В. Тузиков*;
доктор физико-математических наук *В. М. Котов*

Побегайло, А. П.

Применение кватернионов в компьютерной геометрии и графике
[Электронный ресурс] / А. П. Побегайло. – Минск : БГУ, 2019.

ISBN 978-985-566-744-6.

В монографии рассмотрены математические основы кватернионов, их использование для представления поворотов, а также различные подходы к представлению конечных поворотов. Предложены алгоритмы для моделирования сплайн-кривых на поверхностях двумерной и трехмерной сфер, используя гладкие деформации орбит однопараметрических подгрупп группы поворотов. Моделирование сплайн-кривых на поверхности трехмерной сферы имеет естественное приложение к моделированию вращений твердых тел.

Издание предназначено для специалистов в области компьютерной геометрии, графики и робототехники.

УДК 514:004.92

ISBN 978-985-566-744-6

© Побегайло А. П., 2019

© БГУ, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1. МНОГООБРАЗИЯ И ГРУППЫ ЛИ	8
1.1. Многообразия.....	8
1.2. Гладкие многообразия.....	10
1.3. Явное описание гладких многообразий	13
1.4. Неявное описание гладких многообразий	15
1.5. Группы	17
1.6. Гомоморфизм групп	19
1.7. Изоморфизм групп.....	21
1.8. Подгруппы.....	23
1.9. Группы Ли	24
1.10. Однопараметрические подгруппы группы Ли	26
1.11. Действие группы на многообразии	27
1.12. Орбиты.....	28
1.13. Группы преобразований.....	30
1.14. Гомотопии кривых.....	32
ГЛАВА 2. КВАТЕРНИОНЫ	35
2.1. Определение кватерниона	35
2.2. Линейные операции над кватернионами.....	36
2.3. Умножение кватернионов.....	37
2.4. Сопряженные кватернионы	40
2.5. Скалярное произведение кватернионов	41
2.6. Норма кватерниона.....	42
2.7. Обратные кватернионы	43
2.8. Ортогональные кватернионы	46
2.9. Векторное произведение кватернионов	47
2.10. Группа единичных кватернионов	50
2.11. Ортогональные единичные кватернионы	53
2.12. Дифференцирование кватернионов по параметру	55
ГЛАВА 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОВОРОТОВ.....	62
3.1. Матричная группа $SO(3, R)$	62
3.2. Автоморфизмы сферы.....	62

3.3. Геометрическое построение поворота	66
3.4. Представление поворотов матрицами группы $SO(3, R)$	68
3.5. Собственные векторы и значения поворотов	72
3.6. Матричная группа $SU(2)$	75
3.7. Спин матрицы Паули	77
3.8. Представление поворотов матрицами группы $SU(2)$	78
3.9. Параметры Кэли – Клейна	80
3.10. Гомоморфизм между группами $SU(2)$ и $SO(3, R)$	81
3.11. Представление поворотов единичными кватернионами	87
3.12. Гомоморфизм между группами $SO(3, R)$ и группой единичных кватернионов	88
3.13. Геометрический смысл единичных кватернионов	90
ГЛАВА 4. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПОВОРОТОВ	94
4.1. Ориентация	94
4.2. Вектор конечного поворота	96
4.3. Параметры Родрига	99
4.4. Параметры Эйлера	102
4.5. Композиция векторов конечных поворотов	104
4.6. Касательные векторы	106
ГЛАВА 5. СФЕРА S^2	112
5.1. Определение сферы S^2	112
5.2. Касательная плоскость	113
5.3. Плоские сечения	114
5.4. Геодезические линии на сфере	117
5.5. Орбиты поворотов	121
5.6. Действие поворотов на сферу S^2	122
5.7. Параметризованные дуги окружностей	123
ГЛАВА 6. СФЕРА S^3	126
6.1. Определение сферы S^3	126
6.2. Касательная плоскость	127
6.3. Плоские сечения	128
6.4. Геодезические линии на сфере	130
6.5. Орбиты поворотов	134
6.6. Действие поворотов на сферу S^3	138
6.7. Параметризованные дуги больших окружностей	139
6.8. Параметризованные дуги малых окружностей	141
ГЛАВА 7. СМЕЩЕНИЕ ПАРАМЕТРИЗОВАННЫХ КРИВЫХ НА ГРУППЕ ЛИ	145
7.1. Полиномы Бернштейна	145
7.2. Дифференцирование полиномов Бернштейна	148

7.3. Интегрирование полиномов Бернштейна	150
7.4. Полиномиальный базис.....	152
7.5. Сглаживающие полиномы	156
7.6. Дифференцирование сглаживающих полиномов	159
7.7. Оптимальные свойства сглаживающих полиномов.....	162
7.8. Смещение параметризованных кривых на группе Ли.....	167
7.9. Смещение параметризованных кривых на гладких многообразиях.....	171
7.10. Построение сплайновых кривых на гладких многообразиях	172
ГЛАВА 8. МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЛАЙНОВЫХ КРИВЫХ НА СФЕРЕ S^2	
8.1. Постановка задачи построения сплайновой кривой на сфере	175
8.2. Построение дуг малых окружностей по точкам.....	176
8.3. Смещение дуг окружностей	180
8.4. Построение сплайновой кривой на сфере.....	183
8.5. Постановка задачи сглаживания ломаной линии на сфере.....	186
8.6. Построение дуг больших окружностей по точкам.....	187
8.7. Сглаживание дуг окружностей.....	188
8.8. Сглаживание углов ломаной линии на сфере.....	192
ГЛАВА 9. МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЛАЙНОВЫХ КРИВЫХ НА СФЕРЕ S^3	
9.1. Постановка задачи построения ориентационной сплайн-кривой.....	196
9.2. Построение дуг малых окружностей по ориентациям	196
9.3. Смещение ориентационных дуг.....	200
9.4. Построение ориентационной сплайновой кривой	204
9.5. Постановка задачи сглаживания ориентационной ломаной линии	207
9.6. Построение дуг больших окружностей по ориентациям	208
9.7. Сглаживание ориентационных дуг	209
9.8. Сглаживание углов ориентационной ломаной линии	214
Предметный указатель	217
Библиографические ссылки.....	219

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время кватернионы нашли широкое применение в различных областях теоретической механики и прикладной математики. В работе рассматривается применение кватернионов в таких приложениях, как компьютерная геометрия и графика. Здесь кватернионы главным образом используются для моделирования ориентаций и вращений твердых тел. В издании представлены математические основы кватернионов и различные представления поворотов твердого тела. В дальнейшем рассмотрено применение кватернионов в моделировании сплайновых кривых на поверхностях двумерной и трехмерной сфер. Сплайновые кривые на поверхности трехмерной сферы имеют естественное приложение к моделированию ориентаций и вращений твердых тел.

Отметим, чем отличается представленная монография от предшествующих работ в этой области. В ней для моделирования сплайн-кривых используется подход, основанный на деформации орбит однопараметрических подгрупп группы поворотов. Предлагаемый подход является довольно общим и может использоваться для моделирования сплайновых кривых на произвольном многообразии, на котором определено действие группы Ли.

В начальных главах издания довольно подробно приведены математические выкладки, начиная с элементарных определений и заканчивая представлением и параметризацией поворотов. Это позволит разобраться в предлагаемом материале, не прибегая к другим источникам. Далее изложен предлагаемый автором подход к моделированию сплайновых кривых на поверхностях двумерной и трехмерной сфер. Данная работа будет полезна и интересна специалистам в области компьютерной геометрии, графики и робототехники.

В отличие от книги, которая вышла в БГУ в 2010 году, переработаны главы 7, 8 и 9 и использованы новые классы полиномов для сглаживания параметризованных кривых на группах Ли. Основные преимущества новых сглаживающих полиномов – понижение степени сглаживающего полинома на единицу, что, естественно, влечет более быстрое вычисление значений этих полиномов, а также свойство оптимизации интеграла энергии.

Глава 1

МНОГООБРАЗИЯ И ГРУППЫ ЛИ

В данной главе вводятся основные определения, касающиеся таких абстрактных понятий, как многообразие, группа Ли, действие группы Ли на многообразии и группа преобразований. Подробно ознакомиться с этими понятиями можно в книгах [1–9]. В разделе 1.14 рассмотрено такое топологическое понятие, как гомотопии кривых [9–10], на котором базируется предложенный в главе 7 общий подход к деформации кривых на многообразиях. Этот подход использует деформацию однопараметрических подгрупп группы Ли, действующей на многообразии. В главах 8 и 9 этот подход используется для моделирования кривых на поверхностях сфер S^2 и S^3 , которые являются примерами конкретных гладких многообразий.

1.1. Многообразия

Прежде чем переходить к определению многообразия, введем некоторые понятия, необходимые для этого определения. Прежде всего дадим определение открытого множества. Неформально можно сказать, что подмножество некоторого множества является открытым, если оно не содержит своей границы. Хотя в топологии граница множества также определяется формально. Например, границей круга на плоскости является окружность. Теперь дадим неформальное определение гомеоморфизма между множествами. Гомеоморфизмом между двумя множествами называется непрерывное и взаимно однозначное отображение между этими множествами, обратное отображение к которому также непрерывно. А теперь перейдем к определению многообразия.

Рассмотрим произвольное множество M . Обозначим через U некоторое открытое подмножество множества M , а через X – открытое подмножество множества R^n . Если существует гомеоморфизм

$$\varphi: U \rightarrow X,$$

то пара (U, φ) называется *локальной картой* множества M . В этом случае множество U также называется *областью карты* (U, φ) . Гомеомор-

физм φ взаимно однозначно отображает каждую точку $P \in U$ в некоторую точку $\mathbf{x} \in X$, т. е.

$$\varphi : P \mapsto \mathbf{x}.$$

Так как отображение

$$\varphi^{-1} : X \rightarrow U$$

является взаимно однозначным, то отсюда следует, что каждая точка $P \in U$ может быть единственным образом описана посредством координат соответствующей точки

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X.$$

Числа x_1, x_2, \dots, x_n могут также рассматриваться как локальные координаты точки P относительно карты (U, φ) . В этом случае сама карта (U, φ) также называется *локальной системой координат* на множестве M , а гомеоморфизм φ называется *координатным отображением*.

Если существует гомеоморфизм

$$\varphi : M \rightarrow R^n,$$

то пара (R^n, φ) называется *глобальной картой* множества M .

Введем следующее обозначение:

$$\varphi(P) = (\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_n(P)),$$

где функции

$$\varphi_i : U \rightarrow R$$

определяются по элементам следующим образом:

$$\varphi_i : P \mapsto x_i$$

для всех $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ называются *локальными координатными функциями* или просто *локальными координатами* на множестве M относительно карты (U, φ) . Используя эти обозначения, координаты произвольной точки $P \in U$ относительно карты U могут быть определены следующим образом:

$$\mathbf{x} = (\varphi_1(P), \varphi_2(P), \dots, \varphi_n(P)).$$

Карты множества обычно обозначаются (U, φ) , (V, ψ) и (W, χ) , а локальные координаты, соответствующие координатным отображениям φ , ψ и χ , будут обозначаться соответственно буквами x , y и z с индексами.

Рассмотрим некоторую коллекцию

$$A = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$$

локальных карт множества M . Здесь I обозначает произвольное, возможно бесконечное, множество индексов. Если объединение областей этих карт покрывает все множество M , т. е.

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i,$$

то коллекция A называется *атласом множества M* . В этом случае говорят, что атлас A покрывает множество M . Атласы обычно обозначают буквами A , B и C . Если каждая область U_i из атласа A гомеоморфна пространству R^n , то пара (M, A) называется *n -мерным многообразием*. Размерность многообразия M обозначается $\dim M$. Многообразие M , размерность которого равна n , также обозначается M^n . Обычно многообразия обозначаются буквами L , M и N .

1.2. Гладкие многообразия

Рассмотрим многообразие M^n и возьмем две произвольные карты (U, φ) и (V, ψ) этого многообразия. Если пересечение областей этих карт не пусто, т. е.

$$W = U \cap V \neq \emptyset,$$

то существуют два множества

$$\varphi(W) \subset R^n, \quad \psi(W) \subset R^n,$$

которые могут быть отображены друг на друга следующими взаимно обратными отображениями:

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow \psi(W), \quad \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(W) \rightarrow \varphi(W).$$

Отображения $\psi \circ \varphi^{-1}$ и $\varphi \circ \psi^{-1}$ называются *отображениями перехода между картами (U, φ) и (V, ψ)* . Оба эти отображения являются гомеоморфизмами как композиции двух гомеоморфизмов. По элементам эти отображения можно описать следующим образом:

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}, \quad \varphi \circ \psi^{-1} : \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x},$$

где

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \varphi(W), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \psi(W).$$

Отсюда очевидно, что отображения $\psi \circ \varphi^{-1}$ и $\varphi \circ \psi^{-1}$ определяют некоторые действительные отображения между двумя областями пространства R^n , которые будут обозначаться соответственно как

$$\mathbf{y} = (y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), y_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

$$\mathbf{x} = (x_1(y_1, y_2, \dots, y_n), x_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, y_2, \dots, y_n))$$

и называться *координатными представлениями отображений перехода* $\psi \circ \varphi^{-1}$ и $\varphi \circ \psi^{-1}$ соответственно. Функции $y_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $x_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$, где $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, называются *координатными функциями отображения перехода*.

Если координатные представления отображений перехода $\psi \circ \varphi^{-1}$ и $\varphi \circ \psi^{-1}$ являются гладкими, то отображения перехода $\psi \circ \varphi^{-1}$ и $\varphi \circ \psi^{-1}$ также называются *гладкими отображениями перехода*. Напомним, что в математическом анализе функций действительных переменных векторная функция называется гладкой, если она имеет непрерывные частные производные любого порядка. Поэтому можно сказать, что действительное отображение будет гладким, если гладкими являются все его координатные функции. Предполагается, что если

$$U \cap V = \emptyset,$$

то отображения $\psi \circ \varphi^{-1}$ и $\varphi \circ \psi^{-1}$ являются гладкими.

Рассмотрим некоторый атлас A многообразия M . Если все отображения перехода между картами этого атласа являются гладкими, то атлас A называется *гладким*.

Определим над гладкими атласами многообразия M отношение, которое обозначим символом \approx . Будем считать, что два гладких атласа A_1 и A_2 многообразия M находятся в отношении \approx , т. е.

$$A_1 \approx A_2,$$

только при условии, что все отображения перехода между картами этих атласов являются гладкими. Очевидно, что отношение \approx является отношением эквивалентности. Следовательно, все гладкие атласы многообразия M можно разбить на классы эквивалентности, которые определяются следующим образом:

$$[A] = \{X : X \approx A\}.$$

Гладкие атласы, принадлежащие одному классу эквивалентности, называются *эквивалентными гладкими атласами*.

Возьмем два эквивалентных атласа A_1 и A_2 многообразия M . Тогда их объединение

$$A = A_1 \cup A_2$$

также является гладким атласом многообразия M по определению. Кроме того, атлас A эквивалентен атласам A_1 и A_2 . Следовательно, каждый класс эквивалентности $[A]$ определяет некоторый гладкий атлас

$$A_{\max} = \bigcup_{A \in [A]} A,$$

который содержит всевозможные карты многообразия M , принадлежащие классу эквивалентности $[A]$. Этот атлас A_{\max} называется *максимальным атласом* многообразия M . Максимальный атлас многообразия M также называется *гладкой дифференциальной структурой* на многообразии M . Многообразие M вместе с гладкой дифференциальной структурой называется *гладким многообразием* или *C^∞ многообразием*. Таким образом, гладкое многообразие это пара (M, A_{\max}) , где M – множество, а A_{\max} – гладкая дифференциальная структура на этом множестве. Дифференциальная структура A_{\max} может быть однозначно определена произвольным атласом

$$A \subset A_{\max},$$

так как атлас A однозначно определяет класс эквивалентных атласов. Поэтому гладкое многообразие обычно обозначается как пара (M, A) , где M – множество, а A – гладкий атлас на этом множестве. Гладкое многообразие часто обозначается просто как M , в этом случае подразумевается, что множество M снабжено некоторым гладким атласом, который не существенен в рассматриваемом вопросе или ясен из контекста. Гладкие многообразия обычно обозначаются буквами L, M и N .

Если подмножество гладкого многообразия само является гладким многообразием, то это подмножество называется *гладким подмногообразием* данного гладкого многообразия.

Пример. Рассмотрим окружность S^1 , которая задана уравнением

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Определим на этой окружности локальные карты (U_i, φ_i) , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Эти локальные карты могут быть заданы следующим образом:

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1 : y > 0\}, \quad U_2 = \{(x, y) \in S^1 : y < 0\},$$

$$U_3 = \{(x, y) \in S^1 : x > 0\}, \quad U_4 = \{(x, y) \in S^1 : x < 0\},$$

$$\varphi_1(x, y) = x, \quad \varphi_2(x, y) = x, \quad \varphi_3(x, y) = y, \quad \varphi_4(x, y) = y.$$

Тогда

$$\varphi_i : U_i \rightarrow]-1, 1[$$

для всех $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Обратные отображения φ_i^{-1} определяются следующим образом:

$$(x, y) = \varphi_1^{-1}(x) = \left(x, \sqrt{1-x^2}\right), \quad (x, y) = \varphi_2^{-1}(x) = \left(x, -\sqrt{1-x^2}\right),$$

$$(x, y) = \varphi_3^{-1}(y) = \left(\sqrt{1-y^2}, y\right), \quad (x, y) = \varphi_4^{-1}(y) = \left(-\sqrt{1-y^2}, y\right).$$

Видно, что

$$S^1 = \bigcup_{i=1}^4 U_i$$

и отображения φ_i , где $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, являются гомеоморфизмами. Поэтому множество карт

$$A = \{(U_i, \varphi_i)\},$$

где $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, является атласом множества S^1 . Следовательно, окружность S^1 является многообразием.

Покажем, что атлас A является гладким. Для этой цели найдем отображение перехода между картами (U_1, φ_1) и (U_3, φ_3) . В этом случае

$$W = U_1 \cap U_3 = \{(x, y) \in S^1 : x > 0 \text{ и } y > 0\}$$

и отображения перехода

$$\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(W) \rightarrow \varphi_3(W), \quad \varphi_1 \circ \varphi_3^{-1} : \varphi_3(W) \rightarrow \varphi_1(W)$$

определяются как

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad x = \sqrt{1-y^2}$$

соответственно. Очевидно, что эти отображения перехода являются гладкими. Все другие отображения перехода между картами атласа A определяются аналогично. Следовательно, атлас A является гладким, а множество S^1 – это гладкое многообразие.

1.3. Явное описание гладких многообразий

Рассмотрим гладкое многообразие M^n . Возьмем произвольную карту (U, φ) многообразия M^n . Тогда пара $(\varphi(U), \varphi^{-1})$ называется *локальной параметризацией* многообразия M^n . Здесь множество

$$\varphi(U) \subseteq R^n$$

является открытым подмножеством пространства R^n , а отображение

$$\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U,$$

которое описывается по элементам следующим образом:

$$\varphi^{-1} : (t_1, t_2, \dots, t_n) \mapsto P,$$

является гомеоморфизмом. Пара $(\varphi(U), \varphi^{-1})$ называется параметрическим описанием или просто *параметризацией множества U* , а переменные t_1, t_2, \dots, t_n – *параметрами*.

Рассмотрим произвольную коллекцию параметризаций множества M

$$\tilde{A} = (V_i, \psi_i)_{i \in I},$$

где $V_i \in R^n$, которая удовлетворяет следующим условиям.

Условие 1. Коллекция \tilde{A} покрывает все гладкое многообразие, т. е.

$$M = \bigcup_{i \in I} \psi_i(V_i).$$

Условие 2. Отображения

$$\psi_i : V_i \rightarrow M$$

для всех $i \in I$ являются гомеоморфизмами.

Условие 3. Если

$$V_i \cap V_j \neq \emptyset,$$

для некоторых $i, j \in I$, то $\psi_j^{-1} \circ \psi_i$ и $\psi_i^{-1} \circ \psi_j$ являются гладкими действительными отображениями.

Очевидно, что в этом случае коллекция

$$A = (\psi_i(V_i), \psi_i^{-1})_{i \in I}$$

является гладким атласом множества M . Следовательно, пара (M, A) является n -мерным гладким многообразием. В этом случае также говорят, что коллекция параметризаций \tilde{A} представляет *явное описание гладкого многообразия M^n* .

Если существует гомеоморфизм

$$\psi : R^n \rightarrow M^n,$$

то пара (R^n, ψ) называется *глобальной параметризацией* гладкого многообразия M^n .

Пример. Прямая линия L в евклидовом векторном пространстве R^3 , проходящая через точки p_1 и p_2 , имеет следующее параметрическое представление:

$$l(t) = p_1 + t(p_2 - p_1),$$

где $t \in R$. Эта параметризация является глобальной, так как

$$L = l(R)$$

и для любой точки $p \in L$ определено значение параметра

$$t = \begin{cases} \frac{|p - p_1|}{|p_2 - p_1|}, & (p - p_1) \cdot (p_2 - p_1) > 0, \\ -\frac{|p - p_1|}{|p_2 - p_1|}, & (p - p_1) \cdot (p_2 - p_1) < 0. \end{cases}$$

1.4. Неявное описание гладких многообразий

Прежде чем перейти к неявному описанию гладких многообразий, нужно вспомнить из математического анализа действительных функций многих переменных определение Якобиана дифференцируемого отображения. Для этого рассмотрим гладкое отображение

$$f: R^n \rightarrow R^m,$$

координатные функции которого обозначаются следующим образом:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

для всех $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Составим из частных производных координатных функций отображения f следующую матрицу:

$$J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Эта матрица называется *матрицей Якоби* отображения f .

Теперь перейдем к неявному описанию гладких многообразий. Для этого рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \\ x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Эта система уравнений определяет следующие две функции:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 + x_2^2 - 1, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_3^2 + x_4^2 - 1. \end{aligned}$$

Введем отображение

$$f = (f_1, f_2).$$

Матрица Якоби этого отображения имеет следующий вид:

$$\mathbf{J}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 2x_4 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что ранг этой матрицы Якоби равен двум, т. е.

$$\text{rank } \mathbf{J}_f(\mathbf{x}) = 2$$

для любых $\mathbf{x} \in M$, где

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Следовательно, эта система уравнений определяет двумерное многообразие в пространстве R^4 , которое называется тором.

1.5. Группы

Обозначим через G непустое множество, на котором определена бинарная операция \circ , обычно называемая *умножением*. Пара (G, \circ) называется *группой*, если выполняются следующие условия.

Условие 1. Операция \circ является ассоциативной, т. е. для любых элементов $a, b, c \in G$ выполняется условие

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Условие 2. По отношению к бинарной операции \circ существует нейтральный элемент, т. е. существует такой элемент $e \in G$, что для любого элемента $a \in G$ выполняется условие

$$a \circ e = e \circ a = a.$$

Условие 3. Для любого элемента $a \in G$ существует *симметричный элемент*, т. е. для любого элемента $a \in G$ существует такой элемент $b \in G$, что выполняется условие

$$a \circ b = b \circ a = e.$$

Обычно бинарные операции различных групп обозначаются одним и тем же символом \circ и называются *умножением*. Сами группы обозначаются парами (F, \circ) , (G, \circ) , (H, \circ) или просто буквами F , G , H , подразумевая, что каждое множество снабжено операцией умножения. Группа с операцией умножения называется *мультипликативной*. Например, множество целых чисел является мультипликативной группой относительно операции умножения целых чисел.

Нейтральный элемент мультипликативной группы обычно называется *единичным элементом* или просто *единицей* и обозначается как 1.

Симметричный элемент коммутативной группы обычно называется *обратным элементом*. В этом случае элемент, обратный к элементу a , обозначается как a^{-1} .

Если бинарная операция \circ группы G является коммутативной, т. е.

$$a \circ b = b \circ a$$

для любых элементов $a, b \in G$, то группа G называется *коммутативной группой*. Обычно бинарная операция коммутативной группы называется *сложением* и обозначается символом $+$. Группа с операцией сложения называется *аддитивной* или *абелевой группой*. Например, множество целых чисел является аддитивной группой относительно операции сложения целых чисел.

Нейтральный элемент аддитивной группы обычно называется *нулевым элементом* или просто *нулем* и обозначается как 0.

Симметричный элемент аддитивной группы обычно называется *противоположным элементом*. В этом случае элемент, противоположный к элементу a , обозначается как $(-a)$.

Пример. Обозначим через M_n множество квадратных действительных матриц порядка n . Рассмотрим подмножество

$$GL(n, R) \subset M_n,$$

которое включает все квадратные матрицы порядка n , чьи определители удовлетворяют условию

$$\det A \neq 0$$

для $A \in GL(R, n)$. Очевидно, что множество $GL(R, n)$ является группой относительно операции умножения матриц, так как единичная матрица I

принадлежит множеству $GL(R, n)$ и является нейтральным элементом относительно операции умножения матриц. А для любой матрицы $A \in GL(R, n)$ существует обратная матрица $A^{-1} \in GL(R, n)$. Поскольку операция умножения матриц в общем случае не является коммутативной, то группа $GL(R, n)$ является мультипликативной.

1.6. Гомоморфизм групп

Рассмотрим произвольные группы G и H . Произвольное отображение

$$f : G \rightarrow H,$$

которое удовлетворяет условию

$$f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$$

для любых $a, b \in G$, называется *гомоморфизмом* из группы G в группу H . Множество всех гомоморфизмов из группы G в группу H обозначается $\text{Hom}(G, H)$. Гомоморфизмы между группами имеют следующие свойства.

Свойство 1. Композиция двух гомоморфизмов является гомоморфизмом.

Доказательство. Рассмотрим произвольные группы F , G и H . Пусть отображения

$$f : F \rightarrow G, \quad g : G \rightarrow H$$

будут гомоморфизмами групп. Тогда для любых элементов $a, b \in F$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a \circ b) &= g(f(a \circ b)) = g(f(a) \circ f(b)) = \\ &= g(f(a)) \circ g(f(b)) = ((g \circ f)(a)) \circ ((g \circ f)(b)). \end{aligned}$$

Следовательно, композиция $g \circ f$ также является гомоморфизмом.

Свойство доказано.

Свойство 2. Пусть отображение

$$f : G \rightarrow H$$

является гомоморфизмом и e – нейтральный элемент группы G , тогда $f(e)$ – нейтральный элемент группы H .

Доказательство. Рассмотрим произвольные группы G и H . Пусть отображение

$$f : G \rightarrow H$$

является гомоморфизмом. Обозначим через e нейтральный элемент группы G , а через \tilde{e} – нейтральный элемент группы H . Подействуем гомоморфизмом f на нейтральный элемент e . Получим

$$f(e) = f(e \circ e) = f(e) \circ f(e).$$

Учитывая это равенство, нейтральный элемент \tilde{e} может быть определен следующим образом:

$$\tilde{e} = f(e)^{-1} \circ f(e) = f(e)^{-1} \circ f(e) \circ f(e) = \tilde{e} \circ f(e) = f(e),$$

где $f(e)^{-1}$ обозначает обратный элемент для элемента $f(e)$. Следовательно, $f(e)$ – нейтральный элемент группы H .

Свойство доказано.

Свойство 3. Пусть отображение

$$f : G \rightarrow H$$

является гомоморфизмом и элемент $b \in G$ является симметричным элементу $a \in G$, тогда элемент $f(b) \in H$ является симметричным элементу $f(a) \in H$.

Доказательство. Рассмотрим произвольные группы G и H . Пусть отображение

$$f : G \rightarrow H$$

является гомоморфизмом. Если e – нейтральный элемент группы G и $b \in G$ – элемент, симметричный элементу $a \in G$, то выполняются равенства

$$f(e) = f(a \circ b) = f(a) \circ f(b), \quad f(e) = f(b \circ a) = f(b) \circ f(a).$$

Сравнивая эти равенства, получим

$$f(a) \circ f(b) = f(b) \circ f(a) = f(e).$$

Следовательно, элемент $f(b)$ симметричен элементу $f(a)$, так как $f(e)$ – нейтральный элемент группы H по свойству 2.

Свойство доказано.

Пример. Пусть R и R^+ обозначают соответственно множество целых чисел и множество положительных целых чисел. Рассмотрим группы $(R^+, *)$ и $(R, +)$. Определим отображение

$$f : R^+ \rightarrow R,$$

которое по элементам определяется следующим образом:

$$f(x) = \ln x$$

для любого $x \in R^+$. Из этого определения следует, что

$$f(x, y) = \ln(x * y) = \ln x + \ln y = f(x) + f(y).$$

Следовательно, отображение f является гомоморфизмом из группы $(R^+, *)$ в группу $(R, +)$.

1.7. Изоморфизм групп

Рассмотрим произвольные группы G и H . Биективный гомоморфизм

$$f : G \rightarrow H$$

называется *изоморфизмом* из группы G в группу H . Множество изоморфизмов из группы G в группу H обозначается как $\text{Iso}(G, H)$. Изоморфизмы между группами имеют следующие свойства.

Свойство 1. Тожественное отображение, заданное на группе, является изоморфизмом, т. е. тождественное отображение

$$i_G : G \rightarrow G$$

является изоморфизмом для любой группы G .

Доказательство. Очевидно, что тождественное отображение i_G является гомоморфизмом и биективным отображением. Следовательно, i_G – изоморфизм.

Свойство доказано.

Свойство 2. Если отображение

$$f : G \rightarrow H$$

является изоморфизмом из группы G в группу H , то обратное отображение

$$f^{-1} : H \rightarrow G$$

является изоморфизмом из группы H в группу G .

Доказательство. Возьмем произвольные группы G и H . Рассмотрим изоморфизм

$$f : G \rightarrow H.$$

По определению изоморфизм является биективным отображением. Следовательно, обратное отображение f^{-1} также является биективным. По-

этому нужно только доказать, что отображение f^{-1} является гомоморфизмом. Для этого рассмотрим произвольные элементы c и d из группы H . Так как f биективное отображение, то существуют такие элементы a и b из группы G , что

$$c = f(a), \quad d = f(b).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f^{-1}(c \circ d) &= f^{-1}(f(a) \circ f(b)) = f^{-1}(f(a \circ b)) = \\ &= (f^{-1} \circ f)(a \circ b) = a \circ b = \\ &= f^{-1}(f(a)) \circ f^{-1}(f(b)) = f^{-1}(c) \circ f^{-1}(d), \end{aligned}$$

так как f – гомоморфизм. Из полученных равенств следует, что отображение f^{-1} также гомоморфизм. В результате получили, что отображение f^{-1} является гомоморфизмом и биекцией. Следовательно, отображение f^{-1} – изоморфизм.

Свойство доказано.

Свойство 3. Композиция двух изоморфизмов является изоморфизмом.

Доказательство. Композиция двух изоморфизмов является гомоморфизмом по свойству 1 гомоморфизмов. Кроме того, композиция двух изоморфизмов является биективным отображением как композиция двух биективных отображений. Следовательно, композиция двух изоморфизмов – изоморфизм.

Свойство доказано.

Группы G и H называются *изоморфными группами* при условии, что существует изоморфизм

$$f: G \rightarrow H.$$

Из свойств 1, 2 и 3 следует, что изоморфизм определяет отношение эквивалентности на группах. Две группы считаются эквивалентными при условии, что они изоморфны. Следовательно, все группы можно разбить на классы эквивалентности, каждый из которых содержит изоморфные группы.

Пример. Рассмотрим гомоморфизм

$$f: R^+ \rightarrow R,$$

который был определен в примере из раздела 1.6 следующим образом:

$$f(x) = \ln x$$

для любых $x \in R^+$. Очевидно, что отображение f является биективным, так как

$$f^{-1}(y) = \exp(y)$$

для любых $y \in R$. Следовательно, отображение f является изоморфизмом между группами $(R^+, *)$ и $(R, +)$.

1.8. Подгруппы

Рассмотрим произвольную группу (G, \circ) . Возьмем подмножество H множества G . Пара (H, \circ) называется *подгруппой* группы (G, \circ) , если выполняются следующие условия.

Условие 1. Если $a, b \in H$, то $(a \circ b) \in H$.

Условие 2. Если элемент b является симметричным элементу $a \in H$, то $b \in H$.

Из определения подгруппы следует, что единичный элемент группы G принадлежит любой подгруппе H группы G . Например, множество целых чисел образует подгруппу $(Z, +)$ группы $(R, +)$. Следующая теорема дает критерий для определения, является ли заданное подмножество группы подгруппой.

Теорема. Подмножество H множества G образует подгруппу (H, \circ) группы (G, \circ) тогда и только тогда, когда $(a \circ b^{-1}) \in H$ для любых $a, b \in H$.

Доказательство. Очевидно, что если пара (H, \circ) является подгруппой группы (G, \circ) , то из условий 1 и 2 следует, что $(a \circ b^{-1}) \in H$ для любых элементов $a, b \in H$.

Обратно. Пусть $(a \circ b^{-1}) \in H$ для любых элементов $a, b \in H$. Тогда

$$e = a \circ a^{-1} \in H.$$

Следовательно,

$$a^{-1} = e \circ a^{-1} \in H$$

для любых $a \in H$. Получили, что условие 2 выполняется. Кроме того,

$$a \circ b = a \circ (b^{-1})^{-1} \in H$$

для любых $a, b \in H$. Отсюда следует, что условие 1 также выполняется. В результате получили, что пара (H, \circ) является подгруппой группы (G, \circ) .

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим группу $(Z, +)$ – множество целых чисел с операцией сложения. Выделим из множества целых чисел подмножество четных целых чисел. По теореме это подмножество образует подгруппу относительно операции сложения, так как разность двух четных чисел является четным целым числом.

1.9. Группы Ли

Группа (G, \circ) называется *группой Ли*, если множество G является гладким многообразием, а операции композиции элементов

$$a \circ b \mapsto ab$$

и обращения элемента

$$a \mapsto a^{-1}$$

являются гладкими. Если множество G является n -мерным многообразием, то группа G называется *n -мерной группой Ли*. Группы Ли будут обозначаться просто как гладкие многообразия буквами F , G и H , подразумевая, что для элементов этих гладких многообразий определены гладкие операции композиции и обращения. Элементы группы Ли будут обозначаться буквами a , b и c , возможно, с индексами. Нейтральный элемент группы Ли будет обозначаться буквой e и называться единицей, т. е.

$$e \circ a = a \circ e = a$$

для любого элемента $a \in G$. Локальные карты группы Ли будут обозначаться (U, φ) , (V, ψ) и (W, χ) . Но чтобы отметить, что множество G является группой Ли, локальные координаты на этих локальных картах будут обозначаться соответственно как

$$\varphi(a) = (a^1, a^2, \dots, a^n) = \mathbf{a}, \quad \psi(b) = (b^1, b^2, \dots, b^n) = \mathbf{b},$$

$$\chi(c) = (c^1, c^2, \dots, c^n) = \mathbf{c},$$

где $a \in U$, $b \in V$ и $c \in W$.

Пример. Рассмотрим множество действительных чисел R с операцией сложения. Очевидно, что пара $(R, +)$ является группой Ли, так как множество R является гладким многообразием, а отображения сложения действительных чисел

$$+ : (a, b) \mapsto a + b$$

и взятие противоположного действительного числа

$$-: a \mapsto -a$$

являются гладкими.

Рассмотрим композицию

$$c = ba$$

произвольных элементов a и b группы Ли G^n . Пусть (U, φ) , (V, ψ) и (W, χ) – произвольные локальные карты группы Ли G^n , которые покрывают соответственно точки a , b и c . Поскольку операция композиции является гладкой, то существуют гладкие функции

$$c^i = f^i(a, b) \quad (1.3)$$

для $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, которые описывают операцию композиции элементов относительно этих карт. Функции f^i называются *координатными представлениями* функции композиции или *произведения элементов* группы Ли G^n .

Рассмотрим произвольную локальную карту (U, φ) , которая покрывает единичный элемент e группы Ли G^n . Выберем такие две точки a и b из множества U , что их произведение

$$c = ba$$

также принадлежит множеству U . Это всегда можно сделать, так как точки a и b могут быть выбраны бесконечно близко к единичной точке e . Тогда из равенства (1.3) следует, что координатные представления функции композиции элементов удовлетворяют следующим условиям:

$$f^i(a, e) = a^i, \quad f^i(e, b) = b^i \quad (1.4)$$

для $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и любых $a, b \in U$, где e обозначает координатное представление единичного элемента e относительно локальной карты (U, φ) . Дифференцирование равенств (1.4) показывает, что координатные представления функции композиции группы Ли G^n удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{\partial f^i(a, e)}{\partial a^j} = \frac{\partial f^i(e, b)}{\partial b^j} = \delta_j^i$$

для $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

1.10. Однопараметрические подгруппы группы Ли

Рассмотрим произвольную группу Ли G . Если подмножество $H \subset G$ одновременно является подгруппой и подмногообразием группы Ли G , то подмножество H называется *подгруппой группы Ли G* .

Покажем, что в каждой группе Ли G существует такая окрестность единицы e , которая является подгруппой группы Ли G . Для этой цели введем следующие обозначения. Пусть G_e обозначает такое множество точек из множества G , которые могут быть соединены непрерывными путями с точкой e . Такое множество G_e называется *связной компонентой единицы*. Очевидно, что множество G_e является гладким подмногообразием гладкого многообразия G , так как если коллекция

$$A = (A_i)_{i \in I}$$

является гладким атласом множества G , то коллекция

$$A_e = (A_i \cap G_e)_{i \in I}$$

есть гладкий атлас множества G_e . Покажем, что множество G_e является подгруппой группы G .

Теорема. Связная компонента единицы G_e является подгруппой группы G .

Доказательство. Возьмем два произвольных элемента a и b из множества G_e . Из определения множества G_e следует, что существуют непрерывные пути $\alpha(u)$ и $\beta(u)$, где $u \in [0,1]$, которые связывают единицу e с точками a и b соответственно, т. е.

$$\alpha(0) = e, \alpha(1) = a, \beta(0) = e, \beta(1) = b.$$

Рассмотрим путь

$$\gamma(u) = \alpha(u)\beta(u),$$

где $u \in [0,1]$. Очевидно, что

$$\gamma(0) = \alpha(0)\beta(0) = e.$$

Предположим, что

$$\gamma(1) = \alpha(1)\beta(1) = ab = c.$$

Так как операции композиции элементов непрерывны в группе Ли, то путь $\gamma(u)$ также непрерывен как композиция двух непрерывных путей. Следовательно, элемент c также принадлежит множеству G_e .

Теперь покажем, что существует непрерывный путь между элементами e и a^{-1} для любого элемента $a \in G_e$. Для этой цели определим путь

$$\alpha^{-1}(u) = a^{-1}\alpha(1-u),$$

где $u \in [0,1]$. Очевидно, что

$$\alpha(0) = a^{-1}a = e, \quad \alpha(1) = a^{-1}e = a^{-1}.$$

Кроме того, путь $\alpha^{-1}(u)$ непрерывен как композиция константы a^{-1} и непрерывного пути $\alpha(u)$. Следовательно, элемент a^{-1} также принадлежит множеству G_e .

В результате получили, что множество G_e является подгруппой группы G , так как элементы a и b были выбраны произвольно.

Теорема доказана.

Рассмотрим произвольную группу Ли G . Если параметризованная гладкая кривая

$$\gamma : R \rightarrow G$$

удовлетворяет условию

$$\gamma(t_1 + t_2) = \gamma(t_2)\gamma(t_1)$$

для любых $t_1, t_2 \in R$, то она называется *однопараметрической подгруппой группы Ли G* . Из этого условия следует, что

$$\gamma(0) = e,$$

так как

$$\gamma(t) = \gamma(0)\gamma(t) = \gamma(t)\gamma(0)$$

для любого значения $t \in R$.

1.11. Действие группы на многообразии

Рассмотрим гладкое многообразие M и группу Ли G . Гладкое отображение

$$f : G \times M \rightarrow M$$

называется *левым действием* или просто *действием группы Ли G на гладкое многообразие M* , если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

$$f(ba, p) = f(b, f(a, p)) \tag{1.5}$$

для любых элементов $a, b \in G$ и точки $p \in M$,

$$f(e, p) = p \quad (1.6)$$

для любой точки $p \in M$, где e обозначает единицу группы Ли G . В этом случае говорят, что группа Ли G действует на гладкое многообразие M и точка

$$q = f(a, p) \quad (1.7)$$

есть результат действия элемента $a \in G$ на точку $p \in M$. Чтобы упростить обозначения, равенство (1.7) обычно записывается как

$$q = ap.$$

Используя эти обозначения, условия (1.5) и (1.6) могут быть переписаны соответственно следующим образом:

$$(ba)p = b(ap), \\ ep = p$$

для любых элементов $a, b \in G$ и точки $p \in M$.

Рассмотрим действие произвольного элемента $a \in G^n$ на некоторую точку $p \in M$, т. е.

$$q = ap.$$

Пусть (U, φ) и (V, ψ) – локальные карты гладкого многообразия M , которые покрывают точки p и q соответственно, а (W, χ) – локальная карта группы Ли G^n , которая покрывает элемент a . Так как действие группы Ли на многообразии является гладким отображением, то существуют гладкие функции

$$y^i = f^i(a, x)$$

для $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, которые описывают это действие относительно этих карт. Эти функции f^i называются *координатным представлением действия группы Ли* на многообразии относительно локальных карт (U, φ) , (V, ψ) и (W, χ) .

1.12. Орбиты

Рассмотрим произвольную группу Ли G , действующую на некоторое гладкое многообразие M . Возьмем произвольную точку $x \in M$. Множество

$$O_x = \{ax : \forall a \in G\}$$

называется *орбитой точки x* под действием группы Ли G . Очевидно, что каждая орбита является гладким подмногообразием гладкого многообразия M .

Возьмем произвольные точки y и z , принадлежащие орбите O_x . Из определения орбиты следует, что существуют такие элементы a и b из группы Ли G , что выполняются следующие равенства:

$$y = ax, \quad z = bx.$$

Из этих равенств следует, что

$$z = ba^{-1}y.$$

Это значит, что любые две точки, принадлежащие одной и той же орбите, могут быть получены одна из другой действием некоторого элемента из группы Ли G .

Введем следующее отношение эквивалентности между точками гладкого многообразия M , на которое действует группа Ли G . Предположим, что

$$x \approx y$$

только при условии, если

$$O_x = O_y,$$

где O_x и O_y – орбиты действия группы Ли G соответственно на точки x и y гладкого многообразия M . Очевидно, что отношение \approx является отношением эквивалентности и эквивалентные точки принадлежат одной и той же орбите, полученной действием группы Ли G на гладкое многообразие M . Следовательно, каждая орбита есть класс точек, эквивалентных относительно отношения \approx . Отсюда следует, что гладкое многообразие M можно представить как объединение орбит из фактормножества M/G .

Подмножество U гладкого многообразия M называется *инвариантным подмножеством* группы Ли G или *G -инвариантным подмножеством*, если $ax \in U$ для любого элемента $a \in G$ и точки $x \in U$. Покажем, что любое G -инвариантное подмножество является объединением орбит группы Ли G , действующей на гладкое многообразие M .

Теорема. Подмножество U гладкого многообразия M является G -инвариантным тогда и только тогда, когда U является объединением орбит группы Ли G , действующей на гладкое многообразие M .

Доказательство. Пусть U будет G -инвариантное подмножество гладкого многообразия M . Возьмем произвольную точку $x \in U$. Тогда точка

$$y = ax$$

также принадлежит множеству U для любого элемента $a \in G$, так как подмножество U является G -инвариантным. Это значит, что орбита O_x так-

же принадлежит множеству U . Следовательно, множество U может быть представлено как объединение орбит из фактормножества M/G .

Обратно. Пусть подмножество U гладкого многообразия M можно представить как объединение орбит из фактормножества M/G . Возьмем произвольную точку $x \in U$. Точка x принадлежит орбите O_x из фактормножества M/G . Следовательно, точка

$$y = ax$$

также принадлежит орбите O_x для любого элемента $a \in G$. Отсюда следует, что точка y также принадлежит подмножеству U . А это и значит, что подмножество U является G -инвариантным.

Теорема доказана.

Действие группы Ли G на гладкое многообразие M называется *транзитивным*, если для любых двух точек $x, y \in M$ существует такой элемент $a \in G$, что

$$y = ax.$$

В этом случае орбита O_x произвольной точки $x \in M$ равна самому гладкому многообразию M , которое в этом случае называется *однородным пространством*.

1.13. Группы преобразований

Рассмотрим произвольное гладкое многообразие M и группу Ли G , действующую на это многообразие. Обозначим действие группы Ли G на гладкое многообразие M через

$$f : G \times M \rightarrow M.$$

Если в отображении f зафиксировать произвольный элемент $a \in G$, то получим отображение

$$f_a : M \rightarrow M,$$

которое определяется по элементам следующим образом:

$$f_a(p) = f(a, p)$$

для любой точки $p \in M$. Отображение f_a соответствует левому действию элемента $a \in G$ на точки гладкого многообразия M и называется *преобразованием гладкого многообразия M* . Обозначим через G_M множество всех преобразований гладкого многообразия M , соответствующих действиям элементов группы Ли G на это гладкое многообразие.

Композиция произвольных преобразований f_a и f_b гладкого многообразия M также является преобразованием этого гладкого многообразия, так как

$$\begin{aligned}(f_b \circ f_a)(p) &= f_b(f_a(p)) = f(b, f(a, p)) = \\ &= f(ba, p) = f_{ba}(p)\end{aligned}$$

для любой точки $p \in M$. Покажем, что множество преобразований G_M образует группу относительно операции композиции преобразований.

Теорема. Множество преобразований G_M образует группу относительно операции композиции преобразований.

Доказательство. Покажем, что операция композиции преобразований ассоциативна. Для этого рассмотрим произвольные преобразования f_a , f_b и f_c из множества G_M и найдем действие их композиции на произвольную точку $p \in M$. Получим

$$\begin{aligned}((f_c \circ f_b) \circ f_a)(p) &= f(cb, f(a, p)) = f(cba, p) = \\ &= f(c, f(ab, p)) = (f_c \circ (f_b \circ f_a))(p).\end{aligned}$$

Так как точка $p \in M$ была выбрана произвольно, то отсюда следует равенство

$$(f_c \circ f_b) \circ f_a = f_c \circ (f_b \circ f_a),$$

которое и показывает, что операция композиции преобразований ассоциативна.

Покажем, что преобразование f_e , которое соответствует единице e группы Ли G , является нейтральным элементом относительно операции композиции преобразований. Для этого рассмотрим произвольное преобразование f_a из множества G_M и найдем действие композиций этого преобразования с преобразованием f_e на произвольную точку $p \in M$. Получим

$$\begin{aligned}(f_e \circ f_a)(p) &= f(ea, p) = f(a, p) = f_a(p), \\ (f_a \circ f_e)(p) &= f(ae, p) = f(a, p) = f_a(p).\end{aligned}$$

Так как точка $p \in M$ была выбрана произвольно, то отсюда следуют равенства

$$f_e \circ f_a = f_a \circ f_e = f_a,$$

которые и показывают, что преобразование f_e является нейтральным элементом относительно операции композиции преобразований.

Теперь покажем, что для произвольного преобразования f_a из множества G_M преобразование $f_{a^{-1}}$ является обратным. Для этого возьмем произвольную точку $p \in M$ и найдем действие композиции преобразований f_a и $f_{a^{-1}}$ на эту точку. Получим

$$\begin{aligned}(f_a \circ f_{a^{-1}})(p) &= f_a(f_{a^{-1}}(p)) = f(a, f(a^{-1}, p)) = \\ &= f(aa^{-1}, p) = f(e, p) = f_e(p) = p\end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned}(f_{a^{-1}} \circ f_a)(p) &= f_{a^{-1}}(f_a(p)) = f(a^{-1}, f(a, p)) = \\ &= f(a^{-1}a, p) = f(e, p) = f_e(p) = p.\end{aligned}$$

Так как точка $p \in M$ была выбрана произвольно, то отсюда следуют равенства

$$f_a f_{a^{-1}} = f_{a^{-1}} f_a = f_e,$$

которые и показывают, что преобразование $f_{a^{-1}}$ является обратным к преобразованию f_a . В результате доказали, что множество G_M образует группу относительно операции композиции преобразований.

Теорема доказана.

1.14. Гомотопии кривых

Рассмотрим произвольное гладкое многообразие M . Возьмем на этом многообразии две произвольные параметризованные кривые $f(t)$ и $g(t)$, где $t \in T$. Параметризованные кривые $f(t)$ и $g(t)$ называются *гомоторными*, если существует такое непрерывное отображение

$$H : T \times U \rightarrow M,$$

где

$$U = [0, 1],$$

что

$$H(t, 0) = f(t), \quad H(t, 1) = g(t).$$

В этом случае отображение H называется *гомоторией* между параметризованными кривыми $f(t)$ и $g(t)$, а сами параметризованные кривые $f(t)$ и $g(t)$ – *гомоторными*. Можно также считать, что гомотория непрерывно деформирует параметризованную кривую $f(t)$ в параметризованную

кривую $g(t)$. Поэтому гомотопию кривых часто также называют *деформацией кривых*.

Будем говорить, что параметризованные кривые $f(t)$ и $g(t)$ находятся в *отношении гомотопии*, или *гомотопны*, если между этими кривыми существует гомотопия. Отношение гомотопии параметризованных кривых будет обозначаться следующим образом:

$$f(t) \sim g(t).$$

Теорема. Отношение гомотопии между параметризованными кривыми является отношением эквивалентности.

Доказательство. Нужно показать, что отношение гомотопии является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Для этой цели рассмотрим произвольное многообразие M и возьмем на этом многообразии произвольную параметризованную кривую $f(t)$. Очевидно, что

$$f(t) \sim f(t),$$

так как отображение

$$H(t, u) = f(t),$$

$u \in U$ является гомотопией параметризованной кривой $f(t)$. Следовательно, отношение гомотопии рефлексивно.

Возьмем на многообразии M две произвольные гомотопные параметризованные кривые $f(t)$ и $g(t)$, т. е.

$$f(t) \sim g(t).$$

Тогда между этими параметризованными кривыми существует гомотопия H , которая удовлетворяет следующим условиям:

$$H(t, 0) = f(t), \quad H(t, 1) = g(t).$$

Определим отображение

$$G(t, u) = H(t, 1 - u),$$

которое является гомотопией между параметризованными кривыми $g(t)$ и $f(t)$, так как отображение

$$u \mapsto 1 - u$$

является непрерывным и

$$G(t, 0) = g(t), \quad G(t, 1) = f(t).$$

В результате получили, что

$$g(t) \sim f(t).$$

Следовательно, отношение гомотопии симметрично.

Теперь возьмем на многообразии M произвольные параметризованные кривые $f(t)$, $g(t)$ и $h(t)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$f(t) \sim g(t), \quad g(t) \sim h(t),$$

т. е. параметризованная кривая $f(t)$ гомотопна параметризованной кривой $g(t)$, которая в свою очередь гомотопна параметризованной кривой $h(t)$. Тогда между этими парами гомотопных кривых существуют гомотопии, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$F(t, 0) = f(t), \quad F(t, 1) = g(t),$$

$$G(t, 0) = g(t), \quad G(t, 1) = h(t).$$

Определим отображение

$$H(t, u) = \begin{cases} F(t, 2u), & 0 \leq u \leq 1/2 \\ G(t, 2u - 1), & 1/2 \leq u \leq 1. \end{cases}$$

Это отображение является гомотопией между параметризованными кривыми $f(t)$ и $h(t)$, так как отображения

$$u \mapsto 2u, \quad u \mapsto 2u - 1$$

непрерывны и выполняются условия:

$$H(t, 0) = F(t, 0) = f(t), \quad H(t, 1) = G(t, 1) = h(t).$$

Следовательно, отношение гомотопии транзитивно. В результате получили, что отношение гомотопии является отношением эквивалентности.

Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим два линейных сегмента в линейном пространстве:

$$p(t) = p_1 + p_2 t, \quad q(t) = q_1 + q_2 t.$$

Определим следующее отображение:

$$H(t, u) = (1 - u)p(t) + uq(t),$$

где $u \in [0, 1]$. Очевидно, что отображение H является гомотопией, так как оно непрерывно и удовлетворяет условиям:

$$H(t, 0) = p(t), \quad H(t, 1) = q(t).$$

Отметим, что введенная гомотопия H может быть определена для произвольных параметризованных кривых в евклидовом пространстве. Поскольку эта гомотопия напоминает определение линии по двум точкам линейного пространства, то она называется *линейной гомотопией*.

Глава 2 КВАТЕРНИОНЫ

В данной главе подробно рассмотрены кватернионы и операции над ними. Показано, что множество кватернионов с введенными операциями сложения и умножения образует алгебру, а множество единичных кватернионов образует группу относительно операции умножения кватернионов. Подробнее с кватернионами можно познакомиться в работах [11–20]. Общие вопросы применения кватернионов в робототехнике и компьютерной графике рассмотрены в работах [21–31].

2.1. Определение кватерниона

Рассмотрим следующие квадратные матрицы второго порядка:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Видно, что эти матрицы удовлетворяют условию

$$E^2 = -I.$$

Используя матрицы I и E , определим следующие блочно-диагональные матрицы четвертого порядка:

$$1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad j = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что матрицы $1, i, j$ и k являются линейно независимыми.

Кватернионом называется произвольная линейная комбинация

$$Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

матриц $1, i, j$ и k . Действительные числа q_0, q_1, q_2 и q_3 называются *координатами кватерниона* Q . Действительное число q_0 называется *скалярной частью кватерниона* Q , а линейная комбинация

$$q = q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

называется *векторной частью кватерниона* Q . Используя эти обозначения, кватернион Q может быть также представлен следующим образом:

$$Q = q_0 + q.$$

Из этих определений следует, что кватернион Q может также рассматриваться как квадратная матрица четвертого порядка, которая имеет следующую структуру:

$$Q = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}.$$

Множество всех кватернионов будет обозначаться H^4 .

2.2. Линейные операции над кватернионами

Над кватернионами могут быть определены линейные операции, которые соответствуют линейным операциям над матрицами, представляющими кватернионы.

Таким образом, сложение кватернионов P и Q определяется как

$$\begin{aligned} P + Q &= (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k) + (q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) = \\ &= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k, \end{aligned}$$

а кватернион $P + Q$ называется *суммой кватернионов* P и Q .

Умножение кватерниона Q на действительное число λ определяется как

$$\lambda Q = \lambda(p_0 + p_1i + p_2j + p_3k) = \lambda p_0 + \lambda p_1i + \lambda p_2j + \lambda p_3k,$$

а кватернион λQ называется *произведением кватерниона* Q и *действительного числа* λ .

Следовательно, множество H^4 вместе с рассмотренными линейными операциями над кватернионами образует четырехмерное линейное пространство, которое также обозначается H^4 и называется *линейным пространством кватернионов*. Очевидно, что матрицы 1 , i , j и k образуют базис этого линейного пространства.

Пример. Проиллюстрируем линейные операции над кватернионами. Для этой цели рассмотрим два кватерниона

$$P = 1 + i + 2j + 3k, \quad Q = 5 - 4i + 3j - k$$

и действительное число

$$\lambda = 2.$$

Тогда

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 6 - 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

$$\lambda\mathbf{Q} = 10 - 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

2.3. Умножение кватернионов

Определим операцию умножения кватернионов. Для этой цели найдем произведения базисных матриц \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} . Видно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 &= -1, \\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} &= \mathbf{k}, \\ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} &= \mathbf{i}, \\ \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} &= \mathbf{j}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Теперь возьмем произвольные кватернионы

$$\mathbf{P} = p_0 + \mathbf{p}, \quad \mathbf{Q} = q_0 + \mathbf{q}.$$

Используя равенства (2.1), умножение кватернионов \mathbf{P} и \mathbf{Q} определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{PQ} &= (p_0 + \mathbf{p})(q_0 + \mathbf{q}) = \\ &= (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k})(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) = \\ &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\mathbf{i} + \\ &+ (p_0q_2 + p_2q_0 - p_1q_3 + p_3q_1)\mathbf{j} + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)\mathbf{k} = \\ &= p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}. \end{aligned}$$

В результате получили формулу

$$\mathbf{PQ} = (p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) + (p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}), \tag{2.2}$$

где скобки отделяют действительную и векторную части кватерниона \mathbf{PQ} , который называется *произведением кватернионов \mathbf{P} и \mathbf{Q}* . Из формулы (2.2) видно, что произведение кватернионов коммутативно только при условии

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} = 0,$$

т. е. когда векторные части кватернионов перпендикулярны.

Операция умножения кватернионов имеет следующие свойства.

Свойство 1. Умножение кватернионов дистрибутивно относительно сложения кватернионов, т. е. для произвольных кватернионов P , Q и R выполняются следующие равенства:

$$P(Q + R) = PQ + PR,$$

$$(P + Q)R = PR + QR.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные кватернионы P , Q и R и вычислим произведение $P(Q + R)$. Используя формулу (2.2), получим

$$\begin{aligned} P(Q + R) &= \\ &= (p_0 + p)((q_0 + q) + (r_0 + r)) = (p_0 + p)((q_0 + r_0) + (q + r)) = \\ &= p_0(q_0 + r_0) - p \cdot (q + r) + p_0(q + r) + (q_0 + r_0)p + p \times (q + r) = \\ &= (p_0q_0 - p \cdot q + p_0q + q_0p + p \times q) + (p_0r_0 - p \cdot r + p_0r + r_0p + p \times r) = \\ &= PQ + PR. \end{aligned}$$

Второе равенство из этого свойства доказывается аналогично.

Свойство доказано.

Свойство 2. Умножение кватернионов ассоциативно, т. е. для произвольных кватернионов P , Q и R выполняется равенство

$$(PQ)R = P(QR).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные кватернионы P , Q и R и вычислим произведение $(PQ)R$. Используя формулу (2.2), получим

$$\begin{aligned} (PQ)R &= ((p_0 + p)(q_0 + q))(r_0 + r) = ((p_0q_0 - p \cdot q) + \\ &+ (p_0q + q_0p + p \times q))(r_0 + r) = (p_0q_0 - p \cdot q)r_0 - \\ &- (p_0q + q_0p + p \times q) \cdot r + (p_0q_0 - p \cdot q)r + \\ &+ r_0(p_0q + q_0p + p \times q) + (p_0q + q_0p + p \times q) \times r = \\ &= p_0q_0r_0 - r_0(p \cdot q) - p_0(q \cdot r) - q_0(p \cdot r) - (p \times q) \cdot r + \\ &+ p_0q_0r - (p \cdot q)r + r_0p_0q + r_0q_0p + r_0(p \times q) + \\ &+ p_0(q \times r) + q_0(p \times r) + (p \times q) \times r = \\ &= p_0q_0r_0 - p_0(q \cdot r) - q_0(p \cdot r) - r_0(q \cdot p) - p \cdot (q \times r) + \\ &+ p_0q_0r + p_0r_0q + p_0(q \times r) + q_0r_0p - (p \cdot q)r + q_0(p \times r) + r_0(p \times q) + \\ &+ (p \cdot r)q - (q \cdot r)p = p_0q_0r_0 - p_0(q \cdot r) - q_0(p \cdot r) - r_0(q \cdot p) - p \cdot (q \times r) + \\ &+ p_0q_0r + p_0r_0q + p_0(q \times r) + q_0r_0p - (q \cdot r)p + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q_0(\mathbf{p} \times \mathbf{r}) + r_0(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) + \mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{r}) = \\
& = p_0(q_0 r_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{p} \cdot (q_0 \mathbf{r} + r_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{r}) + \\
& + p_0(q_0 \mathbf{r} + r_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{r}) + (q_0 r_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{p} + \mathbf{p} \times (q_0 \mathbf{r} + r_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{r}) = \\
& = (p_0 + \mathbf{p})((q_0 r_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) + (q_0 \mathbf{r} + r_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{r})) = \\
& = (p_0 + \mathbf{p})((q_0 + \mathbf{q})(r_0 + \mathbf{r})) = \mathbf{P}(\mathbf{QR}).
\end{aligned}$$

Свойство доказано.

Свойство 3. Умножение кватернионов дистрибутивно относительно умножения кватерниона на действительное число, т. е. для произвольных кватернионов \mathbf{P} , \mathbf{Q} и действительного числа λ выполняются следующие равенства:

$$\lambda(\mathbf{PQ}) = (\lambda\mathbf{P})\mathbf{Q} = \mathbf{P}(\lambda\mathbf{Q}).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные кватернионы \mathbf{P} , \mathbf{Q} и действительное число λ . Используя формулу (2.2), вычислим произведение $\lambda(\mathbf{PQ})$. Получим

$$\begin{aligned}
\lambda(\mathbf{PQ}) & = \lambda(p_0 + \mathbf{p})(q_0 + \mathbf{q}) = \\
& = \lambda(p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) + (p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}) = \\
& = (\lambda p_0) q_0 - (\lambda \mathbf{p}) \cdot \mathbf{q} + (\lambda p_0) \mathbf{q} + q_0 (\lambda \mathbf{p}) + (\lambda \mathbf{p}) \times \mathbf{q} = \\
& = (\lambda(p_0 + \mathbf{p}))(q_0 + \mathbf{q}) = (\lambda\mathbf{P})\mathbf{Q}.
\end{aligned}$$

Второе равенство из свойства 3 доказывается аналогично.

Свойство доказано.

Из доказанных свойств следует, что линейное пространство H^4 вместе с введенной операцией умножения кватернионов образует алгебру, которая называется *алгеброй кватернионов* и также обозначается H^4 .

Пример. Рассмотрим два кватерниона:

$$\mathbf{P} = 1 + \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{Q} = 5 - 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Видно, что действительные и векторные части этих кватернионов определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
p_0 & = 1, \quad q_0 = 5, \\
\mathbf{p} & = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Тогда, используя формулу (2.2), произведение кватернионов P и Q может быть вычислено следующим образом:

$$PQ = 5 + 1 + i + 13j + 14k + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 6 - 10i + 2j + 25k.$$

2.4. Сопряженные кватернионы

Рассмотрим произвольный кватернион

$$Q = q_0 + q.$$

Кватернион

$$Q^* = q_0 - q$$

называется *сопряженным* с кватернионом Q . Операция получения сопряженного кватерниона из исходного кватерниона называется *сопряжением кватернионов*. Эта операция имеет следующие свойства.

Свойство 1. Для любого кватерниона Q выполняется равенство

$$(Q^*)^* = Q.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный кватернион

$$Q = q_0 + q.$$

Видно, что

$$(Q^*)^* = (q_0 - q)^* = q_0 + q = Q.$$

Свойство доказано.

Свойство 2. Для любых кватернионов P и Q выполняется равенство

$$(P + Q)^* = P^* + Q^*.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные кватернионы

$$P = p_0 + p, \quad Q = q_0 + q.$$

Видно, что

$$\begin{aligned} (P + Q)^* &= (p_0 + p + q_0 + q)^* = \\ &= ((p_0 + q_0) + (p + q))^* = (p_0 + q_0) - (p + q) = \\ &= (p_0 - q) + (q_0 - q) = P^* + Q^*. \end{aligned}$$

Свойство доказано.

Свойство 3. Для любых кватернионов P и Q выполняется равенство

$$(PQ)^* = Q^*P^*.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные кватернионы

$$P = p_0 + p, \quad Q = q_0 + q.$$

Используя формулу (2.2), произведение кватернионов P и Q определяется следующим образом:

$$PQ = (p_0q_0 - p \cdot q) + (p_0q + q_0p + p \times q).$$

Из этого равенства следует, что

$$\begin{aligned} (PQ)^* &= ((p_0q_0 - p \cdot q) + (p_0q + q_0p + p \times q))^* = \\ &= (p_0q_0 - p \cdot q) - (p_0q + q_0p + p \times q) = \\ &= (q_0p_0 - q \cdot p) + (-q_0p - p_0q + q \times p) = \\ &= (q_0 - q)(p_0 - p) = Q^*P^*. \end{aligned}$$

Свойство доказано.

Пример. Очевидно, что кватернион, сопряженный с кватернионом

$$Q = 5 - 4i + 3j - k,$$

имеет вид

$$Q^* = 5 + 4i - 3j + k.$$

2.5. Скалярное произведение кватернионов

Определим скалярное произведение кватернионов, принимая во внимание, что множество H^4 является линейным пространством. Для этой цели рассмотрим произвольные кватернионы P и Q . Скалярным произведением кватернионов P и Q называется действительное число

$$P \cdot Q = p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3. \quad (2.3)$$

Из этого определения следует, что скалярное произведение кватернионов имеет следующие свойства.

Свойство 1. Скалярное произведение кватернионов коммутативно, т. е. для любых кватернионов P и Q выполняется равенство

$$P \cdot Q = Q \cdot P.$$

Свойство 2. Скалярное произведение кватернионов дистрибутивно относительно сложения кватернионов, т. е. для любых кватернионов P , Q и R выполняются равенства

$$\begin{aligned} P \cdot (Q + R) &= (P \cdot Q) + (P \cdot R), \\ (P + Q) \cdot R &= (P \cdot R) + (Q \cdot R). \end{aligned}$$

Свойство 3. Скалярное произведение кватернионов дистрибутивно относительно умножения кватерниона на действительное число, т. е. для любых кватернионов P , Q и действительного числа λ выполняются равенства

$$(\lambda P) \cdot Q = P \cdot (\lambda Q) = \lambda(P \cdot Q).$$

Если кватернионы P и Q представлены через свои действительные и векторные части

$$P = p_0 + p, \quad Q = q_0 + q,$$

то, используя формулу (2.3), скалярное произведение кватернионов может быть определено следующим образом:

$$P \cdot Q = p_0 q_0 + p \cdot q. \quad (2.4)$$

Пример. Вычислим скалярное произведение кватернионов

$$P = 1 + i + 2j + 3k, \quad Q = 5 - 4i + 3j - k,$$

используя одну из формул (2.3) или (2.4). Получим

$$P \cdot Q = 4.$$

2.6. Норма кватерниона

Рассмотрим произвольный кватернион

$$Q = q_0 + q.$$

Нормой кватерниона Q называется действительное число

$$N(Q) = Q \cdot Q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \quad (2.5)$$

а действительное число

$$|Q| = \sqrt{Q \cdot Q}$$

называется *модулем кватерниона Q* .

Теорема. Для любых кватернионов P и Q выполняется равенство

$$N(PQ) = N(P)N(Q).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные кватернионы

$$\mathbf{P} = p_0 + \mathbf{p}, \quad \mathbf{Q} = q_0 + \mathbf{q}.$$

Произведение кватернионов \mathbf{P} и \mathbf{Q} определяется, используя формулу (2.2), следующим образом:

$$\mathbf{PQ} = (p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) + (p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}).$$

Из этого равенства следует, что

$$\begin{aligned} N(\mathbf{PQ}) &= (\mathbf{PQ}) \cdot (\mathbf{PQ}) = (p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})(p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) + \\ &+ (p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}) \cdot (p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}) = \\ &= p_0^2q_0^2 - 2p_0q_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 + \\ &+ p_0^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) + 2p_0q_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) + q_0^2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 = \\ &= p_0^2q_0^2 + p_0^2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) + q_0^2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) = \\ &= (p_0^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p})(q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) = N(\mathbf{P})N(\mathbf{Q}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пример. Используя формулу (2.5), вычислим норму кватерниона

$$\mathbf{Q} = 1 - 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Получим

$$N(\mathbf{Q}) = 27.$$

Вычислим произведение кватерниона \mathbf{Q} с сопряженным ему кватернионом \mathbf{Q}^* . Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^*\mathbf{Q} &= \mathbf{QQ}^* = (q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) + (q_0\mathbf{q} - q_0\mathbf{q} - \mathbf{q} \times \mathbf{q}) = \\ &= q_0^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что норма и модуль кватерниона \mathbf{Q} могут быть вычислены, используя операцию сопряжения кватерниона, соответственно следующим образом:

$$N(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^*\mathbf{Q}, \quad |\mathbf{Q}| = \sqrt{\mathbf{Q}^*\mathbf{Q}}. \quad (2.6)$$

2.7. Обратные кватернионы

Рассмотрим произвольный кватернион

$$\mathbf{Q} = q_0 + \mathbf{q}.$$

Кватернион

$$P = p_0 + p$$

называется *обратным* кватерниону Q при условии, что выполняется равенство

$$QP = 1.$$

Для того чтобы определить кватернион P , обратный кватерниону Q , рассмотрим кватернион

$$Q^* = q_0 - q,$$

сопряженный с кватернионом Q . Используя формулу (2.6), вычислим норму кватерниона Q . Получим

$$N(Q) = QQ^* = q_0^2 + q \cdot q. \quad (2.7)$$

Используя это равенство, определим кватернион

$$P = \frac{1}{N(Q)} Q^*. \quad (2.8)$$

Видно, что в этом случае

$$QP = \frac{1}{N(Q)} QQ^* = \frac{1}{N(Q)} N(Q) = 1.$$

Из этого равенства следует, что кватернион P является обратным кватерниону Q . Кватернион, обратный кватерниону Q , будет обозначаться Q^{-1} . В результате получили следующую формулу для нахождения обратных кватернионов:

$$Q^{-1} = \frac{1}{N(Q)} Q^* = \frac{1}{q_0^2 + q \cdot q} (q_0 - q). \quad (2.9)$$

Из формулы (2.9) видно, что обратный кватернион Q^{-1} определен только в том случае, если выполняется условие

$$N(Q) \neq 0.$$

Это значит, что обратный кватернион определен для любого ненулевого кватерниона. Операция получения кватерниона, обратного к исходному кватерниону, называется *операцией обращения кватернионов*. Эта операция имеет следующие свойства.

Свойство 1. Для любого ненулевого кватерниона Q выполняется равенство

$$Q^{-1}Q = 1.$$

Доказательство. Это свойство следует из определения нормы кватерниона, так как

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q} = \frac{1}{N(\mathbf{Q})}\mathbf{Q}^*\mathbf{Q} = \frac{1}{N(\mathbf{Q})}N(\mathbf{Q}) = 1$$

для любого ненулевого кватерниона \mathbf{Q} .

Свойство доказано.

Свойство 2. Для любого ненулевого кватерниона \mathbf{Q} выполняется равенство

$$(\mathbf{Q}^{-1})^{-1} = \mathbf{Q}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный ненулевой кватернион \mathbf{Q} . Кватернион, обратный кватерниону \mathbf{Q} , определяется следующим образом:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{N(\mathbf{Q})}\mathbf{Q}^*.$$

Из этого равенства следует, что

$$N(\mathbf{Q}^{-1}) = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{N(\mathbf{Q})^2}\mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q}^* = \frac{1}{N(\mathbf{Q})^2}N(\mathbf{Q}) = \frac{1}{N(\mathbf{Q})},$$

$$(\mathbf{Q}^{-1})^* = \frac{1}{N(\mathbf{Q})}\mathbf{Q}.$$

Тогда кватернион $(\mathbf{Q}^{-1})^{-1}$, обратный кватерниону \mathbf{Q}^{-1} , находится следующим образом:

$$(\mathbf{Q}^{-1})^{-1} = \frac{1}{N(\mathbf{Q}^{-1})}(\mathbf{Q}^{-1})^* = N(\mathbf{Q})\frac{1}{N(\mathbf{Q})}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}.$$

Свойство доказано.

Свойство 3. Для любых ненулевых кватернионов \mathbf{Q} и \mathbf{P} выполняется равенство

$$(\mathbf{PQ})^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные ненулевые кватернионы \mathbf{P} и \mathbf{Q} . Из определения обратного кватерниона следует, что

$$\begin{aligned} (\mathbf{PQ})^{-1} &= \frac{1}{N(\mathbf{PQ})}(\mathbf{PQ})^* = \\ &= \frac{1}{N(\mathbf{P})N(\mathbf{Q})}\mathbf{Q}^*\mathbf{P}^* = \frac{1}{N(\mathbf{Q})}\mathbf{Q}^* \frac{1}{N(\mathbf{P})}\mathbf{P}^* = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1}. \end{aligned}$$

Свойство доказано.

Пример. Используя формулу (2.9), найдем кватернион, обратный кватерниону

$$Q = 1 - 4i + 3j - k.$$

Получим

$$Q^{-1} = \frac{1}{27}(1 + 4i - 3j + k).$$

2.8. Ортогональные кватернионы

Кватернионы P и Q называются *ортогональными кватернионами* при условии, что выполняется равенство

$$P \cdot Q = 0. \quad (2.10)$$

Если рассматривать действительные и векторные части этих кватернионов

$$P = p_0 + p, \quad Q = q_0 + q,$$

то равенство (2.10) может быть переписано следующим образом:

$$p_0q_0 + p \cdot q = 0. \quad (2.11)$$

Рассмотрим произвольные ортогональные кватернионы P и Q . Найдем такой кватернион R , при котором выполняется равенство

$$P = RQ.$$

Из этого равенства, учитывая равенство (2.11) следует, что

$$\begin{aligned} R &= PQ^{-1} = \frac{1}{N(Q)} PQ^* = \frac{1}{N(Q)}(p_0 + p)(q_0 - q) = \\ &= \frac{1}{N(Q)}((p_0q_0 + p \cdot q) + (-p_0q + q_0p - p \times q)) = \\ &= \frac{1}{N(Q)}(-p_0q + q_0p - p \times q). \end{aligned}$$

В результате получили формулу

$$R = \frac{1}{N(Q)}(-p_0q + q_0p - p \times q). \quad (2.12)$$

Из формулы (2.12) видно, что кватернион R имеет только векторную часть.

Пример. Рассмотрим кватернионы

$$P = 1 + 2i - j + 4k, \quad Q = 3 - 2i + 3j + k.$$

Эти кватернионы ортогональны, так как

$$P \cdot Q = 0.$$

Используя формулу (2.12), определим кватернион

$$R = \frac{1}{23}(-9i - 10j + 18k).$$

Можно проверить, что этот кватернион удовлетворяет равенству

$$P = RQ.$$

2.9. Векторное произведение кватернионов

Рассмотрим произвольные кватернионы P , Q и R и определим кватернион

$$P \times Q \times R = \begin{vmatrix} 1 & i & j & k \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Кватернион $P \times Q \times R$ называется *векторным произведением кватернионов* P , Q и R , а соответствующая операция называется *векторным умножением кватернионов*. Из этого определения следует, что операция векторного умножения кватернионов имеет следующие свойства.

Свойство 1. Векторное умножение кватернионов кососимметрично, т. е. для произвольных кватернионов P , Q и R выполняется равенство

$$\begin{aligned} P \times Q \times R &= Q \times R \times P = R \times P \times Q = \\ &= -(R \times Q \times P) = -(P \times R \times Q) = -(Q \times P \times R). \end{aligned}$$

Свойство 2. Векторное произведение кватернионов дистрибутивно относительно операции сложения кватернионов, т. е. для произвольных кватернионов P , Q , R и P_1 , P_2 , Q_1 , Q_2 , R_1 , R_2 выполняются равенства:

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2) \times Q \times R &= (P_1 \times Q \times R) + (P_2 \times Q \times R), \\ P \times (Q_1 + Q_2) \times R &= (P \times Q_1 \times R) + (P \times Q_2 \times R), \\ P \times Q \times (R_1 + R_2) &= (P \times Q \times R_1) + (P \times Q \times R_2). \end{aligned}$$

Свойство 3. Векторное произведение кватернионов дистрибутивно относительно операции умножения кватерниона на действительное чис-

ло, т. е. для произвольных кватернионов P, Q, R и действительного числа λ выполняются равенства

$$(\lambda P) \times Q \times R = P \times (\lambda Q) \times R = P \times Q \times (\lambda R) = \lambda(P \times Q \times R).$$

Рассмотрим произвольные кватернионы P, Q и R . Кватернион H называется *ортогональным дополнением кватернионам P, Q и R* при условии, что выполняются равенства

$$P \cdot H = 0, \quad Q \cdot H = 0, \quad R \cdot H = 0,$$

из которых следует, что кватернион H ортогонален кватернионам P, Q и R .

Теорема. Векторное произведение кватернионов ортогонально своим сомножителям.

Доказательство. Рассмотрим произвольные кватернионы P, Q, R и определим кватернион

$$H = P \times Q \times R.$$

Из определения векторного произведения кватернионов следует, что

$$\begin{aligned} P \cdot H &= P \cdot (P \times Q \times R) = \\ &= p_0 \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} - p_1 \begin{vmatrix} p_0 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} + p_2 \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_3 \end{vmatrix} - \\ &\quad - p_3 \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что кватернион P ортогонален кватерниону H . Аналогично можно доказать, что кватернионы Q и R также ортогональны кватерниону H . Следовательно, кватернион H является ортогональным дополнением кватернионам P, Q и R .

Теорема доказана.

Представим векторное произведение кватернионов, используя операции над векторами. Для этой цели рассмотрим произвольные кватернионы

$$P = p_0 + p, \quad Q = q_0 + q, \quad R = r_0 + r.$$

Тогда векторное произведение кватернионов может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{R} = \\
& = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} - \\
& - \mathbf{i} \begin{vmatrix} p_0 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} + \mathbf{j} \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_3 \end{vmatrix} - \mathbf{k} \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} = \\
& = [\mathbf{pqr}] - \mathbf{i}(p_0(q_2r_3 - q_3r_2) - q_0(p_2r_3 - p_3r_2) + r_0(p_2q_3 - p_3q_2)) + \\
& + \mathbf{j}(p_0(q_1r_3 - q_3r_1) - q_0(p_1r_3 - p_3r_1) + r_0(p_1q_3 - p_3q_1)) - \\
& - \mathbf{k}(p_0(q_1r_2 - q_2r_1) - q_0(p_1r_2 - p_2r_1) + r_0(p_1q_2 - p_2q_1)) = \\
& = [\mathbf{pqr}] - p_0(\mathbf{i}(q_2r_3 - q_3r_2) - \mathbf{j}(q_1r_3 - q_3r_1) + \mathbf{k}(q_1r_2 - q_2r_1)) + \\
& + q_0(\mathbf{i}(p_2r_3 - p_3r_2) - \mathbf{j}(p_1r_3 - p_3r_1) + \mathbf{k}(p_1r_2 - p_2r_1)) - \\
& - r_0(\mathbf{i}(p_2q_3 - p_3q_2) - \mathbf{j}(p_1q_3 - p_3q_1) + \mathbf{k}(p_1q_2 - p_2q_1)) = \\
& = [\mathbf{pqr}] - p_0(\mathbf{q} \times \mathbf{r}) + q_0(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - r_0(\mathbf{p} \times \mathbf{q}).
\end{aligned}$$

В результате получили

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{R} = [\mathbf{pqr}] - p_0(\mathbf{q} \times \mathbf{r}) + q_0(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - r_0(\mathbf{p} \times \mathbf{q}), \quad (2.13)$$

где выражение

$$[\mathbf{pqr}] = (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{r})$$

обозначает смешанное произведение векторов.

Пример. Рассмотрим кватернионы

$$\mathbf{P} = 1 + 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$

$$\mathbf{Q} = 3 - 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Определим действительные и векторные части этих кватернионов

$$p_0 = 1, \quad q_0 = 3, \quad r_0 = 0,$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда векторное произведение кватернионов P , Q и R может быть вычислено, используя формулу (2.13), следующим образом:

$$P \times Q \times R =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 11 + 16i + 3j - 10k.$$

Можно проверить, что кватернион $P \times Q \times R$ ортогонален каждому из кватернионов P , Q и R .

2.10. Группа единичных кватернионов

Рассмотрим произвольный ненулевой кватернион

$$Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k.$$

Если норма кватерниона Q удовлетворяет условию

$$N(Q) = 1,$$

то кватернион Q называется *единичным кватернионом*. Очевидно, что модуль единичного кватерниона Q удовлетворяет условию

$$|Q| = \sqrt{N(Q)} = \pm 1.$$

Из определения единичного кватерниона следует, что его координаты удовлетворяют условию

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

Единичные кватернионы имеют следующие свойства.

Свойство 1. Кватернион, сопряженный с единичным кватернионом, также является единичным кватернионом.

Доказательство. Рассмотрим единичный кватернион Q . Найдем норму кватерниона Q^* , сопряженного с единичным кватернионом Q . Получим

$$N(Q^*) = Q^* \cdot Q^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = Q \cdot Q = 1,$$

учитывая, что кватернион Q является единичным. Из этого равенства следует, что кватернион Q^* также единичный.

Свойство доказано.

Свойство 2. Произведение двух единичных кватернионов также является единичным кватернионом.

Доказательство. Рассмотрим произвольные единичные кватернионы P и Q и найдем норму их произведения. Получим

$$N(PQ) = N(P)N(Q) = 1.$$

Из этого следует, что кватернион PQ также является единичным.

Свойство доказано.

Свойство 3. Кватернион 1 является единичным кватернионом.

Доказательство. Очевидно.

Свойство 4. Кватернион, обратный единичному кватерниону, также является единичным.

Доказательство. Рассмотрим произвольный единичный кватернион Q и найдем обратный ему кватернион. Получим

$$Q^{-1} = \frac{1}{N(Q)} Q^* = Q^*. \quad (2.14)$$

Отсюда следует, что кватернион Q^{-1} также будет единичным, так как он равен сопряженному кватерниону Q^* , который является единичным по свойству 1.

Свойство доказано.

Формула (2.14) показывает, как можно вычислить кватернион, обратный единичному кватерниону. Для этого достаточно найти кватернион, сопряженный с этим единичным кватернионом.

Из доказанных свойств следует, что множество единичных кватернионов вместе с операцией умножения образует группу, которая называется *группой единичных кватернионов*.

Пример 1. Найдем кватернион, обратный единичному кватерниону

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}j + \frac{1}{2}k.$$

Используя формулу (2.14), получим

$$Q^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}i - \frac{\sqrt{2}}{4}j - \frac{1}{2}k.$$

Определим структуру единичных кватернионов. Для этого рассмотрим произвольный единичный кватернион

$$Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k.$$

Из определения единичного кватерниона следует, что его координаты удовлетворяют условию

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

Из этого равенства видно, что существует такое действительное число φ , что выполняются следующие условия:

$$\cos \varphi = q_0, \quad \sin \varphi = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

Определим ось

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{i} + n_2 \mathbf{j} + n_3 \mathbf{k},$$

координаты которой находятся по формуле

$$n_i = \frac{q_i}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

для $i \in \{1, 2, 3\}$. Используя эти обозначения, единичный кватернион \mathbf{Q} может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{Q} = \cos \varphi + \sin \varphi \mathbf{n}. \quad (2.15)$$

В дальнейшем будем предполагать, что действительное число φ удовлетворяет условию

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Пример 2. Рассмотрим единичный кватернион

$$\mathbf{Q} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{4} \mathbf{j} + \frac{1}{2} \mathbf{k}.$$

Видно, что в этом случае

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из этих равенств следует, что

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Определим ось

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{k}.$$

Тогда, используя формулу (2.15), единичный кватернион \mathbf{Q} может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \mathbf{n}.$$

2.11. Ортогональные единичные кватернионы

Рассмотрим два ортогональных единичных кватерниона

$$P = p_0 + \mathbf{p}, \quad Q = q_0 + \mathbf{q}$$

и определим такой кватернион R , при котором

$$P = RQ.$$

Используя формулу (2.12) и учитывая, что кватернион Q является единичным, кватернион R может быть определен следующим образом:

$$R = PQ^{-1} = PQ^* = -p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{q}.$$

Отсюда видно, что кватернион R имеет только векторную часть. Кроме того, поскольку кватернионы P и Q^* являются единичными, то кватернион R также является единичным по свойству 2 из раздела 2.10. Следовательно, кватернион R определяет некоторую ось в трехмерном евклидовом пространстве R^3 . Введем следующее обозначение для этой оси:

$$\mathbf{n} = -p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{q}. \quad (2.16)$$

Тогда единичный кватернион R может быть определен следующим образом:

$$R = \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \mathbf{n}.$$

Если рассматривать единичный кватернион R как оператор, действующий на кватернион Q , то можно сказать, что кватернион R описывает поворот вокруг оси \mathbf{n} . Следовательно, единичный кватернион P может быть получен из единичного кватерниона Q , который ортогонален кватерниону P , посредством поворота вокруг оси, координаты которой могут быть найдены при помощи формулы (2.16).

Теорема. Если P , Q и R – единичные взаимно ортогональные кватернионы, то их ортогональное дополнение

$$H = P \times Q \times R$$

также является единичным кватернионом.

Доказательство. Рассмотрим взаимно ортогональные единичные кватернионы P , Q и R . Найдем норму ортогонального дополнения этих кватернионов

$$H = P \times Q \times R.$$

Получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} \cdot \mathbf{H} &= \mathbf{H}^2 = (\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{R})^2 = \\
&= ([\mathbf{pqr}] - p_0(\mathbf{q} \times \mathbf{r}) - q_0(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - r_0(\mathbf{p} \times \mathbf{q}))^2 = \\
&= [\mathbf{pqr}]^2 + p_0^2(\mathbf{q} \times \mathbf{r})^2 + q_0^2(\mathbf{r} \times \mathbf{p})^2 + r_0^2(\mathbf{p} \times \mathbf{q})^2 + \\
&+ 2p_0q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + 2q_0r_0(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) + 2r_0p_0(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{q} \times \mathbf{r}) = \\
&= [\mathbf{pqr}]^2 + p_0^2(q^2r^2 - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})^2) + q_0^2(r^2p^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})^2) + r_0^2(p^2q^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2) + \\
&+ 2p_0q_0((\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})r^2) + 2q_0r_0((\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{q})p^2) + \\
&+ 2r_0p_0((\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})q^2) = [\mathbf{pqr}]^2 + p_0^2((1 - q_0^2)(1 - r_0^2) - q_0^2r_0^2) + \\
&+ q_0^2((1 - q_0^2)(1 - p_0^2) - r_0^2p_0^2) + r_0^2((1 - p_0^2)(1 - q_0^2) - p_0^2q_0^2) + \\
&+ 2p_0q_0(q_0r_0^2p_0 + q_0p_0(1 - r_0^2)) + 2q_0r_0(r_0p_0^2q_0 + r_0q_0(1 - p_0^2)) + \\
&+ 2r_0p_0(p_0q_0^2r_0 + p_0r_0(1 - q_0^2)) = [\mathbf{pqr}]^2 + \\
&+ p_0^2(1 - q_0^2 - r_0^2) + q_0^2(1 - r_0^2 - p_0^2) + r_0^2(1 - p_0^2 - q_0^2) + \\
&+ 2p_0^2q_0^2 + 2q_0^2r_0^2 + 2r_0^2p_0^2 = [\mathbf{pqr}]^2 + p_0^2 + q_0^2 + r_0^2.
\end{aligned}$$

Здесь квадраты в верхних индексах обозначают нормы соответствующих кватернионов и векторов для краткости. Таким образом, получили

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{R}) = [\mathbf{pqr}]^2 + p_0^2 + q_0^2 + r_0^2. \quad (2.17)$$

Кроме того, можно увидеть, что

$$\begin{aligned}
[\mathbf{pqr}]^2 &= \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} & \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} & \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} & \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} & \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} & \mathbf{r} \cdot \mathbf{q} & \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - p_0^2 & -p_0q_0 & -p_0r_0 \\ -q_0p_0 & 1 - q_0^2 & -q_0r_0 \\ -r_0p_0 & -r_0q_0 & 1 - r_0^2 \end{vmatrix} = \\
&= 1 - p_0^2 - q_0^2 - r_0^2.
\end{aligned}$$

Подстановка этого значения в выражение (2.17) дает следующее равенство:

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{R}) = 1,$$

из которого следует, что кватернион \mathbf{H} является единичным.

Теорема доказана.

Рассмотрим ортогональные единичные кватернионы P , Q и R . Из доказанной теоремы следует, что кватернионы P , Q , R и их ортогональное дополнение

$$H = P \times Q \times R$$

образуют ортогональный базис в линейном пространстве H^4 .

Пример. Рассмотрим единичный кватернион

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}j + \frac{1}{2}k$$

и ось

$$n = \frac{2}{3}i - \frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k$$

в трехмерном евклидовом пространстве. Определим единичный кватернион

$$R = n.$$

Теперь найдем единичный кватернион

$$\begin{aligned} P = RQ &= n(q_0 + q) = -(n \cdot q) + q_0 n + n \times q = \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}i - \frac{\sqrt{2}}{3}j + \frac{\sqrt{2}}{6}k + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & 1/2 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{6} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3}\right)i + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{3}\right)j + \frac{\sqrt{2}}{2}k. \end{aligned}$$

Можно проверить, что единичные кватернионы Q и P являются ортогональными.

2.12. Дифференцирование кватернионов по параметру

Произвольное отображение

$$Q: R \rightarrow H^4,$$

которое по элементам описывается как

$$Q: t \mapsto Q(t),$$

называется *параметрическим кватернионом*. Обычно параметрические кватернионы будут обозначаться $P(t)$, $Q(t)$ и $R(t)$, подразумевая, что

$t \in R$. Видно, что параметрический кватернион описывает в пространстве H^4 некоторую кривую, которая будет называться *параметрической кривой* в пространстве кватернионов.

Пример 1. Рассмотрим произвольные кватернионы P и Q . Определим параметрическую кривую

$$R(t) = (1-t)P + tQ,$$

где $t \in R$. Видно, что параметрическая кривая $R(t)$ определяет прямую линию в пространстве кватернионов H^4 , которая проходит через кватернионы P и Q .

Рассмотрим произвольный параметрический кватернион

$$Q(t) = q_0(t) + q(t).$$

Очевидно, что производная по параметру от кватерниона $Q(t)$ определяется следующим образом:

$$Q'(t) = q_0'(t) + q'(t).$$

Производная по параметру от параметрического кватерниона имеет следующие свойства.

Свойство 1. Для любых параметрических кватернионов $P(t)$ и $Q(t)$ выполняется равенство

$$(P(t) + Q(t))' = P'(t) + Q'(t).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные параметрические кватернионы

$$P(t) = p_0(t) + p(t), \quad Q(t) = q_0(t) + q(t).$$

Используя свойства производных от действительных и векторных функций, найдем производную по параметру от их суммы. Получим

$$\begin{aligned} (P(t) + Q(t))' &= ((p_0(t) + q_0(t)) + (p(t) + q(t)))' = \\ &= (p_0(t) + q_0(t))' + (p(t) + q(t))' = (p_0'(t) + q_0'(t)) + (p'(t) + q'(t)) = \\ &= (p_0'(t) + p'(t)) + (q_0'(t) + q'(t)) = P'(t) + Q'(t). \end{aligned}$$

Свойство доказано.

Свойство 2. Для любого параметрического кватерниона $P(t)$ и действительного числа λ выполняется равенство

$$(\lambda P(t))' = \lambda P'(t).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный параметрический кватернион

$$\mathbf{P}(t) = p_0(t) + \mathbf{p}(t)$$

и действительное число λ . Используя свойства производных от действительных и векторных функций, найдем производную по параметру от их произведения. Получим

$$(\lambda \mathbf{P}(t))' = (\lambda p_0(t) + \lambda \mathbf{p}(t))' = \lambda p_0'(t) + \lambda \mathbf{p}'(t) = \lambda(p_0'(t) + \mathbf{p}'(t)) = \lambda \mathbf{P}'(t).$$

Свойство доказано.

Свойство 3. Для любых параметрических кватернионов $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{Q}(t)$ выполняется равенство

$$(\mathbf{P}(t)\mathbf{Q}(t))' = \mathbf{P}'(t)\mathbf{Q}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}'(t).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные параметрические кватернионы

$$\mathbf{P}(t) = p_0(t) + \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{Q}(t) = q_0(t) + \mathbf{q}(t).$$

Используя свойства производных от действительных и векторных функций, найдем производную по параметру от их произведения. Получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}(t)\mathbf{Q}(t))' &= (p_0(t)q_0(t) - \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{q}(t) + p_0(t)\mathbf{q}(t) + q_0(t)\mathbf{p}(t) + \mathbf{p}(t) \times \mathbf{q}(t))' = \\ &= p_0'(t)q_0(t) + p_0(t)q_0'(t) - \mathbf{p}'(t) \cdot \mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{q}'(t) + p_0'(t)\mathbf{q}(t) + \\ &+ p_0(t)\mathbf{q}'(t) + q_0'(t)\mathbf{p}(t) + q_0(t)\mathbf{p}'(t) + \mathbf{p}'(t) \times \mathbf{q}(t) + \mathbf{p}(t) \times \mathbf{q}'(t) = \\ &= (p_0'(t)q_0(t) - \mathbf{p}'(t) \cdot \mathbf{q}(t) + p_0'(t)\mathbf{q}(t) + q_0(t)\mathbf{p}'(t) + \mathbf{p}'(t) \times \mathbf{q}(t)) + \\ &+ (p_0(t)q_0'(t) - \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{q}'(t) + p_0(t)\mathbf{q}'(t) + q_0'(t)\mathbf{p}(t) + \mathbf{p}(t) \times \mathbf{q}'(t)) = \\ &= \mathbf{P}'(t)\mathbf{Q}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}'(t). \end{aligned}$$

Свойство доказано.

Свойство 4. Для любых параметрических кватернионов $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{Q}(t)$ выполняется равенство

$$(\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}(t))' = \mathbf{P}'(t) \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}'(t).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные параметрические кватернионы

$$\mathbf{P}(t) = p_0(t) + \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{Q}(t) = q_0(t) + \mathbf{q}(t).$$

Используя свойства производных от действительных и векторных функций, найдем производную по параметру от их скалярного произведения. Получим

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}(t))' &= (p_0(t)q_0(t) - \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{q}(t))' = \\
&= p_0'(t)q_0(t) + p_0(t)q_0'(t) - \mathbf{p}'(t) \cdot \mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{q}'(t) = \\
&= (p_0'(t)q_0(t) - \mathbf{p}'(t) \cdot \mathbf{q}(t)) + (p_0(t)q_0'(t) - \mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{q}'(t)) = \\
&= \mathbf{P}'(t) \cdot \mathbf{Q}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}'(t).
\end{aligned}$$

Свойство доказано.

Свойство 5. Для любых параметрических кватернионов $\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{Q}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$ выполняется равенство

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{P}(t) \times \mathbf{Q}(t) \times \mathbf{R}(t))' = \\
&= \mathbf{P}'(t) \times \mathbf{Q}(t) \times \mathbf{R}(t) + \mathbf{P}(t) \times \mathbf{Q}'(t) \times \mathbf{R}(t) + \mathbf{P}(t) \times \mathbf{Q}(t) \times \mathbf{R}'(t).
\end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные параметрические кватернионы

$$\mathbf{P}(t) = p_0(t) + \mathbf{p}(t), \quad \mathbf{Q}(t) = q_0(t) + \mathbf{q}(t), \quad \mathbf{R}(t) = r_0(t) + \mathbf{r}(t).$$

Используя свойства производных от действительных и векторных функций, найдем производную по параметру от их векторного произведения. Получим

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{P}(t) \times \mathbf{Q}(t) \times \mathbf{R}(t))' = \\
&= ([\mathbf{p}(t)\mathbf{q}(t)\mathbf{r}(t)] - p_0(t)(\mathbf{q}(t) \times \mathbf{r}(t)) - q_0(t)(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)) - r_0(t)(\mathbf{p}(t) \times \mathbf{q}(t)))' = \\
&= [\mathbf{p}'(t)\mathbf{q}(t)\mathbf{r}(t)] + [\mathbf{p}(t)\mathbf{q}'(t)\mathbf{r}(t)] + [\mathbf{p}(t)\mathbf{q}(t)\mathbf{r}'(t)] - \\
&\quad - p_0'(t)(\mathbf{q}(t) \times \mathbf{r}(t)) - p_0(t)(\mathbf{q}'(t) \times \mathbf{r}(t)) - p_0(t)(\mathbf{q}(t) \times \mathbf{r}'(t)) - \\
&\quad - q_0'(t)(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)) - q_0(t)(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{p}(t)) - q_0(t)(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}'(t)) - \\
&\quad - r_0'(t)(\mathbf{p}(t) \times \mathbf{q}(t)) - r_0(t)(\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{q}(t)) - r_0(t)(\mathbf{p}(t) \times \mathbf{q}'(t)) = \\
&= [\mathbf{p}'(t)\mathbf{q}(t)\mathbf{r}(t)] - p_0'(t)(\mathbf{q}(t) \times \mathbf{r}(t)) - q_0(t)(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}'(t)) - r_0(t)(\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{q}(t))' + \\
&\quad + [\mathbf{p}(t)\mathbf{q}'(t)\mathbf{r}(t)] - p_0(t)(\mathbf{q}'(t) \times \mathbf{r}(t)) - q_0'(t)(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)) - r_0(t)(\mathbf{p}(t) \times \mathbf{q}'(t)) + \\
&\quad + [\mathbf{p}(t)\mathbf{q}(t)\mathbf{r}'(t)] - p_0(t)(\mathbf{q}(t) \times \mathbf{r}'(t)) - q_0(t)(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{p}(t)) - r_0'(t)(\mathbf{p}(t) \times \mathbf{q}(t)) = \\
&= \mathbf{P}'(t) \times \mathbf{Q}(t) \times \mathbf{R}(t) + \mathbf{P}(t) \times \mathbf{Q}'(t) \times \mathbf{R}(t) + \mathbf{P}(t) \times \mathbf{Q}(t) \times \mathbf{R}'(t).
\end{aligned}$$

Свойство доказано.

Из доказанных свойств следует, что производная по параметру от параметрического кватерниона имеет те же свойства, что и производная по параметру от векторной функции.

В геометрических приложениях часто требуется найти от произведения параметрических кватернионов производные более высоких поряд-

ков, чем первый. Следующая теорема дает формулу для вычисления таких производных.

Теорема 1. Для произвольных параметрических кватернионов $P(t)$ и $Q(t)$ справедлива формула

$$(P(t)Q(t))^{(n)} = \sum_{m=0}^n C_n^m P^{(n-m)}(t)Q^{(m)}(t) \quad (2.18)$$

для любых $n \in N$, где

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

обозначают биномиальные коэффициенты.

Доказательство. Докажем формулу (2.18), используя метод математической индукции. Для этой цели рассмотрим произвольные параметрические кватернионы $P(t)$ и $Q(t)$. Видно, что формула (2.18) выполняется при $n=1$ по свойству 3. Предположим, что формула (2.18) также справедлива для некоторого произвольного натурального числа $n-1$, т. е.

$$(P(t)Q(t))^{(n-1)} = \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m P^{(n-1-m)}(t)Q^{(m)}(t). \quad (2.19)$$

Докажем, что в этом случае формула (2.18) также выполняется для натурального числа n . Используя свойство 3 и равенство (2.19), получим

$$\begin{aligned} (P(t)Q(t))^{(n)} &= ((P(t)Q(t))^{(n-1)})' = \left(\sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m P^{(n-1-m)}(t)Q^{(m)}(t) \right)' = \\ &= (C_{n-1}^0 P^{(n-1)}(t)Q(t) + C_{n-1}^1 P^{(n-2)}(t)Q'(t) + \dots \\ &\dots + C_{n-1}^{n-2} P'(t)Q^{(n-2)}(t) + C_{n-1}^{n-1} P(t)Q^{(n-1)}(t))' = \\ &= (C_{n-1}^0 (P^{(n)}(t)Q(t) + P^{(n-1)}(t)Q'(t)) + \\ &+ C_{n-1}^1 (P^{(n-1)}(t)Q'(t) + P^{(n-2)}(t)Q''(t)) + \dots \\ &\dots + C_{n-1}^{n-2} (P''(t)Q^{(n-2)}(t) + P'(t)Q^{(n-1)}(t)) + \\ &+ C_{n-1}^{n-1} (P'(t)Q^{(n-1)}(t) + P(t)Q^{(n)}(t)) = \\ &= C_{n-1}^0 P^{(n)}(t)Q(t) + (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) P^{(n-1)}(t)Q'(t) + \dots \\ &\dots + (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) (P'(t)Q^{(n-1)}(t) + C_{n-1}^{n-1} P(t)Q^{(n)}(t)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_n^0 P^{(n)}(t) Q(t) + C_n^1 P^{(n-2)}(t) Q'(t) + \dots \\
&\dots + C_n^{n-1} P'(t) Q^{(n-1)}(t) + C_n^n P(t) Q^{(n)}(t) = \\
&= \sum_{m=0}^n C_n^m P^{(n-m)}(t) Q^{(m)}(t),
\end{aligned}$$

учитывая, что биномиальные коэффициенты имеют свойство

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

для любых натуральных чисел n и m , удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leq m < n.$$

Теорема доказана.

В геометрических приложениях часто приходится вычислять производные от параметра единичных кватернионов. Рассмотрим единичный параметрический кватернион

$$Q(t) = \cos(\varphi t) + \sin(\varphi t) \mathbf{n}$$

и вычислим его производную по параметру t . Используя формулу (2.2) для вычисления произведения кватернионов, получим

$$\begin{aligned}
Q'(t) &= (\cos(\varphi t) + \sin(\varphi t) \mathbf{n})' = \varphi(-\sin(\varphi t) + \cos(\varphi t) \mathbf{n}) = \\
&= \varphi(-\sin(\varphi t) + \cos(\varphi t) \mathbf{n})(\cos(\varphi t) - \sin(\varphi t) \mathbf{n})(\cos(\varphi t) + \sin(\varphi t) \mathbf{n}) = \\
&= \varphi \mathbf{n}(\cos(\varphi t) + \sin(\varphi t) \mathbf{n}) = \varphi \mathbf{n} Q(t).
\end{aligned}$$

В результате получили формулу

$$Q'(t) = \varphi \mathbf{n} Q(t). \quad (2.20)$$

Найдем вторую производную от единичного параметрического кватерниона $Q(t)$ по параметру t . Используя формулу (2.20), получим

$$Q''(t) = (\varphi \mathbf{n} Q(t))' = \varphi \mathbf{n} Q'(t) = \varphi^2 \mathbf{n} \mathbf{n} Q(t) = -\varphi^2 Q(t).$$

В результате получили формулу

$$Q''(t) = -\varphi^2 Q(t). \quad (2.21)$$

Теорема 2. Для произвольного единичного параметрического кватерниона

$$Q(t) = \cos(\varphi t) + \sin(\varphi t) \mathbf{n}$$

справедливы формулы

$$\mathcal{Q}^{(2n-1)}(t) = (-1)^{n-1} \varphi^{2n-1} n \mathcal{Q}(t), \quad (2.22)$$

$$\mathcal{Q}^{(2n)}(t) = (-1)^n \varphi^{2n} \mathcal{Q}(t) \quad (2.23)$$

для любых $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Докажем формулы (2.22) и (2.23), используя метод математической индукции. Формулы (2.20) и (2.21) показывают, что формулы (2.22) и (2.23) выполняются при $n = 1$.

Предположим, что формулы (2.22) и (2.23) также справедливы для некоторого натурального числа $n - 1$, т. е.

$$\mathcal{Q}^{(2n-3)}(t) = (-1)^{n-2} \varphi^{2n-3} n \mathcal{Q}(t),$$

$$\mathcal{Q}^{(2n-2)}(t) = (-1)^{n-1} \varphi^{2n-2} \mathcal{Q}(t),$$

где $n \geq 2$. Докажем, что в этом случае формулы (2.22) и (2.23) справедливы также и для натуральных чисел n и $n + 1$. Используя формулы (2.20) и (2.21), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{(2n-1)}(t) &= (\mathcal{Q}^{(2n-2)}(t))' = ((-1)^{n-1} \varphi^{2n-2} \mathcal{Q}(t))' = \\ &= (-1)^{n-1} \varphi^{2n-2} \mathcal{Q}'(t) = (-1)^{n-1} \varphi^{2n-1} n \mathcal{Q}(t), \\ \mathcal{Q}^{(2n)}(t) &= (\mathcal{Q}^{(2n-1)}(t))' = ((-1)^{n-1} \varphi^{2n-1} n \mathcal{Q}(t))' = \\ &= (-1)^{n-1} \varphi^{2n-1} n \mathcal{Q}'(t) = (-1)^n \varphi^{2n} \mathcal{Q}(t). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Глава 3

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОВОРОТОВ

В данной главе рассмотрены представления поворотов собственно ортогональными матрицами группы $SO(3, R)$, специальными унитарными матрицами группы $SU(2)$, а также единичными кватернионами. После этого рассмотрены изоморфизмы между этими представлениями. Материал изложен довольно подробно. Дополнительные сведения по данным и смежным вопросам можно найти как в работах [11–20], так и в более специализированных [32–37].

3.1. Матричная группа $SO(3, R)$

Обозначим через $O(3, R)$ множество квадратных матриц третьего порядка, которые удовлетворяют следующему условию:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}, \quad (3.1)$$

где \mathbf{R} – произвольная матрица из множества $O(3, R)$.

Покажем, что множество $O(3, R)$ образует группу. Для этого рассмотрим произвольные матрицы \mathbf{R} и \mathbf{Q} из множества $O(3, R)$. Произведение этих матриц \mathbf{RQ} также принадлежит множеству $O(3, R)$, так как

$$(\mathbf{RQ})^T \mathbf{RQ} = \mathbf{Q}^T (\mathbf{R}^T \mathbf{R}) \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I},$$

учитывая равенство (3.1). Очевидно, что множеству $O(3, R)$ также принадлежит единичная матрица \mathbf{I} , которая является нейтральным элементом относительно операции умножения матриц. Кроме того, для произвольной матрицы $\mathbf{R} \in O(3, R)$ существует обратная матрица \mathbf{R}^{-1} , которая также принадлежит множеству $O(3, R)$, так как

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}^{-1})^T \mathbf{R}^{-1} &= (\mathbf{R}^T)^{-1} \mathbf{R}^{-1} = (\mathbf{R}\mathbf{R}^T)^{-1} = \\ &= ((\mathbf{R}^T \mathbf{R})^T)^{-1} = (\mathbf{I}^T)^{-1} = \mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}, \end{aligned}$$

учитывая равенство (3.1). В результате получили, что множество $O(3, R)$ удовлетворяет всем условиям группы. Следовательно, множество $O(3, R)$ вместе с операцией умножения матриц образует группу, которая называется *ортогональной группой* третьего порядка над полем действительных чисел R и обозначается $O(3, R)$. Элементы группы $O(3, R)$ называются *ортогональными матрицами*. Ортогональные матрицы имеют следующие свойства.

Свойство 1. Произвольная ортогональная матрица R удовлетворяет тождеству

$$RR^T = I.$$

Доказательство. Пусть R – произвольная ортогональная матрица. Тогда, используя равенство (3.1), получим

$$RR^T = (R^T R)^T = I^T = I.$$

Свойство доказано.

Свойство 2. Произвольная ортогональная матрица R удовлетворяет тождеству

$$R^{-1} = R^T.$$

Доказательство. Пусть R – произвольная ортогональная матрица. Тогда, используя равенство (3.1) и свойство 1, получим

$$R^T R = RR^T = I.$$

Из этого равенства следует, что

$$R^{-1} = R^T.$$

Свойство доказано.

Свойство 3. Для произвольной ортогональной матрицы R справедливо равенство

$$\det R = \pm 1.$$

Доказательство. Пусть R – произвольная ортогональная матрица. Тогда, используя равенство (3.1), получим

$$(\det R)^2 = \det R \det R = \det(R^T) \det R = \det(R^T R) = \det I = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\det R = \pm 1.$$

Свойство доказано.

Покажем, что действие ортогональных матриц на векторы сохраняет длины векторов. Для этого рассмотрим произвольный вектор $v \in R^3$, про-

извольную ортогональную матрицу \mathbf{R} и вычислим длину вектора, преобразованного посредством матрицы \mathbf{R} . Получим

$$|\mathbf{R}\mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{R}\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{R}\mathbf{v})} = \sqrt{(\mathbf{R}\mathbf{v})^T \mathbf{R}\mathbf{v}} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{v}} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = |\mathbf{v}|.$$

Отсюда следует, что преобразования, описываемые ортогональными матрицами, сохраняют расстояния между точками в евклидовом аффинном пространстве E^3 .

Обозначим через $SO(3, R)$ подмножество ортогональных матриц из множества $O(3, R)$, которые имеют следующее свойство:

$$\det \mathbf{R} = 1. \quad (3.2)$$

Покажем, что множество $SO(3, R)$ образует подгруппу группы $O(3, R)$. Для этого рассмотрим произвольные матрицы \mathbf{R} и \mathbf{Q} из множества $SO(3, R)$. Произведение этих матриц $\mathbf{R}\mathbf{Q}$ также принадлежит множеству $SO(3, R)$, так как

$$\det(\mathbf{R}\mathbf{Q}) = \det \mathbf{R} \det \mathbf{Q} = 1.$$

Очевидно, что множество $SO(3, R)$ содержит единичную матрицу \mathbf{I} , являющуюся нейтральным элементом относительно операции умножения матриц. Кроме того, для любой матрицы \mathbf{R} из множества $SO(3, R)$ существует обратная матрица \mathbf{R}^{-1} , которая также принадлежит множеству $SO(3, R)$, так как

$$\det \mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{R}} = 1.$$

В результате получили, что множество $SO(3, R)$ вместе с операцией умножения матриц образует подгруппу группы $O(3, R)$. Эта подгруппа называется *специальной ортогональной группой* третьего порядка над полем действительных чисел R и обозначается через $SO(3, R)$. Элементы группы $SO(3, R)$ называются *собственно ортогональными матрицами*.

Пример. Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

и, кроме того,

$$\det \mathbf{R} = 1.$$

Следовательно, матрица \mathbf{R} является собственно ортогональной.

3.2. Автоморфизмы сферы

Рассмотрим сферу S^2 в евклидовом аффинном пространстве E^3 , которая описана каноническим уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

относительно некоторой ортонормированной системы координат. Используя матричную нотацию, это уравнение может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{S} \mathbf{p} = r^2, \quad (3.3)$$

где \mathbf{p} обозначает радиус-вектор произвольной точки $P \in E^3$, а \mathbf{S} – матрицу квадратичной формы

$$\mathbf{S}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

которая, очевидно, имеет следующую структуру:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Геометрическое преобразование сферы саму в себя называется *автоморфизмом сферы*.

Ортогональным поворотом называется линейное преобразование

$$\rho: E^3 \rightarrow E^3,$$

которое удовлетворяет условию

$$\rho(S^2) = S^2.$$

Это значит, что точки, лежащие на сфере S^2 , под действием ортогонального поворота ρ преобразуются также в точки, лежащие на сфере S^2 . Из

определения ортогонального поворота следует, что ортогональные повороты – это линейные автоморфизмы сферы S^2 .

Обозначим через R матрицу ортогонального поворота p относительно рассматриваемой системы координат. Тогда из определения ортогонального поворота следует, что

$$p^T Sp = (Rp)^T S(Rp)$$

для любой точки $P \in S^2$. Преобразуем это равенство следующим образом:

$$p^T Sp = p^T (R^T SR)p.$$

Так как радиус-вектор p был выбран произвольно, то из полученного равенства следует, что

$$S = R^T SR.$$

Принимая во внимание структуру матрицы S , из последнего равенства следует, что

$$I = R^T R.$$

Если к тому же матрица поворота удовлетворяет условию

$$\det R = 1,$$

то ортогональный поворот будет называться *собственным ортогональным поворотом*.

В результате получили, что ортогональные повороты представляются ортогональными матрицами группы O^3 , а собственно ортогональные повороты – собственно ортогональными матрицами группы $SO(3, R)$. Отсюда следует, что ортогональные повороты сохраняют длину векторов в евклидовом векторном пространстве R^3 и, следовательно, расстояние между точками в евклидовом аффинном пространстве E^3 . Заметим, что из сохранения длины векторов следует сохранение ортогональными поворотами также и углов между векторами.

Так как в дальнейшем будут рассматриваться только собственно ортогональные повороты, то такие повороты будут также часто называться просто *поворотами*.

3.3. Геометрическое построение поворота

Из определения поворота следует, что это такое геометрическое преобразование, которое поворачивает евклидово аффинное пространство E^3 вокруг линии, проходящей через начало системы координат.

Найдем векторное выражение для представления поворота. Для этого рассмотрим произвольную прямую L , проходящую через начало системы координат O , и возьмем произвольную точку P из пространства E^3 . Пусть Q обозначает точку, которая получена из точки P путем ее поворота на угол φ вокруг прямой L . Для нахождения векторного представления этого поворота выберем некоторую ортонормированную систему координат (O, x, y, z) , начало которой O лежит на прямой L . Обозначим через n единичный осевой вектор, направленный вдоль прямой L . Пусть p и q обозначают радиус-векторы точек P и Q соответственно.

Для того чтобы найти соотношение между координатами точек P и Q , определим новую ортонормированную систему координат (O, l, m, n) , оси которой направлены следующим образом. Ось l направлена вдоль ортогональной проекции вектора p на плоскость, перпендикулярную единичному вектору n и проходящую через начало координат O , а ось m определена следующим образом:

$$m = n \times l. \quad (3.4)$$

Построение системы координат (O, l, m, n) проиллюстрировано на рис. 3.1.

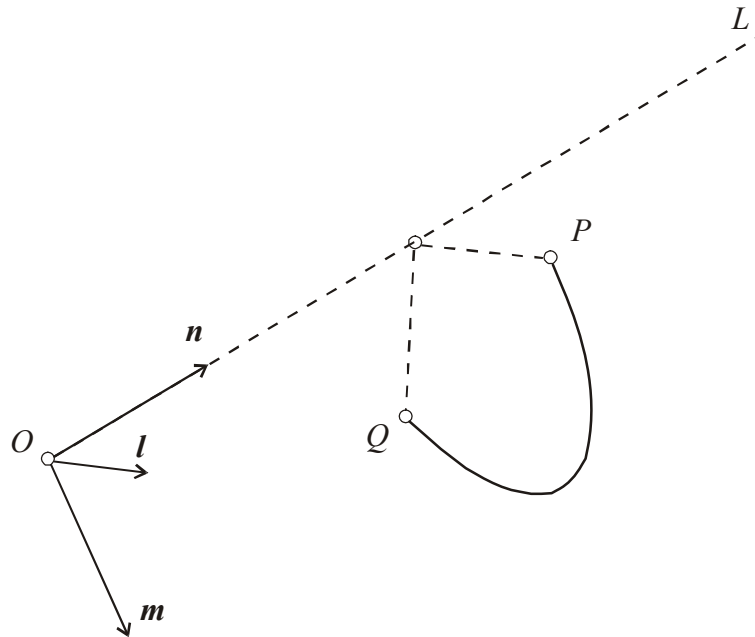


Рис. 3.1. Геометрическое построение поворота

Теперь представим радиус-вектор p как сумму его проекций на оси n и l следующим образом:

$$p = (p \cdot n)n + (p \cdot l)l. \quad (3.5)$$

Определим вектор

$$\mathbf{r} = \cos \varphi \mathbf{l} + \sin \varphi \mathbf{m}. \quad (3.6)$$

Видно, что вектор \mathbf{r} – это единичный вектор, который получен поворотом вектора \mathbf{l} вокруг оси \mathbf{n} на угол φ . Тогда радиус-вектор \mathbf{q} можно представить как сумму его проекций на оси \mathbf{n} и \mathbf{r} следующим образом:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}. \quad (3.7)$$

Так как повороты сохраняют длину векторов и углы между векторами, то из сравнения равенств (3.5) и (3.7) следует, что

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{l}.$$

Подстановка этих значений в равенство (3.7) дает следующее равенство:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{l})\mathbf{r}. \quad (3.8)$$

Кроме того, из равенства (3.5) следует, что

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{l})\mathbf{l} = \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (3.9)$$

Теперь преобразуем равенство (3.8), используя равенства (3.4), (3.6) и (3.9). Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{l})(\cos \varphi \mathbf{l} + \sin \varphi \mathbf{m}) = \\ &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \varphi (\mathbf{p} \cdot \mathbf{l})\mathbf{l} + \sin \varphi (\mathbf{p} \cdot \mathbf{l})\mathbf{m} = \\ &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \varphi (\mathbf{p} \cdot \mathbf{l})\mathbf{l} + \sin \varphi (\mathbf{p} \cdot \mathbf{l})(\mathbf{n} \times \mathbf{l}) = \\ &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \varphi (\mathbf{p} \cdot \mathbf{l})\mathbf{l} + \sin \varphi (\mathbf{n} \times (\mathbf{p} \cdot \mathbf{l})\mathbf{l}) = \\ &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \varphi (\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) + \sin \varphi (\mathbf{n} \times (\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n})) = \\ &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \varphi (\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) + \sin \varphi (\mathbf{n} \times \mathbf{p}). \end{aligned}$$

Таким образом, в результате получили, что поворот на угол φ вокруг прямой L , используя операции векторной алгебры, описывается следующим образом:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \varphi (\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) + \sin \varphi (\mathbf{n} \times \mathbf{p}). \quad (3.10)$$

3.4. Представление поворотов матрицами группы $SO(3, R)$

Определим структуру собственно ортогональной матрицы, которая описывает поворот. Для этого рассмотрим векторное преобразование, заданное формулой (3.10). Чтобы представить это преобразование в матричном виде, определим следующие матрицы:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь, принимая во внимание, что

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{M}\mathbf{p}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{p},$$

равенство (3.10) может быть переписано, используя введенные матрицы \mathbf{M} и \mathbf{N} , следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{M}\mathbf{p} + \cos \varphi (\mathbf{p} - \mathbf{M}\mathbf{p}) + \sin \varphi \mathbf{K}\mathbf{p} = \mathbf{M}\mathbf{p} + \cos \varphi (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathbf{p} + \sin \varphi \mathbf{K}\mathbf{p} = \\ &= (\mathbf{M} + \cos \varphi (\mathbf{I} - \mathbf{M}) + \sin \varphi \mathbf{K})\mathbf{p}. \end{aligned}$$

Определим матрицу

$$\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) = \mathbf{M} + \cos \varphi (\mathbf{I} - \mathbf{M}) + \sin \varphi \mathbf{K}.$$

Из этого равенства следует, что матрица $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) = \\ &= \begin{bmatrix} n_1^2 + (1 - n_1^2) \cos \varphi & n_1 n_2 \operatorname{vers} \varphi - n_3 \sin \varphi & n_1 n_3 \operatorname{vers} \varphi + n_2 \sin \varphi \\ n_2 n_1 \operatorname{vers} \varphi + n_3 \sin \varphi & n_2^2 + (1 - n_2^2) \cos \varphi & n_2 n_3 \operatorname{vers} \varphi - n_1 \sin \varphi \\ n_3 n_1 \operatorname{vers} \varphi - n_2 \sin \varphi & n_3 n_2 \operatorname{vers} \varphi + n_1 \sin \varphi & n_3^2 + (1 - n_3^2) \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (3.11) \end{aligned}$$

где используется следующее обозначение:

$$\operatorname{vers} \varphi = 1 - \cos \varphi.$$

Определенная выше матрица $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ является координатным представлением поворота вокруг оси \mathbf{n} на угол φ относительно ортонормированной системы координат $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Из формулы (3.11) следует, что повороты вокруг координатных осей \mathbf{x} , \mathbf{y} и \mathbf{z} на углы α , β и γ соответственно описываются следующими матрицами:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{x}, \alpha) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}(\mathbf{y}, \beta) &= \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}(z, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Покажем, что матрица поворота $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ является собственно ортогональной. Видно, что матрицы \mathbf{M} и \mathbf{N} удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^T \mathbf{M} &= \mathbf{M}, \\ \mathbf{M}^T \mathbf{K} &= \mathbf{K}^T \mathbf{M} = 0, \\ \mathbf{K}^T \mathbf{K} &= \mathbf{I} - \mathbf{M}. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T(\mathbf{n}, \varphi) \mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) &= \\ &= (\mathbf{M} + \cos \varphi (\mathbf{I} - \mathbf{M}) + \sin \varphi \mathbf{K})^T (\mathbf{M} + \cos \varphi (\mathbf{I} - \mathbf{M}) + \sin \varphi \mathbf{K}) = \\ &= \mathbf{M}^T \mathbf{M} + \cos \varphi (\mathbf{M} - \mathbf{M}^T \mathbf{M}) + \sin \varphi \mathbf{M}^T \mathbf{K} + \\ &+ \cos \varphi (\mathbf{M} - \mathbf{M}^T \mathbf{M}) + \cos^2 \varphi (\mathbf{I} - 2\mathbf{M} + \mathbf{M}^T \mathbf{M}) + \sin \varphi \cos \varphi (\mathbf{K} - \mathbf{M}^T \mathbf{K}) + \\ &+ \sin \varphi \mathbf{K}^T \mathbf{M} + \sin \varphi \cos \varphi (\mathbf{K} - \mathbf{K}^T \mathbf{M}) + \sin^2 \varphi \mathbf{K}^T \mathbf{K} = \\ &= \mathbf{M} + \cos^2 \varphi (\mathbf{I} - \mathbf{M}) + \sin^2 \varphi (\mathbf{I} - \mathbf{M}) = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

В результате доказали, что матрица $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ является ортогональной. Кроме того,

$$\det \mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) = 1,$$

так как систему координат в евклидовом аффинном пространстве всегда можно выбрать так, что прямая, вокруг которой выполняется поворот, будет совпадать с осью z этой системы координат. Легко вычислить, что в этом случае

$$\mathbf{R}(z, \gamma) = 1.$$

Но определитель матрицы геометрического преобразования не зависит от выбора системы координат, относительно которой описано это геометрическое преобразование. Следовательно, определитель любой матрицы поворота также равен 1. Получили, что матрицы поворота являются собственно ортогональными, т. е. принадлежат матричной группе $SO(3, R)$.

Решим обратную задачу, т. е. найдем ось \mathbf{n} и угол φ поворота, который представлен некоторой ортогональной матрицей

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}.$$

Для решения этой задачи рассмотрим формулу (3.11), которая описывает структуру собственно ортогональной матрицы $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$. Сравнивая элементы матриц \mathbf{R} и $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$, получим следующее выражение для определения угла φ :

$$\varphi = \arctan 2(\sin \varphi, \cos \varphi), \quad (3.12)$$

где

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{(r_{21} - r_{12})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{32} - r_{23})^2}}{2}, \quad (3.13)$$

$$\cos \varphi = \frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}. \quad (3.14)$$

Тогда координаты оси \mathbf{n} могут быть определены следующим образом:

$$n_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{2 \sin \varphi}, \quad n_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{2 \sin \varphi}, \quad n_3 = \frac{r_{21} - r_{12}}{2 \sin \varphi} \quad (3.15)$$

при условии, что

$$\varphi \neq 0, \quad \varphi \neq \pi.$$

Иначе координаты оси \mathbf{n} определяются следующим образом:

$$n_1 = \sqrt{\frac{r_{11} + 1}{2}}, \quad n_2 = \sqrt{\frac{r_{22} + 1}{2}}, \quad n_3 = \sqrt{\frac{r_{33} + 1}{2}}. \quad (3.16)$$

Пример. Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

которая, как было показано в примере 3.1, является собственно ортогональной. Найдем ось и угол поворота, который представляет эта матрица. Сначала, используя формулы (3.12)–(3.14), найдем угол поворота, получим

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Теперь, используя формулы (3.16), найдем координаты оси поворота, получим

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 1.$$

Этот же результат можно было бы получить, если заметить, что структура матрицы \mathbf{R} совпадает со структурой матрицы $\mathbf{R}(z, \gamma)$, которая описывает поворот вокруг оси координат z .

3.5. Собственные векторы и значения поворотов

Рассмотрим некоторый поворот, представленный собственно ортогональной матрицей $\mathbf{R}(n, \varphi)$ относительно некоторой ортонормированной системы координат. Предположим, что угол этого поворота удовлетворяет условию

$$\varphi \neq 0 + 2k\pi \quad (3.17)$$

при $k \in \mathbb{N}$. Для того чтобы упростить дальнейшие вычисления, определим такую новую ортонормированную систему координат (O, x, y, z) , ось z которой совпадает с осью n поворота $\mathbf{R}(n, \varphi)$. В разделе 3.4 было показано, что в этом случае матрица рассматриваемого поворота относительно новой системы координат (O, x, y, z) имеет следующую структуру:

$$\mathbf{R}(z, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как собственные векторы и собственные значения геометрического преобразования инвариантны относительно выбора системы координат, относительно которой описано это геометрическое преобразование, то собственные векторы и собственные значения матрицы $\mathbf{R}(z, \varphi)$ совпадают с собственными векторами и собственными значениями матрицы $\mathbf{R}(n, \varphi)$. Однако следует учитывать, что координаты этих векторов определены относительно разных систем координат. Собственные значения матрицы $\mathbf{R}(z, \varphi)$ могут быть найдены из следующего характеристического уравнения:

$$\det(\mathbf{R}(z, \varphi) - \lambda I) = 0,$$

которое эквивалентно равенству

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi - \lambda & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, это равенство может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)(\cos \varphi - \lambda)^2 + (1 - \lambda)\sin^2 \varphi &= \\ &= (1 - \lambda)((\cos \varphi - \lambda)^2 + \sin^2 \varphi) = \\ &= (1 - \lambda)(\cos^2 \varphi - 2\lambda \cos \varphi + \lambda^2 + \sin^2 \varphi) = \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1) = 0. \end{aligned}$$

В результате получили кубическое уравнение относительно переменной λ . Это кубическое уравнение имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \cos \varphi \pm \sqrt{\cos^2 \varphi - 1} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi.$$

Это значит, что матрица $\mathbf{R}(z, \varphi)$ имеет только одно действительное собственное значение λ_1 , которое равно единице. Тогда собственный вектор \mathbf{v} , соответствующий собственному значению λ_1 , может быть определен из следующего уравнения:

$$\mathbf{R}(z, \varphi)\mathbf{v} = \mathbf{v},$$

которое может быть переписано по координатам следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Это равенство эквивалентно следующей системе трех уравнений:

$$\begin{aligned} v_1(\cos \varphi - 1) + v_2 \sin \varphi &= 0, \\ -v_1 \sin \varphi + v_2(\cos \varphi - 1) &= 0, \\ v_3 &= v_3. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Первые два уравнения из этой системы

$$\begin{aligned} v_1(\cos \varphi - 1) + v_2 \sin \varphi &= 0, \\ -v_1 \sin \varphi + v_2(\cos \varphi - 1) &= 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

имеют ненулевое решение относительно переменных v_1 и v_2 только в том случае, если выполняется условие

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi - 1 & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, это условие можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & (\cos \varphi - 1)^2 + \sin^2 \varphi = \\ & = \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi + 1 + \sin^2 \varphi = \\ & = 2(1 - \cos \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Из полученного равенства следует, что равенства (3.19) имеют ненулевое решение только при условии, если

$$1 - \cos \varphi = 0,$$

которое эквивалентно условию

$$\varphi = 0 \pm 2k\pi$$

при $k \in \mathbb{N}$. Но полученное равенство противоречит предположению, которое задано неравенством (3.17). Следовательно, равенства (3.19) имеют только нулевое решение, отсюда следует, что равенства (3.18) имеют следующее нормализованное решение:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 1,$$

которое может быть записано, используя векторные обозначения, как

$$\mathbf{v} = \mathbf{z}.$$

В результате получили, что ось \mathbf{z} является единственным нормализованным собственным вектором поворота, представленного собственно ортогональной матрицей $\mathbf{R}(\mathbf{z}, \varphi)$. Следовательно, поворот, представленный собственно ортогональной матрицей $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$, также имеет единственный нормализованный собственный вектор, который совпадает с осью \mathbf{n} .

Принимая во внимание геометрический смысл собственных векторов и соответствующих им собственных значений, можно сказать следующее. Так как собственное значение λ_1 , соответствующее собственному вектору \mathbf{n} , равно единице, то поворот, представленный собственно ортогональной матрицей $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$, оставляет неподвижными все точки, которые лежат на прямой, проходящей через начало системы координат, и направляющим вектором которой является ось поворота \mathbf{n} .

3.6. Матричная группа $SU(2)$

Обозначим через $SU(2)$ множество комплексных матриц второго порядка, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

$$UU^* = I, \quad \det U = 1. \quad (3.20)$$

Здесь U^* обозначает матрицу, сопряженную матрице U , т. е.

$$U^* = \bar{U}^T,$$

где элементы матрицы \bar{U} комплексно сопряжены с элементами матрицы U .

По аналогии с матричной группой $SO(3, R)$ можно показать, что матрицы из множества $SU(2)$ образуют группу. Эта группа называется *специальной унитарной группой* второго порядка и обозначается $SU(2)$, а элементы этой группы называются *специальными унитарными матрицами*. Из условий (3.20) следует, что обратная матрица для специальной унитарной матрицы равна сопряженной ей матрице, т. е.

$$U^{-1} = U^*.$$

Найдем структуру матриц, принадлежащих группе $SU(2)$. Для этой цели рассмотрим произвольную матрицу

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix},$$

принадлежащую группе $SU(2)$. Тогда комплексно сопряженная матрица U^* имеет следующие элементы:

$$U^* = \begin{bmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{21} \\ \bar{u}_{12} & \bar{u}_{22} \end{bmatrix},$$

где черта над элементом обозначает сопряженное комплексное число. Подстановка этих матриц в равенства (3.20) дает следующие матричные равенства:

$$\begin{bmatrix} u_{11}\bar{u}_{11} + u_{12}\bar{u}_{12} & u_{11}\bar{u}_{21} + u_{12}\bar{u}_{22} \\ u_{21}\bar{u}_{11} + u_{22}\bar{u}_{12} & u_{21}\bar{u}_{21} + u_{22}\bar{u}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

$$u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} = 1. \quad (3.22)$$

Равенство (3.21) эквивалентно следующей системе действительных равенств:

$$u_{11}\bar{u}_{11} + u_{12}\bar{u}_{12} = 1, \quad (3.23)$$

$$\frac{u_{11}}{u_{12}} = -\frac{\bar{u}_{22}}{\bar{u}_{21}}, \quad (3.24)$$

$$\frac{u_{21}}{u_{22}} = -\frac{\bar{u}_{12}}{\bar{u}_{11}}, \quad (3.25)$$

$$u_{21}\bar{u}_{21} + u_{22}\bar{u}_{22} = 1. \quad (3.26)$$

Теперь преобразуем равенство (3.22), используя полученные равенства (3.23) и (3.25), следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} &= \left(u_{11} - u_{12} \frac{u_{21}}{u_{22}} \right) u_{22} = \left(u_{11} - u_{12} \frac{\bar{u}_{12}}{\bar{u}_{11}} \right) u_{22} = \\ &= (u_{11}\bar{u}_{11} + u_{12}\bar{u}_{12}) \frac{u_{22}}{\bar{u}_{11}} = \frac{u_{22}}{\bar{u}_{11}} = 1. \end{aligned}$$

Из этого равенства следует, что

$$u_{22} = \bar{u}_{11}. \quad (3.27)$$

Аналогично, используя равенства (3.24) и (3.26), из равенства (3.22) получим, что

$$\begin{aligned} u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} &= \left(\frac{u_{11}}{u_{12}} u_{22} - u_{21} \right) u_{12} = \left(-\frac{\bar{u}_{22}}{\bar{u}_{21}} u_{22} - u_{21} \right) u_{12} = \\ &= -(u_{22}\bar{u}_{22} + u_{21}\bar{u}_{21}) \frac{u_{12}}{\bar{u}_{21}} = -\frac{u_{12}}{\bar{u}_{21}} = 1 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$u_{12} = -\bar{u}_{21}. \quad (3.28)$$

Введем следующие обозначения:

$$u = u_{11}, \quad v = u_{12}.$$

Тогда, используя эти обозначения, из равенств (3.27) и (3.28) следует, что любая матрица группы $SU(2)$ имеет следующую структуру:

$$U = \begin{bmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{bmatrix},$$

где u и v – комплексные числа, которые удовлетворяют условию

$$u\bar{u} + v\bar{v} = 1. \quad (3.29)$$

Отсюда также следует, что сопряженная матрица U^* имеет следующую структуру:

$$U^* = \begin{bmatrix} \bar{u} & -v \\ \bar{v} & u \end{bmatrix}.$$

Пример. Рассмотрим комплексную матрицу

$$U = \begin{bmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} - i\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} - i\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Видно, что условие, заданное равенством (3.29), выполняется, так как

$$u\bar{u} + v\bar{v} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

Следовательно, матрица U является специальной унитарной матрицей и принадлежит группе $SU(2)$.

3.7. Спин матрицы Паули

Пусть H^3 обозначает множество комплексных матриц второго порядка, которые имеют следующую структуру:

$$P = \begin{bmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{bmatrix},$$

где p_1 , p_2 и p_3 – произвольные действительные числа. Из этого определения видно, что любая матрица $P \in H^3$ удовлетворяет двум условиям

$$P = P^*, \quad \text{tr } P = 0,$$

т. е. множество H^3 содержит эрмитовы или самосопряженные матрицы, след которых равен нулю. Сложение двух матриц из H^3 и умножение матрицы из H^3 на действительное число дает матрицу из H^3 , так как

$$\begin{aligned} P + Q &= \begin{bmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_3 & q_1 - iq_2 \\ q_1 + iq_2 & -q_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} p_3 + q_3 & (p_1 + q_1) - i(p_2 + q_2) \\ (p_1 + q_1) + i(p_2 + q_2) & -(p_3 + q_3) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\lambda \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda p_3 & \lambda p_1 - i\lambda p_2 \\ \lambda p_1 + i\lambda p_2 & -\lambda p_3 \end{bmatrix}$$

для любых матриц $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in H^3$ и действительного числа λ . Следовательно, множество H^3 вместе с операциями сложения матриц и умножения матрицы на действительное число образует линейное пространство.

Покажем, что линейное пространство H^3 является трехмерным. Для этого рассмотрим следующие матрицы:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

которые называются *спин матрицами Паули*. Видно, что спин матрицы Паули принадлежат линейному пространству H^3 и, кроме того, любая матрица $\mathbf{P} \in H^3$ может быть представлена линейной комбинацией спин матриц Паули:

$$\mathbf{P} = p_1 \sigma_1 + p_2 \sigma_2 + p_3 \sigma_3.$$

Таким образом, спин матрицы Паули образуют базис линейного пространства H^3 . Следовательно, линейное пространство H^3 является трехмерным.

3.8. Представление поворотов матрицами группы $SU(2)$

Определим изоморфизм между евклидовым аффинным пространством E^3 и линейным пространством H^3 . Для этой цели определим отображение

$$f: E^3 \rightarrow H^3,$$

которое по элементам задается следующим образом:

$$f(x, y, z) = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3, \quad (3.30)$$

где (x, y, z) – координаты произвольной точки $P \in E^3$ относительно некоторой системы координат. Из этого определения следует, что любая точка $P \in E^3$ с координатами (x, y, z) отображается в следующую матрицу

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix}$$

из линейного пространства H^3 . Очевидно, что введенное отображение f является изоморфизмом между пространствами E^3 и H^3 .

Возьмем произвольные матрицы $U \in SU(2)$ и $P \in H^3$. Покажем, что матрица

$$\tilde{P} = U^* P U \quad (3.31)$$

также принадлежит множеству H^3 . Так как обратная матрица U^{-1} совпадает с сопряженной матрицей U^* , то матрица \tilde{P} имеет те же собственные значения, что и матрица P . Поэтому след матрицы \tilde{P} удовлетворяет условию

$$\text{tr} \tilde{P} = \text{tr} P = 0.$$

Теперь покажем, что матрица \tilde{P} , так же как и матрица P , является самосопряженной

$$\tilde{P}^* = (U^* P U)^* = U^* P^* (U^*)^* = U^* P U = \tilde{P}.$$

Так как

$$\det U = 1,$$

то преобразование, заданное равенством (3.31), сохраняет определитель матрицы P , т. е.

$$\det \tilde{P} = \det P. \quad (3.32)$$

Следовательно, матрица \tilde{P} также принадлежит множеству H^3 . Поэтому матрица \tilde{P} определяет некоторую точку $\tilde{P} \in E^3$, которая получается из точки P посредством преобразования, заданного равенством (3.31).

Равенство (3.32) можно переписать по элементам следующим образом:

$$-(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2) = -(x^2 + y^2 + z^2),$$

где вектор $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ обозначает координаты точки \tilde{P} . Из этого равенства следует, что преобразование, заданное равенством (3.31), сохраняет расстояние между точками в пространстве E^3 . Отсюда следует, что каждая специальная унитарная матрица из группы $SU(2)$ соответствует некоторому мультипликативному преобразованию точек из пространства E^3 , которое сохраняет расстояния между точками. Поэтому каждая специальная унитарная матрица из группы $SU(2)$ представляет некоторый поворот евклидова аффинного пространства E^3 .

3.9. Параметры Кэли – Клейна

Рассмотрим всевозможные произведения спин матриц Паули:

$$\begin{aligned}\sigma_1\sigma_1 &= \sigma_2\sigma_2 = \sigma_3\sigma_3 = \mathbf{I}, \\ \sigma_1\sigma_2 &= -\sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3, \\ \sigma_2\sigma_3 &= -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \\ \sigma_3\sigma_1 &= -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2,\end{aligned}\tag{3.33}$$

где \mathbf{I} обозначает единичную матрицу. Теперь возьмем произвольную специальную унитарную матрицу второго порядка

$$U = \begin{bmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{bmatrix}$$

и сопряженную ей матрицу

$$U^* = \begin{bmatrix} \bar{u} & -v \\ \bar{v} & u \end{bmatrix}.$$

Введем для действительной и мнимой частей комплексных чисел u и v следующие обозначения:

$$u = q_0 + iq_3, \quad v = q_2 + iq_1.$$

Тогда сопряженные им комплексные числа имеют следующую структуру:

$$\bar{u} = q_0 - iq_3, \quad \bar{v} = q_2 - iq_1.$$

Так как

$$\det U = u\bar{u} + v\bar{v} = 1,$$

то введенные действительные числа q_0 , q_1 , q_2 и q_3 удовлетворяют следующему условию:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.\tag{3.34}$$

Используя введенные обозначения, специальные унитарные матрицы U и U^* могут быть представлены следующими линейными комбинациями спин матриц Паули:

$$U = q_0\mathbf{I} + q_1i\sigma_1 + q_2i\sigma_2 + q_3i\sigma_3,\tag{3.35}$$

$$U^* = q_0\mathbf{I} - q_1i\sigma_1 - q_2i\sigma_2 - q_3i\sigma_3.\tag{3.36}$$

Следовательно, матрицы \mathbf{I} , $i\sigma_1$, $i\sigma_2$ и $i\sigma_3$ образуют базис группы $SU(2)$, так как U – произвольная матрица из группы $SU(2)$. В этом случае действительные числа q_0 , q_1 , q_2 и q_3 могут рассматриваться как ко-

ординаты матрицы U в этом базисе. Так как матрица U представляет некоторый поворот в E^3 , то комплексные числа u и v также называются параметрами поворота или *параметрами Кэли – Клейна* (Cayley – Klein). В общем случае любые комплексные числа u и v , которые удовлетворяют равенству (3.34), определяют некоторую специальную матрицу из группы $SU(2)$. В свою очередь из равенства (3.35) следует, что специальная унитарная матрица U , которая задается параметрами Кэли – Клейна, имеет следующую структуру:

$$U = \begin{bmatrix} q_0 + iq_3 & q_2 + iq_1 \\ -q_2 + iq_1 & q_0 - iq_3 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что параметры Кэли – Клейна можно найти из специальной унитарной матрицы

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix},$$

используя следующие соотношения:

$$q_0 = \frac{u_{11} + u_{22}}{2}, \quad q_1 = \frac{u_{12} + u_{21}}{2i}, \quad q_2 = \frac{u_{12} - u_{21}}{2}, \quad q_3 = \frac{u_{11} - u_{22}}{2i}. \quad (3.37)$$

Пример. Рассмотрим специальную унитарную матрицу

$$U = \begin{bmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} - i\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} - i\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

которая была рассмотрена в примере из раздела 3.6. Используя формулу (3.37), найдем параметры Кэли – Клейна. Получим

$$q_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad q_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad q_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad q_3 = -\frac{1}{2}.$$

3.10. Гомоморфизм между группами $SU(2)$ и $SO(3, R)$

Так как матрицы из групп $SO(3, R)$ и $SU(2)$ представляют повороты в трехмерном евклидовом аффинном пространстве, то между ними существует некоторое соответствие. Чтобы найти это соответствие, рассмотрим произвольную собственно ортогональную матрицу

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

из группы $SO(3, R)$ и произвольную специальную унитарную матрицу

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} q_0 + iq_3 & q_2 + iq_1 \\ -q_2 + iq_1 & q_0 - iq_3 \end{bmatrix}$$

из группы $SU(2)$. Обозначим через \mathbf{p} радиус-вектор произвольной точки $P \in E^3$. Тогда радиус-вектор точки, в которую преобразуется точка P при повороте, заданном матрицей \mathbf{R} , определяется следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{R}\mathbf{p}.$$

Перепишем это равенство по координатам. Получим

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= r_{11}x + r_{12}y + r_{13}z, \\ \tilde{y} &= r_{21}x + r_{22}y + r_{23}z, \\ \tilde{z} &= r_{31}x + r_{32}y + r_{33}z. \end{aligned} \tag{3.38}$$

С другой стороны, произвольная матрица

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix}$$

из линейного пространства H^3 может быть преобразована посредством специальной унитарной матрицы \mathbf{U} следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{U}^* \mathbf{P} \mathbf{U}.$$

Также перепишем это равенство по координатам, получим

$$\tilde{x}\sigma_1 + \tilde{y}\sigma_2 + \tilde{z}\sigma_3 = x\mathbf{U}^*\sigma_1\mathbf{U} + y\mathbf{U}^*\sigma_2\mathbf{U} + z\mathbf{U}^*\sigma_3\mathbf{U}. \tag{3.39}$$

Подстановка равенств (3.38) в равенство (3.39) дает следующее равенство:

$$\begin{aligned} (r_{11}x + r_{12}y + r_{13}z)\sigma_1 + (r_{21}x + r_{22}y + r_{23}z)\sigma_2 + (r_{31}x + r_{32}y + r_{33}z)\sigma_3 = \\ = x\mathbf{U}^*\sigma_1\mathbf{U} + y\mathbf{U}^*\sigma_2\mathbf{U} + z\mathbf{U}^*\sigma_3\mathbf{U}, \end{aligned}$$

которое в свою очередь эквивалентно равенству

$$\begin{aligned} (r_{11}\sigma_1 + r_{21}\sigma_2 + r_{31}\sigma_3)x + (r_{12}\sigma_1 + r_{22}\sigma_2 + r_{32}\sigma_3)y + (r_{13}\sigma_1 + r_{23}\sigma_2 + r_{33}\sigma_3)z = \\ = x\mathbf{U}^*\sigma_1\mathbf{U} + y\mathbf{U}^*\sigma_2\mathbf{U} + z\mathbf{U}^*\sigma_3\mathbf{U}. \end{aligned}$$

Из этого равенства следует, что

$$r_{1k}\sigma_1 + r_{2k}\sigma_2 + r_{3k}\sigma_3 = U^* \sigma_k U \quad (3.40)$$

для $k \in \{1, 2, 3\}$. Полученные равенства (3.40) определяют соответствие между специальными унитарными матрицами из группы $SU(2)$ и собственно ортогональными матрицами из группы $SO(3, R)$.

Опишем структуру собственно ортогональной матрицы \mathbf{R} , используя параметры Кэли – Клейна. Выражения для элементов матрицы \mathbf{R} могут быть найдены из равенств (3.40). Для того чтобы разрешить равенства (3.40) относительно элементов матрицы \mathbf{R} , найдем преобразования спин матриц Паули посредством специальных унитарных матриц, представленных через параметры Кэли – Клейна. Используя равенства (3.35) и (3.36), эти преобразования могут быть записаны следующим образом:

$$U^* \sigma_k U = (q_0 \mathbf{I} - q_1 i \sigma_1 - q_2 i \sigma_2 - q_3 i \sigma_3) \sigma_k (q_0 \mathbf{I} + q_1 i \sigma_1 + q_2 i \sigma_2 + q_3 i \sigma_3)$$

для $k \in \{1, 2, 3\}$. Вычислим эти выражения, используя равенства (3.33), получим

$$U^* \sigma_1 U = (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) \sigma_1 + 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) \sigma_2 + 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \sigma_3,$$

$$U^* \sigma_2 U = 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) \sigma_1 + (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) \sigma_2 + 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \sigma_3,$$

$$U^* \sigma_3 U = 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \sigma_1 + 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \sigma_2 + (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \sigma_3.$$

Сравнение полученных равенств с равенствами (3.40) показывает, что элементы ортогональной матрицы \mathbf{R} определяются через параметры Кэли – Клейна следующим образом:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Учитывая равенство (3.34), диагональные элементы матрицы \mathbf{R} могут быть упрощены следующим образом:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Таким образом, структура произвольной собственно ортогональной матрицы из группы $SO(3, R)$ через параметры Кэли – Клейна задается выражениями (3.41) и (3.42). Используя эти выражения, определим отображение

$$g : SU(2) \rightarrow SO(3, R).$$

Из этого определения видно, что

$$g(U) = g(-U)$$

для любой матрицы $U \in SU(2)$. Следовательно, любой поворот может быть представлен одной из двух специальных унитарных матриц U или $-U$.

Теорема 1. Отображение g является гомоморфизмом из группы $SU(2)$ в группу $SO(3, R)$, т. е. для произвольных матриц $U, V \in SU(2)$ выполняется тождество

$$g(UV) = g(V)g(U).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные матрицы U и V из группы $SU(2)$. Предположим, что

$$g(U) = R, \quad g(V) = Q.$$

Теперь, используя равенства (3.40), найдем выражения для описания действий композиции матриц UV на спин матрицы Паули. Получим

$$\begin{aligned} (V^*U^*)\sigma_k(UV) &= V^*(r_{1k}\sigma_1 + r_{2k}\sigma_2 + r_{3k}\sigma_3)V = \\ &= r_{1k}V^*\sigma_1V + r_{2k}V^*\sigma_2V + r_{3k}V^*\sigma_3V = \\ &= r_{1k}(q_{11}\sigma_1 + q_{21}\sigma_2 + q_{31}\sigma_3) + r_{2k}(q_{12}\sigma_1 + q_{22}\sigma_2 + q_{32}\sigma_3) + \\ &+ r_{3k}(q_{13}\sigma_1 + q_{23}\sigma_2 + q_{33}\sigma_3) = (q_{11}r_{1k} + q_{12}r_{2k} + q_{13}r_{3k})\sigma_1 + \\ &+ (q_{21}r_{1k} + q_{22}r_{2k} + q_{23}r_{3k})\sigma_2 + (q_{31}r_{1k} + q_{32}r_{2k} + q_{33}r_{3k})\sigma_3 \end{aligned}$$

для $k \in \{1, 2, 3\}$. Из равенства следует, что

$$\begin{aligned} g(UV) &= \\ &= \begin{bmatrix} q_{11}r_{11} + q_{12}r_{21} + q_{13}r_{31} & q_{11}r_{12} + q_{12}r_{22} + q_{13}r_{32} & q_{11}r_{13} + q_{12}r_{23} + q_{13}r_{33} \\ q_{21}r_{11} + q_{22}r_{21} + q_{23}r_{31} & r_{12}q_{21} + r_{22}q_{22} + r_{32}q_{23} & r_{13}q_{21} + r_{23}q_{22} + r_{33}q_{23} \\ q_{31}r_{11} + q_{32}r_{21} + q_{33}r_{31} & q_{31}r_{12} + q_{32}r_{22} + q_{33}r_{32} & q_{31}r_{13} + q_{32}r_{23} + q_{33}r_{33} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = QR = g(V)g(U). \end{aligned}$$

Таким образом, получили, что

$$g(UV) = g(V)g(U),$$

т. е. отображение g является гомоморфизмом из группы $SU(2)$ в группу $SO(3, R)$.

Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим параметры Кэли – Клейна

$$q_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad q_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad q_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad q_3 = -\frac{1}{2},$$

которые были получены в примере из раздела 3.9. Используя формулу (3.42), найдем собственно ортогональную матрицу \mathbf{R} , которая определяется этими параметрами Кэли – Клейна. Получим

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 - \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/4 + 1/2 \\ 1/4 + \sqrt{2}/2 & 1/4 & \sqrt{2}/4 - 1/2 \\ \sqrt{2}/4 - 1/2 & \sqrt{2}/4 + 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим обратную проблему, как получить параметры Кэли – Клейна из заданной матрицы $\mathbf{R} \in SO(3, R)$. Первый шаг к решению этой проблемы состоит в определении максимального числа

$$q_{\max} = \max\{4q_0^2, 4q_1^2, 4q_2^2, 4q_3^2\},$$

где

$$4q_0^2 = 1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}, \quad 4q_1^2 = 1 + r_{11} - r_{22} - r_{33},$$

$$4q_2^2 = 1 - r_{11} + r_{22} - r_{33}, \quad 4q_3^2 = 1 - r_{11} - r_{22} + r_{33}.$$

Такой выбор числа q_{\max} обеспечивает более точное вычисление квадратного корня из этого числа для нахождения значений параметров Кэли – Клейна. После этого параметры Кэли – Клейна могут быть определены следующим образом. Если

$$q_{\max} = 4q_0^2,$$

то

$$q_0 = \pm \frac{\sqrt{q_{\max}}}{2}, \quad q_1 = \frac{r_{23} - r_{32}}{4q_0}, \quad q_2 = \frac{r_{31} - r_{13}}{4q_0}, \quad q_3 = \frac{r_{12} - r_{21}}{4q_0}.$$

Если

$$q_{\max} = 4q_1^2,$$

то

$$q_1 = \pm \frac{\sqrt{q_{\max}}}{2}, \quad q_2 = \frac{r_{12} + r_{21}}{4q_1}, \quad q_3 = \frac{r_{13} + r_{31}}{4q_1}, \quad q_0 = \frac{r_{23} - r_{32}}{4q_1}.$$

Если

$$q_{\max} = 4q_2^2,$$

то

$$q_2 = \pm \frac{\sqrt{q_{\max}}}{2}, \quad q_3 = \frac{r_{23} + r_{32}}{4q_2}, \quad q_0 = \frac{r_{31} - r_{13}}{4q_2}, \quad q_1 = \frac{r_{12} + r_{21}}{4q_2}.$$

И наконец, если

$$q_{\max} = 4q_3^2,$$

то

$$q_3 = \pm \frac{\sqrt{q_{\max}}}{2}, \quad q_0 = \frac{r_{12} - r_{21}}{4q_3}, \quad q_1 = \frac{r_{13} + r_{31}}{4q_3}, \quad q_2 = \frac{r_{23} + r_{32}}{4q_3}.$$

Теперь определим отображение

$$h: SO(3, R) \rightarrow SU(2),$$

используя приведенные выражения для вычисления параметров Кэли – Клейна. Из этого определения видно, что

$$h(\mathbf{R}) = -h(\mathbf{R}).$$

Это значит, что отображение h отображает любую матрицу из группы $SO(3, R)$ в две матрицы из группы $SU(2)$, связанные последним соотношением.

Теорема 2. Отображение h является гомоморфизмом из группы $SO(3, R)$ в группу $SU(2)$.

Доказательство. Эта теорема может быть доказана аналогично теореме 1.

Пример 2. Рассмотрим собственно ортогональную матрицу

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 - \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/4 + 1/2 \\ 1/4 + \sqrt{2}/2 & 1/4 & \sqrt{2}/4 - 1/2 \\ \sqrt{2}/4 - 1/2 & \sqrt{2}/4 + 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Найдем из этой матрицы параметры Кэли – Клейна. Так как

$$q_{\max} = 4q_0^2 = 1 + r_{11} + r_{22} + r_{33} = 2,$$

то получим

$$q_0 = \frac{\sqrt{q_{\max}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$q_1 = \frac{r_{23} - r_{32}}{4q_0} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad q_2 = \frac{r_{31} - r_{13}}{4q_0} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad q_3 = \frac{r_{12} - r_{21}}{4q_0} = -\frac{1}{2}.$$

3.11. Представление поворотов единичными кватернионами

Рассмотрим такой произвольный кватернион

$$P = p_0 + p,$$

который удовлетворяет условию

$$P^* = -P.$$

Из этого условия следует, что должно выполняться равенство

$$p_0 - p = -p_0 - p,$$

которое в свою очередь эквивалентно равенству

$$p_0 = 0.$$

Следовательно, кватернион P имеет следующую структуру:

$$P = p_1 i + p_2 j + p_3 k = p,$$

т. е. кватернион P имеет только векторную часть. Такие кватернионы называются *векторными кватернионами* или просто *векторами*. Теперь возьмем произвольный единичный кватернион

$$Q = q_0 + q$$

и рассмотрим следующее преобразование:

$$\tilde{P} = QPQ^* \tag{3.43}$$

векторного кватерниона P . Это равенство может быть переписано, используя векторные операции следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= QPQ^* = (q_0 + q)p(q_0 - q) = \\ &= (q_0 + q)(p \cdot q + q_0 p - p \times q) = \\ &= q_0(p \cdot q) - q \cdot (q_0 p - p \times q) + q_0(q_0 p - p \times q) + (p \cdot q)q + q \times (q_0 p - p \times q) = \\ &= q_0^2 p - q_0(p \times q) + (p \cdot q)q + q_0(q \times p) - q \times (p \times q) = \\ &= q_0^2 p + 2q_0(q \times p) + (p \cdot q)q + (p \times q) \times q. \end{aligned}$$

В результате получили следующее векторное выражение:

$$\tilde{\mathbf{P}} = q_0^2 \mathbf{p} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\mathbf{q} + (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \times \mathbf{q} \quad (3.44)$$

для преобразования, заданного формулой (3.43). Отсюда следует, что кватернион $\tilde{\mathbf{P}}$ также является вектором, который будет обозначаться следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{P}}.$$

Кроме того, так как

$$N(\tilde{\mathbf{P}}) = N(\mathbf{QPQ}^*) = N(\mathbf{Q})N(\mathbf{P})N(\mathbf{Q}^*) = N(\mathbf{P}),$$

учитывая, что \mathbf{Q} и \mathbf{Q}^* являются единичными кватернионами, то преобразование, заданное формулой (3.43), сохраняет норму кватерниона и, следовательно, длину векторов. В результате можно сделать вывод, что формула (3.43) описывает некоторый поворот вектора в евклидовом векторном пространстве R^3 или поворот точки в евклидовом аффинном пространстве E^3 , координаты которой задаются вектором \mathbf{p} .

3.12. Гомоморфизм между группой $SO(3, R)$ и группой единичных кватернионов

Перепишем формулу (3.44), используя матричную нотацию. Для этой цели введем следующие матрицы:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} q_1^2 & q_1q_2 & q_1q_3 \\ q_2q_1 & q_2^2 & q_2q_3 \\ q_3q_1 & q_3q_2 & q_3^2 \end{bmatrix}.$$

Используя эти обозначения и принимая во внимание, что

$$\mathbf{q} \times \mathbf{p} = \mathbf{Kp}, \quad (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\mathbf{q} = (\mathbf{qq}^T)\mathbf{p} = \mathbf{Mp},$$

формула (3.44) может быть преобразована следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}} &= q_0^2 \mathbf{p} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\mathbf{q} + (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \times \mathbf{q} = \\ &= q_0^2 \mathbf{p} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\mathbf{q} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\mathbf{p} = \\ &= q_0^2 \mathbf{p} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) + 2(\mathbf{qq}^T)\mathbf{p} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\mathbf{p} = \\ &= q_0^2 \mathbf{Ip} + 2q_0 \mathbf{Kp} + 2\mathbf{Mp} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\mathbf{Ip} = \\ &= (q_0^2 \mathbf{I} + 2q_0 \mathbf{K} + 2\mathbf{M} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\mathbf{I})\mathbf{p}. \end{aligned}$$

Введем следующую матрицу:

$$\mathbf{R} = q_0^2 \mathbf{I} + 2q_0 \mathbf{K} + 2\mathbf{M} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{I}. \quad (3.45)$$

Из выражения (3.45) следует, что матрица \mathbf{R} имеет следующую структуру:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Используя это обозначение, равенство (3.44) может быть переписано следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{R}\mathbf{p}.$$

Заметим, что матрица \mathbf{R} является собственной ортогональной матрицей, т. е. принадлежит группе $SO(3, R)$, так как преобразование, представляемое этой матрицей, сохраняет длину векторов и определитель матрицы равен единице. Из выражений для элементов матрицы \mathbf{R} следует, что она может быть получена из любого из единичных кватернионов \mathbf{Q} или $-\mathbf{Q}$. Следовательно, кватернионы \mathbf{Q} и $-\mathbf{Q}$ представляют один и тот же поворот.

Используя формулу (3.46), определим отображение

$$g : HU^4 \rightarrow SO(3, R),$$

где через HU^4 обозначим группу единичных кватернионов. Из этого определения видно, что

$$g(\mathbf{Q}) = g(-\mathbf{Q})$$

для любого единичного кватерниона $\mathbf{Q} \in HU^4$. Следовательно, любой поворот может быть представлен одним из двух единичных кватернионов \mathbf{Q} или $-\mathbf{Q}$.

Теорема. Отображение g является гомоморфизмом из группы единичных кватернионов HU^4 в группу собственно ортогональных матриц $SO(3, R)$, т. е. для произвольных единичных кватернионов $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in HU^4$ выполняется тождество

$$g(\mathbf{PQ}) = g(\mathbf{P})g(\mathbf{Q}).$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы следует из формулы (3.45), которая описывает матричное представление поворота, соответствующего как единичному кватерниону, так и собственно ортогональной матрице.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть задана собственно ортогональная матрица \mathbf{R} . Нужно найти кватернион, соответствующий этой матрице. Координаты такого кватерниона можно найти аналогично параметрам Кэли – Клейна, как это было описано в разделе 3.7. Можно также показать, что формулы для нахождения координат кватерниона из собственно ортогональной матрицы задают гомоморфизм из группы собственно ортогональных матриц $SO(3, R)$ в группу единичных кватернионов.

Пример. Рассмотрим единичный кватернион

$$\mathbf{Q} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{4}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$$

и, используя формулу (3.46), найдем собственно ортогональную матрицу \mathbf{R} , соответствующую этому единичному кватерниону. Получим

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 - \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/4 + 1/2 \\ 1/4 + \sqrt{2}/2 & 1/4 & \sqrt{2}/4 - 1/2 \\ \sqrt{2}/4 - 1/2 & \sqrt{2}/4 + 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

3.13. Геометрический смысл единичных кватернионов

Определим геометрический смысл единичного кватерниона. Для этой цели рассмотрим произвольный единичный кватернион

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{n},$$

где

$$\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$$

обозначает единичный вектор. Используя эти обозначения, координаты единичного кватерниона \mathbf{Q} могут быть определены следующим образом:

$$q_0 = \cos \frac{\varphi}{2}, \quad q_1 = \sin \frac{\varphi}{2} n_1, \quad q_2 = \sin \frac{\varphi}{2} n_2, \quad q_3 = \sin \frac{\varphi}{2} n_3.$$

Теперь подставим эти значения в выражения элементов собственно ортогональной матрицы \mathbf{R} , структура которой задана формулой (3.46). Принимая во внимание, что координаты вектора \mathbf{n} удовлетворяют условию

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$$

получим следующие выражения для диагональных элементов матрицы \mathbf{R} :

$$\begin{aligned} r_{11} &= \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} (n_1^2 - n_2^2 - n_3^2) = \\ &= \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} (2n_1^2 - 1) = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 2n_1^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \\ &= \cos \varphi + n_1^2 (1 - \cos \varphi) = n_1^2 + (1 - n_1^2) \cos \varphi \end{aligned}$$

и аналогично

$$r_{22} = n_2^2 + (1 - n_2^2) \cos \varphi, \quad r_{33} = n_3^2 + (1 - n_3^2) \cos \varphi.$$

Далее, используя тригонометрические тождества, получим следующие выражения для недиагональных элементов матрицы \mathbf{R} :

$$\begin{aligned} r_{12} &= 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} n_1 n_2 - 2 n_3 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = n_1 n_2 (1 - \cos \varphi) - n_3 \sin \varphi, \\ r_{21} &= 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} n_1 n_2 + 2 n_3 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = n_1 n_2 (1 - \cos \varphi) + n_3 \sin \varphi \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} r_{13} &= n_1 n_3 (1 - \cos \varphi) + n_2 \sin \varphi, \quad r_{31} = n_3 n_1 (1 - \cos \varphi) - n_2 \sin \varphi, \\ r_{23} &= n_2 n_3 (1 - \cos \varphi) - n_1 \sin \varphi, \quad r_{32} = n_3 n_2 (1 - \cos \varphi) + n_1 \sin \varphi. \end{aligned}$$

В результате получили, что собственно ортогональная матрица \mathbf{R} имеет следующую структуру:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_1^2 + (1 - n_1^2) \cos \varphi & n_1 n_2 (1 - \cos \varphi) - n_3 \sin \varphi & n_1 n_3 (1 - \cos \varphi) + n_2 \sin \varphi \\ n_1 n_2 (1 - \cos \varphi) + n_3 \sin \varphi & n_2^2 + (1 - n_2^2) \cos \varphi & n_2 n_3 (1 - \cos \varphi) - n_1 \sin \varphi \\ n_3 n_1 (1 - \cos \varphi) - n_2 \sin \varphi & n_3 n_2 (1 - \cos \varphi) + n_1 \sin \varphi & n_3^2 + (1 - n_3^2) \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Видно, что структура матрицы \mathbf{R} совпадает со структурой матрицы $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$, которая была рассмотрена в разделе 3.3. Следовательно, единичный кватернион

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{n}$$

представляет поворот вокруг оси \mathbf{n} на угол φ .

Теперь определим геометрический смысл произведения двух единичных кватернионов. Для этой цели рассмотрим преобразование произвольного вектора \mathbf{p} последовательно двумя единичными кватернионами \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 . Получим

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{p} \mathbf{Q}_1^* \mathbf{Q}_2^* = (\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1) \mathbf{p} (\mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1)^*.$$

Из этого равенства следует, что произведение единичных кватернионов ($\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1$) соответствует композиции поворотов, которые представляются единичными кватернионами \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 . Так как произведение единичных кватернионов также является единичным кватернионом, то представление композиции поворотов через кватернионы дает простой способ определения оси и угла поворота, который является результатом этой композиции. Для определения этих параметров результирующего поворота рассмотрим два единичных кватерниона

$$\mathbf{Q}_1 = \cos \frac{\varphi_1}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{Q}_2 = \cos \frac{\varphi_2}{2} + \sin \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{n}_2$$

и, используя формулу (2.2), найдем произведение кватернионов \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 . Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1 &= \left(\cos \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1}{2} - \sin \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \right) + \\ &+ \left(\cos \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \mathbf{n}_1 + \cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{n}_2 + \sin \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1 \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1 = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{n},$$

то

$$\begin{aligned} \cos \frac{\varphi}{2} &= \cos \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1}{2} - \sin \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1, \\ \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{n} &= \cos \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \mathbf{n}_1 + \cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \mathbf{n}_2 + \sin \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1. \end{aligned}$$

Из этих формул легко можно найти угол φ и ось \mathbf{n} результирующего поворота.

Пример. Рассмотрим единичный кватернион

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \mathbf{n},$$

где

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{k}.$$

Очевидно, что единичный кватернион \mathbf{Q} описывает поворот вокруг оси \mathbf{n} на угол $\frac{\pi}{2}$. Найдем собственно ортогональную матрицу \mathbf{R} , соответст-

вующую кватерниону \mathbf{Q} . Используя структуру собственно ортогональной матрицы, получим

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 - \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/4 + 1/2 \\ 1/4 + \sqrt{2}/2 & 1/4 & \sqrt{2}/4 - 1/2 \\ \sqrt{2}/4 - 1/2 & \sqrt{2}/4 + 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Видно, что эта матрица совпадает с матрицей \mathbf{R} , полученной в примере из раздела 3.12.

Найдем произведение единичных кватернионов, которые описывают поворот вокруг одной и той же оси. Для этого рассмотрим единичные кватернионы

$$\mathbf{P} = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{n}, \quad \mathbf{Q} = \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \mathbf{n}.$$

Используя формулу (2.2), произведение этих кватернионов может быть выражено следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{PQ} &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \right) + \\ &+ \left(\cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \mathbf{n} + \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{n} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{n} \right) = \\ &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \right) + \left(\cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \mathbf{n} = \\ &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} \right) + \left(\cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\psi}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \mathbf{n} = \\ &= \cos \frac{\varphi + \psi}{2} + \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что два последовательных поворота вокруг одной оси эквивалентны одному повороту вокруг этой оси на угол, равный сумме углов двух последовательных поворотов.

Глава 4

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПОВОРОТОВ

Цель данной главы – рассмотреть различные параметризации поворотов, которые позволяют дать их векторное представление. Некоторые параметризации и векторные представления поворотов уже были рассмотрены в главе 3, это параметризация Кэли – Клейна и представление поворотов единичными кватернионами. В главе 4 будут рассмотрены другие подходы к параметризации поворотов.

4.1. Ориентация

Прежде чем переходить к определению ориентации твердых объектов в евклидовом аффинном пространстве E^3 , сделаем несколько общих замечаний относительно поворота и ориентации. Поворот рассматривается как активный объект, который представляет некоторое действие на различные геометрические объекты в E^3 , вызывая изменение их положения. В геометрическом моделировании геометрические объекты, как правило, описываются векторами, поэтому повороты обычно представляются матрицами. С другой стороны, положения твердых объектов в евклидовом пространстве задаются локальными системами координат, которые жестко связываются с твердыми объектами. Эти локальные системы координат рассматриваются как пассивные объекты, на которые действуют геометрические преобразования. Но пассивные геометрические объекты обычно представляются точками некоторого пространства, которые подвержены некоторым преобразованиям. Поэтому необходимо определить некоторое векторное представление для положений твердого тела в пространстве. Так как в данной главе рассматриваются только ориентации твердых объектов, поэтому векторное представление будет определено только для ориентации.

Теперь перейдем к определению ориентации. Рассмотрим твердый объект, расположенный в трехмерном евклидовом аффинном пространстве E^3 . Предположим, что этот объект имеет одну неподвижную точку. Выберем в пространстве E^3 такую ортонормированную систему координат

нат (O, x, y, z) , что точка O , которая является началом этой системы координат, совпадает с неподвижной точкой рассматриваемого объекта. В свою очередь к рассматриваемому объекту жестко привяжем некоторую ортонормированную систему координат $(O, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Тогда положение рассматриваемого объекта в евклидовом аффинном пространстве E^3 может быть определено как положение системы координат $(O, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ относительно базовой системы координат (O, x, y, z) . В этом случае говорят, что тройка векторов $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ описывает *ориентацию объекта* относительно базисной тройки (x, y, z) . Определим следующие матрицы:

$$Q = [x \ y \ z], \quad \tilde{Q} = [\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{z}].$$

Учитывая, что матрица \tilde{Q} определяет ориентацию твердого тела относительно базисной тройки векторов Q , будем называть эту матрицу просто *ориентацией*. Так матрица Q определяет некоторую ориентацию относительно естественного базиса векторного пространства R^3 , то она также является ориентацией. Ориентация Q будет называться *базовой ориентацией*.

Матрицы Q и \tilde{Q} являются ортогональными, так как они составлены из векторов, которые образуют базис ортонормированных систем координат. Следовательно,

$$\det \tilde{Q} = \pm 1.$$

Если

$$\det \tilde{Q} = 1,$$

то *ориентация \tilde{Q}* называется *правой*, иначе – *левой*. В дальнейшем будем предполагать, что рассматриваются только правые ориентации. Поэтому считаем, что матрицы Q и \tilde{Q} являются собственно ортогональными.

Так как ориентация описывается тремя векторами, то существует некоторое преобразование R , которое преобразует ориентацию Q в ориентацию \tilde{Q} . Это преобразование определяется из равенства

$$\tilde{Q} = RQ$$

следующим образом:

$$R = \tilde{Q}Q^T. \quad (4.1)$$

Отсюда следует, что матрица R является собственно ортогональной как композиция двух собственно ортогональных матриц. Но собственно ортогональные матрицы описывают некоторый поворот евклидова аф-

финного пространства E^3 . Поэтому делаем заключение, что ориентация \tilde{Q} может быть получена из базовой ориентации Q посредством некоторого поворота. Следовательно, ориентация также может быть представлена поворотом, который преобразует базовую ориентацию.

Из предыдущих рассуждений видно, что существуют две точки зрения на элементы специальной ортогональной группы $SO(3, R)$. Если элементы группы $SO(3, R)$ рассматриваются как активные объекты, то они называются поворотами и само множество $SO(3, R)$ рассматривается как группа собственно ортогональных матриц. Но если элементы множества $SO(3, R)$ рассматриваются как пассивные объекты, то они называются ориентациями и само множество $SO(3, R)$ рассматривается как гладкое многообразие, т. е. гладкое точечное множество. В этом случае для представления ориентаций обычно используется векторное представление.

Из этих рассуждений видно, что множество $SO(3, R)$ с операцией умножения матриц является одновременно группой и гладким многообразием. Такие множества, которые одновременно являются гладкими многообразиями и снабжены групповой структурой, называются группами Ли.

4.2. Вектор конечного поворота

Так как ориентации рассматриваются как точки гладкого многообразия $SO(3, R)$, то для этих точек естественно было бы получить векторное описание. Для того чтобы это сделать, возьмем произвольный вектор $\mathbf{v} \in R^3$. Используя матричную нотацию, поворот вектора \mathbf{v} вокруг оси \mathbf{n} на угол φ описывается следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)\mathbf{v}, \quad (4.2)$$

где $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ – собственно ортогональная матрица, описывающая данный поворот. С другой стороны, из геометрических соотношений, которые проиллюстрированы на рис. 4.1, этот же поворот может быть описан, используя векторные операции, следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + 2\mathbf{r} \times \frac{\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}}{2}, \quad (4.3)$$

где

$$\mathbf{r} = \tan(\varphi/2)\mathbf{n}$$

при условии, что

$$\varphi \neq \pi. \quad (4.4)$$

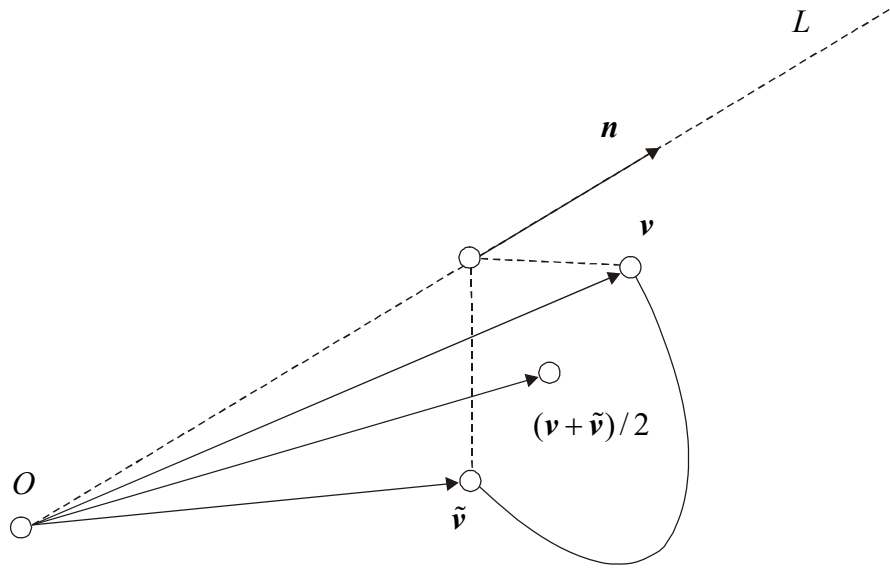


Рис. 4.1. Геометрическое определение вектора поворота

Вектор \mathbf{r} называется *вектором конечного поворота*. Равенство (4.3) может быть преобразовано следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{v}} - (\mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{v}}) = \mathbf{v} + (\mathbf{r} \times \mathbf{v}).$$

В свою очередь последнее равенство может быть переписано, используя матричную нотацию, как

$$\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{K}(\mathbf{r})\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \mathbf{K}(\mathbf{r})\mathbf{v}, \quad (4.5)$$

где $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ обозначает кососимметричную матрицу, которая имеет следующую структуру

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из равенства (4.5) следует, что

$$\tilde{\mathbf{v}} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(\mathbf{r}))^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{r}))\mathbf{v}. \quad (4.6)$$

Сравнение равенств (4.2) и (4.6) показывает, что

$$\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}(\mathbf{r}))^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{r})). \quad (4.7)$$

Формула (4.7) определяет *факторизацию Кэли* собственно ортогональной матрицы $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$. Видно, что ненулевые элементы матрицы $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ являются координатами вектора конечного поворота \mathbf{r} . Из равен-

ства (4.7) кососимметричная матрица $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ может быть определена следующим образом:

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = (\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) - \mathbf{I})(\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) + \mathbf{I})^{-1}. \quad (4.8)$$

Это равенство можно использовать для вычисления матрицы $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ только при условии, если выполняется неравенство

$$\det(\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) + \mathbf{I}) \neq 0, \quad (4.9)$$

которое в свою очередь эквивалентно неравенству (4.4).

В результате получили, что любой собственнo ортогональной матрице $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$, удовлетворяющей неравенству (4.9), соответствует некоторая кососимметричная матрица $\mathbf{K}(\mathbf{r})$, которая определяется посредством формулы (4.8). Множество кососимметричных матриц образуют линейное пространство относительно операции сложения матриц. Это линейное пространство можно рассматривать как локальную параметризацию множества ориентаций, учитывая, что это линейное пространство не покрывает такие собственнo ортогональные матрицы $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$, которые не удовлетворяют неравенству (4.9). Но каждой кососимметричной матрице $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ соответствует вектор конечного поворота

$$\mathbf{r} = \tan(\varphi/2)\mathbf{n}. \quad (4.10)$$

Если

$$\varphi = \pi,$$

то $\tan(\varphi/2)$ равен бесконечности и, следовательно, множество векторов поворота образует трехмерное проективное пространство RP^3 . Отсюда следует, что так как факторизация Кэли является взаимно однозначным отображением между матрицами из группы $SO(3, R)$ и кососимметричными матрицами, а следовательно, и векторами конечного поворота, то группа $SO(3, R)$ гомеоморфна проективному пространству RP^3 . В результате получили, что каждый элемент группы $SO(3, R)$ может быть локально представлен вектором конечного поворота $\mathbf{r} \in R^3$. Вектор конечного поворота \mathbf{r} , который соответствует повороту $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$, будет обозначаться $\mathbf{r}(\mathbf{n}, \varphi)$.

Пример. Определим вектор конечного поворота, который соответствует собственнo ортогональной матрице

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для этого сначала определим кососимметричную матрицу, которая соответствует матрице \mathbf{R} посредством факторизации Кэли. Используя формулу (4.7), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= (\mathbf{R} - \mathbf{I})(\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{2} - 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} + 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{4(\sqrt{2} + 2)} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что вектор конечного поворота имеет координаты:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = \frac{\sqrt{2}}{4(\sqrt{2} + 2)}.$$

4.3. Параметры Родрига

Рассмотрим произвольный вектор конечного поворота

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3).$$

Из формулы (4.10) следует, что тангенс половины угла φ и ось \mathbf{n} поворота, который описывает вектор \mathbf{r} , могут быть определены следующим образом:

$$\tan(\varphi/2) = |\mathbf{r}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} \mathbf{r}.$$

Определим соответствие между координатами вектора конечного поворота $\mathbf{r}(\mathbf{n}, \varphi)$ и элементами собственно ортогональной матрицы $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$. В разделе 3.4 было показано, что матрица $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) &= \\ &= \begin{bmatrix} n_1^2 + \cos \varphi(1 - n_1^2) & (1 - \cos \varphi)n_1 n_2 - \sin \varphi n_3 & (1 - \cos \varphi)n_1 n_3 + \sin \varphi n_2 \\ (1 - \cos \varphi)n_2 n_1 + \sin \varphi n_3 & n_2^2 + \cos \varphi(1 - n_2^2) & (1 - \cos \varphi)n_2 n_3 - \sin \varphi n_1 \\ (1 - \cos \varphi)n_3 n_1 - \sin \varphi n_2 & (1 - \cos \varphi)n_3 n_2 + \sin \varphi n_1 & n_3^2 + \cos \varphi(1 - n_3^2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Выразим тригонометрические функции $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ через тангенс половинного угла. Получим

$$\sin \varphi = \frac{2 \tan(\varphi/2)}{1 + \tan^2(\varphi/2)}, \quad \cos \varphi = \frac{1 - \tan^2(\varphi/2)}{1 + \tan^2(\varphi/2)}.$$

Теперь подставим в эти выражения значение $\tan(\varphi/2)$, которое задано формулой (4.11). В результате получим следующие значения $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ через координаты вектора конечного поворота

$$\sin \varphi = \frac{2\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}}{1 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}, \quad \cos \varphi = \frac{1 - (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)}{1 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}.$$

Подстановка этих выражений для тригонометрических функций $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в выражение для матрицы поворота $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ дает

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}) = \frac{1}{1 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \begin{bmatrix} 1 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 & 2(r_1 r_2 + r_3) & 2(r_1 r_3 + r_2) \\ 2(r_2 r_1 - r_3) & 1 - r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 & 2(r_2 r_3 - r_1) \\ 2(r_3 r_1 - r_2) & 2(r_3 r_2 + r_1) & 1 - r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Формула (4.12) описывает структуру матрицы поворота $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ через координаты вектора конечного поворота $\mathbf{r}(\mathbf{n}, \varphi)$.

Матрица $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ может быть также получена посредством факторизации Кэли, описанной формулой (4.7) из предыдущего раздела. Для этого нужно взять кососимметричную матрицу

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Видно, что в этом случае

$$\mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 1 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 1 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} - \mathbf{K}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 1 & r_3 & -r_2 \\ -r_3 & 1 & r_1 \\ r_2 & -r_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{K}(\mathbf{r})) = 1 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2,$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K}(\mathbf{r}))^{-1} = \frac{1}{1 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \begin{bmatrix} 1 + r_1^2 & r_1 r_2 - r_3 & r_1 r_3 + r_2 \\ r_1 r_2 + r_3 & 1 + r_2^2 & r_2 r_3 - r_1 \\ r_1 r_3 - r_2 & r_2 r_3 + r_1 & 1 + r_3^2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K}(\mathbf{r}))^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{K}(\mathbf{r})) = \mathbf{R}(\mathbf{r}).$$

Обратно. Рассмотрим собственно ортогональную матрицу

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

и определим координаты вектора конечного поворота \mathbf{r} , используя факторизацию Кэли матрицы \mathbf{R} . Из формулы (4.8) предыдущего раздела следует, что координаты вектора конечного поворота могут быть определены из кососимметричной матрицы

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = (\mathbf{R} - \mathbf{I})(\mathbf{R} + \mathbf{I})^{-1}.$$

Однако эти формулы редко используются на практике из-за громоздких вычислений. Как правило, параметры вектора конечного поворота находятся более простым способом непосредственно из элементов собственно ортогональной матрицы \mathbf{R} , используя структуру этой матрицы, которая задана формулой (4.12). Из этой формулы видно, что

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = \frac{3 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2}{1 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = \frac{4}{1 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} - 1.$$

Из этого следует, что

$$1 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \frac{4}{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}.$$

Тогда координаты вектора конечного поворота \mathbf{r} могут быть найдены из недиагональных элементов матрицы \mathbf{R} следующим образом:

$$r_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}},$$

$$r_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}},$$

$$r_3 = \frac{r_{12} - r_{21}}{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}.$$

Координаты r_1 , r_2 и r_3 вектора конечного поворота \mathbf{r} называются *параметрами Родрига* (Rodrigues) соответствующего поворота.

Пример. Найдем параметры Родрига из собственно ортогональной матрицы

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

используя полученные в этом разделе формулы. Получим

$$r_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} = 0,$$

$$r_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} = 0,$$

$$r_3 = \frac{r_{12} - r_{21}}{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}} = -\frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}.$$

Как видим, параметры Родрига определяют вектор поворота, координаты которого отличаются множителем $1/4$ от координат вектора поворота, полученного в примере раздела 4.2. Но так как векторы поворота принадлежат проективному пространству, то эти два вектора совпадают.

4.4. Параметры Эйлера

Векторы конечного поворота не очень удобно использовать при вычислениях, так как их длина может быть равна бесконечности. Поэтому векторы конечного поворота часто представляют, используя однородные координаты. Рассмотрим произвольный вектор конечного поворота

$$\mathbf{r}(\mathbf{n}, \varphi) = \tan(\varphi/2)\mathbf{n}$$

и представим его, используя однородные координаты. Получим

$$\mathbf{q}(\mathbf{n}, \varphi) = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{n} = \left(\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2} n_1, \sin \frac{\varphi}{2} n_2, \sin \frac{\varphi}{2} n_3 \right).$$

Видно, что вектор конечного поворота $\mathbf{q}(\mathbf{n}, \varphi)$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{q}(\mathbf{n}, \varphi) \cdot \mathbf{q}(\mathbf{n}, \varphi) = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 1.$$

Следовательно, любой единичный вектор

$$\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3),$$

принадлежащий R^4 , может рассматриваться как вектор конечного поворота. В этом случае параметры соответствующего поворота могут быть определены следующим образом:

$$\cos \frac{\varphi}{2} = q_0, \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2},$$

$$n_1 = \frac{q_1}{\sin \frac{\varphi}{2}}, \quad n_2 = \frac{q_2}{\sin \frac{\varphi}{2}}, \quad n_3 = \frac{q_3}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Координаты q_0 , q_1 , q_2 и q_3 единичного вектора $\mathbf{q} \in R^4$ называются *параметрами Эйлера* (Euler) соответствующего поворота. Очевидно, что параметры Родрига и Эйлера одного и того же поворота связаны следующим образом:

$$r_1 = \frac{q_1}{q_0}, \quad r_2 = \frac{q_2}{q_0}, \quad r_3 = \frac{q_3}{q_0}.$$

Подстановка этих значений в формулу (4.12) дает следующую структуру собственно ортогональной матрицы, элементы которой выражены через параметры Эйлера:

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_3) & 2(q_1q_3 + q_2) \\ 2(q_2q_1 - q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_1) \\ 2(q_3q_1 - q_2) & 2(q_3q_2 + q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

учитывая, что

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

Обратно, рассмотрим собственно ортогональную матрицу

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

и определим параметры Эйлера поворота, который описывает эта матрица. Из формулы (4.13) видно, что

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = 3q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = 4q_0^2 - 1.$$

Отсюда следует, что

$$q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1}.$$

Тогда остальные параметры Эйлера могут быть определены из недиагональных элементов матрицы \mathbf{R} следующим образом:

$$q_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{4}, \quad q_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{4}, \quad q_3 = \frac{r_{12} - r_{21}}{4}.$$

Пример. Найдем параметры Эйлера из собственно ортогональной матрицы

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

используя полученные в этом разделе формулы. Получим

$$q_0 = \frac{1}{2} \sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2},$$

$$q_1 = \frac{r_{32} - r_{23}}{4} = 0, \quad q_2 = \frac{r_{13} - r_{31}}{4} = 0, \quad q_3 = \frac{r_{12} - r_{21}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

4.5. Композиция векторов конечных поворотов

Произвольный поворот $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ может быть представлен вектором конечного поворота

$$\mathbf{r} = \tan(\varphi/2) \mathbf{n} = \frac{\sin(\varphi/2) \mathbf{n}}{\cos(\varphi/2)},$$

который принадлежит проективному пространству RP^3 . Следовательно, этот же поворот $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ может быть также представлен вектором однородных координат

$$\mathbf{q} = \cos(\varphi/2) + \sin(\varphi/2) \mathbf{n},$$

который принадлежит векторному пространству R^4 и удовлетворяет условию

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = \cos^2(\varphi/2) + \sin^2(\varphi/2)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 1.$$

Из этого условия следует, что вектор конечного поворота \mathbf{q} принадлежит единичной сфере S^3 , которая описана каноническим уравнением

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

где (w, x, y, z) однородные координаты точки $P \in R^4$. Кроме того, очевидно, что вектор конечного поворота q соответствует единичному кватерниону q с теми же координатами. Следовательно, проективное пространство RP^3 диффеоморфно единичной сфере S^3 , у которой отождествлены противоположные точки, так как кватернионы q и $-q$ описывают один и тот же поворот.

Определим композицию векторов конечных поворотов. Для этого используем следующее представление вектора конечного поворота $q(n, \varphi)$, используя однородные координаты

$$q = \cos(\varphi/2)(1 + r). \quad (4.14)$$

Тогда композиция векторов конечных поворотов q_1 и q_2 может быть определена, используя умножение соответствующих кватернионов, следующим образом:

$$\begin{aligned} q &= q_1 q_2 = \cos(\varphi_1/2)(1 + r_1) \cos(\varphi_2/2)(1 + r_2) = \\ &= \cos(\varphi_1/2) \cos(\varphi_2/2) (1 + r_1 \cdot r_2 + r_1 + r_2 + r_1 \times r_2). \end{aligned}$$

Сравнение последнего равенства с равенством (4.14) показывает, что

$$\cos(\varphi/2) = \cos(\varphi_1/2) \cos(\varphi_2/2) (1 + r_1 \cdot r_2), \quad (4.15)$$

$$\cos(\varphi/2) r = \cos(\varphi_1/2) \cos(\varphi_2/2) (r_1 + r_2 + r_1 \times r_2).$$

В свою очередь из этого равенства следует, что

$$r = \frac{\cos(\varphi_1/2) \cos(\varphi_2/2) (r_1 + r_2 + r_1 \times r_2)}{\cos(\varphi/2)}.$$

Наконец, подставив значение $\cos(\varphi/2)$ из равенства (4.15) в последнее равенство, получим, что композиция векторов конечных поворотов задается следующим выражением:

$$r = \frac{r_1 + r_2 + r_1 \times r_2}{1 + r_1 \cdot r_2}. \quad (4.16)$$

Представим композицию векторов конечных поворотов как действие некоторого преобразования на вектор конечного поворота. Для этой цели рассмотрим два произвольных вектора конечных поворотов $p, r \in R^4$, представленные в однородных координатах. Представим композицию этих векторов, используя кватернионы

$$q = pr. \quad (4.17)$$

Как было показано в разделе 2.1, каждый кватернион может быть представлен квадратной матрицей четвертого порядка. Используем это пред-

ставление для вектора конечного поворота \mathbf{r} , который отождествлен с единичным кватернионом. Получим

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ -r_1 & r_0 & -r_3 & r_2 \\ -r_2 & r_3 & r_0 & -r_1 \\ -r_3 & -r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix}.$$

Можно проверить, что матрица \mathbf{R} удовлетворяет условиям:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I},$$

$$\det \mathbf{R} = 1.$$

Отсюда следует, что матрица \mathbf{R} является ортогональной. Подставив это значение в равенство (4.17) вместо вектора конечного поворота \mathbf{r} , получим выражение

$$\mathbf{q} = \mathbf{pR}. \quad (4.18)$$

Из формулы (4.18) следует, что композиция векторов конечных поворотов \mathbf{p} и \mathbf{r} соответствует некоторому повороту вектора \mathbf{p} в пространстве R^4 и этот поворот описывается собственно ортогональной матрицей \mathbf{R} .

4.6. Касательные векторы

Обозначим через $so(3, R)$ множество кососимметричных матриц третьего порядка. Очевидно, что множество $so(3, R)$ вместе с операциями сложения матриц и умножения матрицы на действительное число образует линейное пространство. Покажем, что это линейное пространство трехмерно. Для этого определим матрицы

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что эти матрицы линейно независимы и являются кососимметричными. Теперь рассмотрим произвольную кососимметричную матрицу

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & -l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & -l_1 \\ -l_2 & l_1 & 0 \end{bmatrix}$$

из $so(3, R)$. Эта матрица может быть представлена линейной комбинацией матриц K_1 , K_2 и K_3 следующим образом:

$$L = l_1 K_1 + l_2 K_2 + l_3 K_3.$$

Отсюда следует, что матрицы K_1 , K_2 и K_3 образуют базис линейного пространства $so(3, R)$ и, следовательно, это линейное пространство трехмерно.

Экспонентой квадратной матрицы X называется формальный степенной ряд

$$\exp X = I + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

В матричном анализе показано, что этот ряд сходится для любой квадратной матрицы X . Покажем, что экспонента $\exp L$ от произвольной кососимметричной матрицы L из линейного пространства $so(3, R)$ является собственно ортогональной матрицей из группы $SO(3, R)$. Для этой цели введем два типа матриц, которые определены ниже.

Обозначим через

$$M = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix}$$

симметричную матрицу, элементы которой удовлетворяют равенству

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Симметричные матрицы подобной структуры будут называться нормализованными симметричными матрицами. В следующих теоремах доказаны некоторые свойства нормализованных симметричных матриц, которые будут использоваться при определении структуры матрицы $\exp L$.

Теорема 1. Для любой нормализованной симметричной матрицы M справедливо равенство

$$M^k = M \tag{4.19}$$

при любом $k \in N$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную нормализованную симметричную матрицу M . Докажем равенство (4.19), используя метод математической индукции. Покажем, что равенство (4.19) справедливо при условии $k = 2$.

Получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^2 &= \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} n_1^2(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) & n_1 n_2(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) & n_1 n_3(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \\ n_2 n_1(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) & n_2^2(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) & n_2 n_3(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \\ n_3 n_1(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) & n_3 n_2(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) & n_3^2(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix} = \mathbf{M}.
\end{aligned}$$

Таким образом, показали, что

$$\mathbf{M}^2 = \mathbf{M}. \quad (4.20)$$

Теперь предположим, что равенство (4.19) справедливо для некоторого произвольного натурального числа $(k-1)$, т. е.

$$\mathbf{M}^{k-1} = \mathbf{M}. \quad (4.21)$$

Тогда из равенств (4.20) и (4.21) следует, что

$$\mathbf{M}^k = \mathbf{M}^{k-1} \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{M} = \mathbf{M}^2 = \mathbf{M}.$$

Теорема доказана.

Обозначим через

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

произвольную кососимметричную матрицу, элементы которой удовлетворяют равенству

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Такие кососимметричные матрицы будут называться *нормализованными кососимметричными матрицами*. В следующей теореме доказывается одно из свойств кососимметричных нормализованных матриц, которое будет использовано в дальнейшем при определении структуры матрицы $\exp \mathbf{L}$.

Теорема 2. Для любой нормализованной кососимметричной матрицы \mathbf{K} справедливо равенство

$$\mathbf{K}^{2k} = (-1)^k (\mathbf{I} - \mathbf{M}) \quad (4.22)$$

при любом $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную нормализованную кососимметричную матрицу \mathbf{K} . Докажем равенство (4.22), используя метод математической индукции. Покажем, что равенство (4.22) выполняется при условии $k = 1$. Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -n_2^2 - n_3^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & -n_1^2 - n_3^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & -n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} n_1^2 - 1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 - 1 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 - 1 \end{bmatrix} = -(\mathbf{I} - \mathbf{M}). \end{aligned}$$

Таким образом, показали, что

$$\mathbf{K}^2 = -(\mathbf{I} - \mathbf{M}). \quad (4.23)$$

Теперь предположим, что равенство (4.22) справедливо для некоторого произвольного натурального числа $(k - 1)$, т. е.

$$\mathbf{K}^{2k-2} = (-1)^{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{M}). \quad (4.24)$$

Тогда, используя теорему 1, из равенств (4.23) и (4.24) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{2k} &= \mathbf{K}^{2k-2} \mathbf{K}^2 = (-1)^{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{M}) (-1) (\mathbf{I} - \mathbf{M}) = \\ &= (-1)^k (\mathbf{I} - 2\mathbf{M} + \mathbf{M}) = (-1)^k (\mathbf{I} - \mathbf{M}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 3. Для любой нормализованной кососимметричной матрицы \mathbf{K} справедливо равенство

$$\mathbf{K}^{2k+1} = (-1)^k \mathbf{K} \quad (4.25)$$

при любом $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную нормализованную кососимметричную матрицу \mathbf{K} . Докажем равенство (4.25), используя метод математической индукции. Покажем, что равенство (4.25) выполняется при условии $k = 1$.

Принимая во внимание равенство (4.23) и учитывая, что

$$\mathbf{KM} = 0, \quad (4.26)$$

получим

$$\mathbf{K}^3 = \mathbf{KK}^2 = \mathbf{K}(\mathbf{M} - \mathbf{I}) = \mathbf{KM} - \mathbf{K} = -\mathbf{K}.$$

Теперь предположим, что равенство (4.25) справедливо для некоторого произвольного натурального числа $(k - 1)$, т. е.

$$\mathbf{K}^{2k-1} = (-1)^{k-1} \mathbf{K}. \quad (4.26)$$

Тогда из равенства (4.26), используя равенства (4.23) и (4.25), следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{2k+1} &= \mathbf{K}^{2k-1} \mathbf{K}^2 = (-1)^{k-1} \mathbf{K}(\mathbf{M} - \mathbf{I}) = \\ &= (-1)^{k-1} \mathbf{KM} + (-1)^k \mathbf{K} = (-1)^k \mathbf{K}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Используя доказанные теоремы, определим структуру матрицы $\exp \mathbf{L}$.

Получим

$$\begin{aligned} \exp \mathbf{L} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{L})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varphi \mathbf{K})^n}{n!} = \\ &= \mathbf{I} + \frac{\varphi \mathbf{K}}{1!} + \frac{(\varphi \mathbf{K})^2}{2!} + \frac{(\varphi \mathbf{K})^3}{3!} + \frac{(\varphi \mathbf{K})^4}{4!} + \frac{(\varphi \mathbf{K})^5}{5!} + \dots = \\ &= \mathbf{I} + \frac{\varphi \mathbf{K}}{1!} - \frac{\varphi^2 (\mathbf{I} - \mathbf{M})}{2!} - \frac{\varphi^3 \mathbf{K}}{3!} + \frac{\varphi^4 (\mathbf{I} - \mathbf{M})}{4!} + \frac{\varphi^5 \mathbf{K}}{5!} - \dots = \\ &= (1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots) \mathbf{I} + (\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots) \mathbf{K} + (\frac{\varphi^2}{2!} - \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^6}{6!} - \dots) \mathbf{M} = \\ &= \cos \varphi \mathbf{I} + \sin \varphi \mathbf{K} + (1 - \cos \varphi) \mathbf{M} = \mathbf{R}(n, \varphi). \end{aligned}$$

В результате получили

$$\exp(\varphi \mathbf{K}) = \mathbf{R}(n, \varphi).$$

Отсюда следует, что матрица $\exp \mathbf{L}$ описывает поворот вокруг оси \mathbf{n} на угол φ . Из последнего равенства также следует, что любая однопара-

метрическая подгруппа группы $SO(3, R)$ может быть представлена следующим образом:

$$\exp(t\varphi\mathbf{K}) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, t\varphi),$$

где $t \in R$ – параметр. Найдем касательную к однопараметрической подгруппе в точке нуль. Получим

$$\mathbf{R}'_t(\mathbf{n}, t\varphi)|_{t=0} = \varphi \mathbf{K}. \quad (4.27)$$

Так как

$$\mathbf{R}(\mathbf{n}, t\varphi)|_{t=0} = \mathbf{I},$$

то из равенства (4.27) следует, что произвольный поворот $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ может быть однозначно параметризован в окрестности единичной матрицы \mathbf{I} вектором

$$\mathbf{l} = \varphi \mathbf{n}$$

из R^3 при условии, что угол поворота находится в пределах

$$-\pi < \varphi < \pi.$$

Этот вектор может рассматриваться как касательная к повороту в точке \mathbf{I} . Из последнего ограничения следует, что данная параметризация локальна.

Пример. Рассмотрим собственно ортогональную матрицу

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В примере из раздела 2.4 было показано, что эта матрица представляет поворот $\mathbf{R}(\mathbf{z}, \pi/4)$. Из равенства (4.27) следует, что этот поворот может быть локально параметризован вектором

$$\mathbf{l} = \frac{\pi}{4} \mathbf{z} = (0, 0, \pi/4).$$

Глава 5

СФЕРА S^2

Данную главу можно рассматривать как предварительный материал, который содержит аналитические выражения, используемые в дальнейшем для моделирования сплайн-кривых на поверхности двумерной сферы. Цель этой главы – дать геометрические определения окружностей, лежащих на поверхности двумерной сферы, а также привести аналитические выражения для построения таких окружностей.

5.1. Определение сферы S^2

Рассмотрим произвольную точку P_0 из евклидова аффинного пространства E^3 . Пусть вектор (x_0, y_0, z_0) описывает координаты точки P_0 относительно некоторой системы координат. Возьмем произвольное действительное число r и определим множество точек, координаты которых (x, y, z) удовлетворяют уравнению

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Это множество точек называется *двумерной сферой* радиуса r с центром в точке P_0 и обозначается через S^2 . В дальнейшем будем предполагать, что начало системы координат находится в центре сферы S^2 . В этом случае двумерная сфера S^2 описывается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

которое называется *каноническим уравнением двумерной сферы* в евклидовом аффинном пространстве E^3 . Используя матричную нотацию, каноническое уравнение сферы может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{S} \mathbf{p} = r^2,$$

где матрица

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

является матрицей квадратичной формы

$$\mathbf{S}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

и вектор

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

задает координаты произвольной точки $P \in E^3$.

5.2. Касательная плоскость

Рассмотрим сферу S^2 , которая описана каноническим уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (5.1)$$

относительно некоторой ортогональной системы координат. Это каноническое уравнение может быть переписано следующим образом:

$$F(x, y, z) = 0,$$

где

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2.$$

Определим градиент функции $F(x, y, z)$. Получим

$$\text{grad } F(x, y, z) = \begin{bmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}.$$

Из математического анализа функций действительных переменных известно, что вектор $\text{grad } F(x, y, z)$ перпендикулярен поверхности сферы S^2 в любой ее точке P с координатами (x, y, z) , удовлетворяющими равенству (5.1). Обозначим через \mathbf{p} радиус-вектор точки P , лежащей на сфере. Видно, что в этом случае

$$\text{grad } F(x, y, z) = 2\mathbf{p}.$$

Отсюда следует, что радиус-вектор \mathbf{p} параллелен вектору градиента $\text{grad } F(x, y, z)$. Следовательно, радиус-вектор \mathbf{p} также перпендикулярен

поверхности сферы S^2 в точке P . Учитывая эти замечания, касательная плоскость к сфере S^2 в точке P_0 с координатами (x_0, y_0, z_0) может быть описана следующим уравнением:

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0.$$

Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$x_0x + y_0y + z_0z = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Принимая во внимание равенство (5.1), последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$x_0x + y_0y + z_0z = r^2. \quad (5.2)$$

Пример. Рассмотрим сферу S^2 , заданную каноническим уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Найдем уравнение касательной плоскости к этой сфере в точке с координатами $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$. Используя равенство (5.2), получим

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = 1$$

или

$$x + y = \sqrt{2}.$$

5.3. Плоские сечения

Рассмотрим сферу S^2 , которая описана каноническим уравнением

$$\mathbf{p}^T \mathbf{S} \mathbf{p} = r^2 \quad (5.3)$$

относительно некоторой ортогональной системы координат $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Возьмем в евклидовом аффинном пространстве E^3 произвольную плоскость, которая описана относительно той же системы координат каноническим уравнением

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = d, \quad (5.4)$$

где

$$|\mathbf{n}| = 1$$

и действительное число d удовлетворяет условию

$$0 \leq d \leq r. \quad (5.5)$$

В этом случае \mathbf{n} задает ось, которая перпендикулярна к плоскости, а действительное число d равно расстоянию от начала системы координат O до плоскости. Из неравенства (5.5) следует, что взятая плоскость пересекает рассматриваемую сферу S^2 .

Определим кривую, которая является сечением сферы S^2 этой плоскостью. Для этого определим следующие оси:

$$\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{n}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{z} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{z} \times \mathbf{n}|}, \quad \tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{x}}. \quad (5.6)$$

Из этих равенств следует, что оси $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{y}}$ и $\tilde{\mathbf{z}}$ взаимно перпендикулярны. Введем новую систему координат $(O, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$. Матрица перехода от системы координат $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ к системе координат $(O, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{R} = [\tilde{\mathbf{x}} \quad \tilde{\mathbf{y}} \quad \tilde{\mathbf{z}}].$$

Эта матрица является собственно ортогональной, так как оси $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{y}}$ и $\tilde{\mathbf{z}}$ взаимно перпендикулярны и образуют правую систему координат.

Найдем уравнения рассматриваемой сферы и взятой плоскости относительно новой системы координат. Матрица \mathbf{S} и ось \mathbf{n} преобразуются при переходе к новой системе координат $(O, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$ следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{R}^T \mathbf{S} \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} = \mathbf{S},$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{z}}.$$

Следовательно, сфера S^2 и секущая плоскость описываются относительно новой системы координат $(O, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$, используя равенства (5.3) и (5.4), следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{p}}^T \tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{p}} = r^2,$$

$$(\mathbf{R}^T \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{z}} \cdot \tilde{\mathbf{p}} = d.$$

Здесь $\tilde{\mathbf{p}}$ обозначает радиус-вектор координат произвольной точки P относительно новой системы координат $(O, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$.

Запишем полученные уравнения сферы S^2 и секущей плоскости по координатам

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = r^2, \quad (5.7)$$

$$\tilde{z} = d, \quad (5.8)$$

где $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ – вектор координат точки P относительно системы координат $(O, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$. Подставим значение \tilde{z} из равенства (5.8) в равенство (5.7). Получим равенство

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + d^2 = r^2,$$

которое в свою очередь эквивалентно равенству

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = r^2 - d^2. \quad (5.9)$$

Полученное уравнение описывает сечение сферы S^2 плоскостью. Из этого уравнения следует, что пересечением рассматриваемой сферы S^2 и взятой плоскости является окружность S^1 . Эта окружность лежит в плоскости осей \tilde{x} , \tilde{y} , и ее радиус равен $r^2 - d^2$. В зависимости от значения числа d рассматриваются три случая пересечения сферы и плоскости.

Случай 1. Если

$$d = 0,$$

то секущая плоскость проходит через центр сферы S^2 , который находится в точке O , и в этом случае равенство (5.7) принимает вид

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = r^2.$$

В этом случае окружность пересечения S^1 называется *большой окружностью сферы S^2* . Центр этой окружности также находится в точке O .

Случай 2. Если

$$0 < d < r,$$

то окружность пересечения S^1 называется *малой окружностью сферы S^2* . В этом случае центр окружности находится на оси \tilde{z} .

Случай 3. Если

$$d = r,$$

то равенство (5.7) принимает вид

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 0.$$

Отсюда следует, что в этом случае секущая плоскость касается сферы S^2 в точке с координатами $(0, 0, d)$.

Пример. Рассмотрим сферу S^2 , заданную каноническим уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 10.$$

Найдем уравнение окружности, которая является сечением этой сферы плоскостью

$$z = 1.$$

Подставим значение z из уравнения плоскости в уравнение сферы, получим следующее уравнение:

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Из этого уравнения следует, что сечением сферы плоскостью является окружность, радиус которой равен 3 с центром в точке с координатами $(0, 0, 1)$.

5.4. Геодезические линии на сфере

Рассмотрим сферу S^2 , которая описана каноническим уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (5.10)$$

относительно некоторой ортогональной системы координат. Здесь (x, y, z) обозначают координаты произвольной точки $P \in E^3$ относительно этой же системы координат. Возьмем произвольные точки P_1 и P_2 , лежащие на поверхности сферы S^2 . Пусть векторы (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) определяют координаты точек P_1 и P_2 относительно рассматриваемой системы координат. Задача заключается в нахождении на поверхности сферы S^2 геодезической

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

между точками P_1 и P_2 , где $t \in [t_1, t_2]$, t_1 и t_2 – некоторые предопределенные действительные числа. Это значит, что параметризованная кривая $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\mathbf{x}(t_1) = (x_1, y_1, z_1) = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}(t_2) = (x_2, y_2, z_2) = \mathbf{x}_2.$$

Напомним, что *геодезической линией* или просто *геодезической* на поверхности называется кривая линия, лежащая на этой поверхности, вектор ускорения которой в каждой ее точке перпендикулярен касательной плоскости к поверхности в этой точке. Из дифференциальной геометрии поверхностей известно, что если между двумя точками на поверхности существует кривая наименьшей длины, то эта кривая является геодезической линией этой поверхности. Из вариационного исчисления известно, что геодезическая $\mathbf{x}(t)$ может быть определена как экстремум функционала энергии

$$E(\mathbf{x}(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)) dt$$

при условии, что координаты (x, y, z) удовлетворяют уравнению (5.10).

В вариационном исчислении показано, что для нахождения экстремума функционала энергии нужно найти экстремумы функционала

$$E(\mathbf{x}(t), \lambda) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda)(t) dt,$$

где $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda)$ – функция Лагранжа, которая определяется следующим образом:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \lambda\varphi(x, y, z).$$

Здесь

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{5.11}$$

есть ограничения, которым должны удовлетворять экстремумы функционала энергии. Используя уравнение (5.10), эти ограничения могут быть записаны как

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2.$$

Отсюда следует, что функция Лагранжа $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda)$ может быть определена как

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - r^2).$$

Следовательно, функционал $E(\mathbf{x}(t), \lambda)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}(t), \lambda) &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda)(t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) + \lambda(x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) - r^2)) dt. \end{aligned}$$

Экстремали функционала $E(\mathbf{x}(t), \lambda)$ являются решениями следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda\varphi'_x - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{\partial\dot{x}} &= 0, \\ \lambda\varphi'_y - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{\partial\dot{y}} &= 0, \\ \lambda\varphi'_z - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{\partial\dot{z}} &= 0 \end{aligned}$$

при условии, заданном равенством (5.11). Выполнив дифференцирование, эту систему можно переписать следующим образом:

$$\lambda x - \ddot{x} = 0, \quad \lambda y - \ddot{y} = 0, \quad \lambda z - \ddot{z} = 0. \quad (5.12)$$

Полученная система дифференциальных уравнений эквивалентна системе

$$\lambda x^2 - x\ddot{x} = 0, \quad \lambda y^2 - y\ddot{y} = 0, \quad \lambda z^2 - z\ddot{z} = 0.$$

Из этих равенств следует равенство

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = \lambda(x^2 + y^2 + z^2),$$

которое, учитывая равенство (5.10), эквивалентно следующему равенству:

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = \lambda r^2. \quad (5.13)$$

Теперь два раза продифференцируем равенство (5.10) по переменной t . Получим равенство

$$\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} + \dot{z}^2 + z\ddot{z} = 0,$$

которое может быть переписано следующим образом:

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (5.14)$$

Предположим, что кривая $\mathbf{x}(t)$ является натурально параметризованной, т. е.

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) = 1.$$

Используя это предположение, равенство (5.14) можно переписать следующим образом:

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = -1.$$

Подстановка этого равенства в равенство (5.13) дает

$$\lambda r^2 = -1.$$

Из полученного равенства следует, что

$$\lambda = -\frac{1}{r^2}.$$

Подставив это значение λ в равенства (5.12), получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} + \frac{x}{r^2} = 0, \quad \ddot{y} + \frac{y}{r^2} = 0, \quad \ddot{z} + \frac{z}{r^2} = 0,$$

которая имеет следующее общее решение:

$$x = a_1 \cos \frac{t}{r} + b_1 \sin \frac{t}{r}, \quad y = a_2 \cos \frac{t}{r} + b_2 \sin \frac{t}{r}, \quad z = a_3 \cos \frac{t}{r} + b_3 \sin \frac{t}{r}, \quad (5.15)$$

где $t \in R$. Используя векторные обозначения, это общее решение можно записать следующим образом:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} \cos \frac{t}{r} + \mathbf{b} \sin \frac{t}{r}, \quad (5.16)$$

где $t \in R$.

Видно, что геодезическая линия $\mathbf{x}(t)$, заданная равенством (5.16), лежит на пересечении сферы и плоскости, которая проходит через центр сферы и имеет направляющие векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} . Как было показано в разделе 5.3, такая кривая является большой окружностью сферы. Следовательно, геодезическая линия $\mathbf{x}(t)$ также является большой окружностью сферы S^2 .

Кроме того, подстановка равенств (5.15) в равенство (5.10) дает равенство

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \cos^2 \frac{t}{r} + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cos \frac{t}{r} \sin \frac{t}{r} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \sin^2 \frac{t}{r} = r^2$$

для любых $t \in R$, которое выполняется только при условии, если

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = r^2, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = r^2.$$

Из этих равенств следует, что векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} взаимно перпендикулярны и их длины равны радиусу сферы S^2 .

Найдем условия, при которых геодезическая линия $\mathbf{x}(t)$ начинается в точке P_1 и заканчивается в точке P_2 . Для этого разрешим систему линейных уравнений

$$\mathbf{a} \cos \frac{t_1}{r} + \mathbf{b} \sin \frac{t_1}{r} = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{a} \cos \frac{t_2}{r} + \mathbf{b} \sin \frac{t_2}{r} = \mathbf{x}_2 \quad (5.17)$$

относительно неизвестных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , получим

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta_a}{\Delta}, \quad \mathbf{b} = \frac{\Delta_b}{\Delta},$$

где

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 & \sin \frac{t_1}{r} \\ \mathbf{x}_2 & \sin \frac{t_2}{r} \end{vmatrix} = \mathbf{x}_1 \sin \frac{t_2}{r} - \mathbf{x}_2 \sin \frac{t_1}{r},$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} \cos \frac{t_1}{r} & x_1 \\ \cos \frac{t_2}{r} & x_2 \end{vmatrix} = x_2 \cos \frac{t_1}{r} - x_1 \cos \frac{t_2}{r},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \frac{t_1}{r} & \sin \frac{t_1}{r} \\ \cos \frac{t_2}{r} & \sin \frac{t_2}{r} \end{vmatrix} = \cos \frac{t_1}{r} \sin \frac{t_2}{r} - \sin \frac{t_1}{r} \cos \frac{t_2}{r} = \sin \left(\frac{t_2 - t_1}{r} \right)$$

при условии, что $t_1 \neq t_2$.

5.5. Орбиты поворотов

Найдем траекторию или орбиту произвольной точки $P \in E^3$ под действием ортогонального поворота $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$. Для этой цели определим такую ортонормированную систему координат $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, ось \mathbf{z} которой совпадает с осью \mathbf{n} поворота $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$. Относительно новой системы координат $(O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ матрица поворота $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ имеет следующую структуру:

$$\mathbf{R}(\mathbf{z}, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

как было показано в разделе 3.4. Обозначим через \tilde{P} точку, в которую преобразуется точка P посредством поворота $\mathbf{R}(\mathbf{z}, \varphi)$. Координаты точек P и \tilde{P} связаны следующим соотношением:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{R}(\mathbf{z}, \varphi) \mathbf{p},$$

где \mathbf{p} и $\tilde{\mathbf{p}}$ обозначают соответственно радиус-векторы точек P и \tilde{P} . Последнее равенство может быть переписано по координатам следующим образом:

$$\tilde{x} = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad \tilde{y} = x \sin \varphi + y \cos \varphi, \quad \tilde{z} = z.$$

Из этих равенств следует, что

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = x^2 + y^2, \quad \tilde{z} = z.$$

Отсюда следует, что орбитой произвольной точки P под действием поворота $\mathbf{R}(\mathbf{z}, \varphi)$ является некоторая окружность

$$x^2 + y^2 = c,$$

где $c \in R$, с центром в начале системы координат, которая лежит на плоскости, перпендикулярной оси поворота z . Так как ортогональные повороты сохраняют расстояние между точками, то орбитами ортогонального поворота $R(\mathbf{n}, \varphi)$ также являются окружности с центрами на оси \mathbf{n} , которые лежат на плоскостях, перпендикулярных оси \mathbf{n} .

5.6. Действие поворотов на сферу S^2

Рассмотрим сферу S^2 , которая описана каноническим уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (5.18)$$

относительно некоторой ортогональной системы координат. Используя матричную нотацию, это уравнение можно записать следующим образом:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{S} \mathbf{p} = r^2,$$

где \mathbf{S} – матрица квадратичной формы

$$\mathbf{S}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

и \mathbf{p} – радиус-вектор произвольной точки $P \in E^3$. Предположим, что точка P лежит на поверхности сферы S^2 , т. е. ее координаты удовлетворяют уравнению (5.18). Как показано в разделе 3.2, произвольный поворот $R(\mathbf{n}, \varphi)$ является автоморфизмом сферы, т. е. преобразует сферу S^2 саму в себя. Поэтому точка P посредством поворота $R(\mathbf{n}, \varphi)$ преобразуется в некоторую точку \tilde{P} , которая также лежит на поверхности сферы.

Теперь рассмотрим произвольную плоскость, которая описана нормализованным каноническим уравнением

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = d \quad (5.19)$$

относительно той же ортогональной системы координат, что и сфера S^2 . Здесь \mathbf{p} обозначает радиус-вектор произвольной точки $P \in E^3$. Предположим, что точка P лежит на этой плоскости, т. е. ее координаты удовлетворяют уравнению (5.19), а действительное число d удовлетворяет условию

$$0 \leq d < r.$$

Очевидно, что

$$R(\mathbf{n}, \varphi) \mathbf{n} = R(-\mathbf{n}, \varphi) \mathbf{n} = \mathbf{n}, \quad (5.20)$$

так как ось \mathbf{n} является собственным вектором поворота $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$, как показано в разделе 3.5. Пусть

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) \mathbf{p}$$

обозначает радиус-вектор точки \tilde{P} , полученной путем преобразования точки P посредством поворота $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$. Найдем проекцию точки \tilde{P} на ось \mathbf{n} , учитывая равенства (5.20). Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{p}} &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) \mathbf{p}) = \mathbf{n}^T (\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi) \mathbf{p}) = ((\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi))^T \mathbf{n})^T \mathbf{p} = \\ &= (\mathbf{R}(-\mathbf{n}, \varphi) \mathbf{n})^T \mathbf{p} = \mathbf{n}^T \mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = d. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что точка \tilde{P} также принадлежит плоскости, описанной уравнением (5.19). Следовательно, поворот $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ также является автоморфизмом плоскостей, перпендикулярных оси \mathbf{n} , т. е. преобразует эти плоскости сами в себя.

В результате получили, что поворот $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ является одновременно автоморфизмом сферы S^2 и плоскостей, перпендикулярных оси \mathbf{n} . Следовательно, орбитами поворота $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$, действующего на сферу S^2 , являются сечения этой сферы плоскостями, перпендикулярными оси \mathbf{n} . В разделе 5.3 показано, что плоские сечения сферы S^2 являются окружностями, лежащими на этой сфере. Следовательно, орбитами поворота $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$, действующего на сферу S^2 , являются окружности, которые лежат одновременно как на сфере S^2 , так и на плоскостях, перпендикулярных оси \mathbf{n} .

5.7. Параметризованные дуги окружностей

Рассмотрим сферу S^2 , которая описана каноническим уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

относительно некоторой ортогональной системы координат. Выберем произвольную точку P_1 , которая лежит на поверхности этой сферы. Обозначим через \mathbf{p}_1 радиус-вектор этой точки. Возьмем произвольный ортогональный поворот $\mathbf{R}(\mathbf{n}, \varphi)$ и определим параметризованную кривую

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, u\varphi) \mathbf{p}_1,$$

где $u \in [0, 1]$. Так как эта кривая является орбитой ортогонального поворота, то она описывает дугу окружности, которая лежит на сфере, учи-

тывая, что ортогональные повороты являются автоморфизмами сферы. Поэтому параметризованная кривая $p(u)$ будет называться *дугой окружности сферы* S^2 .

Определим условия, которые обеспечивают гладкую стыковку сегментов одной дуги окружности. Для этого рассмотрим две дуги окружности

$$\begin{aligned} p(u) &= R(n, u\varphi) p_1, \\ q(u) &= R(n, u\varphi) p_2, \end{aligned}$$

где $u \in [0, 1]$, а радиус-вектор p_2 определяется как конечная точка дуги окружности $p(u)$, т. е.

$$p_2 = p(1) = R(n, \varphi) p_1.$$

Очевидно, что дуги окружностей $p(u)$ и $q(u)$ принадлежат одной окружности, так как являются орбитами одного и того же поворота. Покажем, что эти дуги окружностей стыкуются в точке p_2 гладким образом. Для этого достаточно показать, что дуга окружности

$$r(u) = R(n, u\varphi) R(n, u\varphi) p_1$$

является гладкой относительно параметрических производных. Но это очевидно, так как эта дуга окружности может быть представлена следующим образом:

$$r(u) = R(n, u(2\varphi)) p_1,$$

учитывая аддитивность поворотов вокруг одной оси. Отсюда следует, что параметрические производные кривых $p(u)$ и $q(u)$ удовлетворяют в точке стыковки следующим условиям:

$$p^{(n)}(0) = q^{(n)}(1) \quad (5.21)$$

для $n \in \mathbb{N}$.

Теперь рассмотрим две произвольные дуги окружности

$$p(u) = R(n, u\varphi_1) p_1, \quad (5.22)$$

$$q(u) = R(n, u\varphi_2) p_2, \quad (5.23)$$

где $u \in [0, 1]$, которые являются орбитами одного и того же поворота и имеют общую граничную точку

$$p_2 = p(1) = q(0).$$

В этом случае дуги окружностей $p(u)$ и $q(u)$ имеют разрыв параметрической производной в точке стыковки P_2 , определяемой радиус-векто-

ром \mathbf{p}_2 . Для того чтобы обеспечить параметрическую гладкость в точке стыковки, введем следующую перепараметризацию:

$$u(t) = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \quad (5.24)$$

для $t \in [t_1, t_2]$ и

$$u(t) = \frac{t - t_2}{t_3 - t_2} \quad (5.25)$$

для $t \in [t_2, t_3]$, где узлы t_1 , t_2 и t_3 должны удовлетворять следующему условию:

$$\frac{\Phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Phi_2}{t_3 - t_2}. \quad (5.26)$$

Подставив перепараметризации (5.24) и (5.25) соответственно в определения параметризованных кривых (5.22) и (5.23), получим новые параметризованные кривые

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(u(t)),$$

где $t \in [t_1, t_2]$, и

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(u(t)),$$

где $t \in [t_2, t_3]$, которые эквивалентны параметризованным кривым $\mathbf{p}(u)$ и $\mathbf{q}(u)$ соответственно. Покажем, что эти параметризованные кривые гладко стыкуются в точке P_2 . Для этого вычислим значения параметрических производных этих кривых в точке стыковки. Учитывая равенство (5.21), получим

$$\mathbf{p}^{(n)}(t_2) = \left(\frac{\Phi_1}{t_2 - t_1} \right)^n \mathbf{p}^{(n)}(1) = \left(\frac{\Phi_2}{t_3 - t_2} \right)^n \mathbf{q}^{(n)}(0) = \mathbf{q}^{(n)}(t_2)$$

для любых $n \in \mathbb{N}$.

Перепараметризации, заданные формулами (5.24) и (5.25), будут в дальнейшем использованы при построении сплайн-кривых на поверхности сферы S^2 .

Глава 6 СФЕРА S^3

Данную главу можно рассматривать как предварительный материал, который содержит аналитические выражения, используемые в дальнейшем для моделирования сплайн-кривых на поверхности трехмерной сферы. Цель этой главы – дать геометрические определения окружностей, лежащих на поверхности трехмерной сферы, а также привести аналитические выражения для построения таких окружностей.

6.1. Определение сферы S^3

Рассмотрим произвольную точку P_0 из евклидова аффинного пространства E^4 . Пусть вектор (w_0, x_0, y_0, z_0) описывает координаты точки P_0 относительно некоторой ортогональной системы координат. Тогда множество точек, координаты (w, x, y, z) которых удовлетворяют следующему уравнению второй степени:

$$(w - w_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 1,$$

называется *трехмерной единичной сферой* с центром в точке P_0 . Трехмерная сфера будет обозначаться через S^3 . В дальнейшем будем предполагать, что начало ортогональной системы координат находится в центре сферы S^3 . В этом случае сфера S^3 описывается уравнением

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

которое называется *каноническим уравнением сферы S^3* в евклидовом аффинном пространстве E^4 . Используя матричные обозначения, каноническое уравнение сферы может быть переписано следующим образом:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{S} \mathbf{p} = r^2,$$

где

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

обозначают соответственно матрицу квадратичной формы

$$\mathbf{S}(w, x, y, z) = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

и радиус-вектор произвольной точки $P \in E^4$.

6.2. Касательная плоскость

Рассмотрим сферу S^3 , которая задана каноническим уравнением

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (6.1)$$

относительно некоторой ортогональной системы координат. Это каноническое уравнение может быть переписано следующим образом:

$$F(w, x, y, z) = 0,$$

где

$$F(w, x, y, z) = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Определим градиент функции $F(w, x, y, z)$, получим

$$\text{grad } F(w, x, y, z) = \begin{bmatrix} F'_w \\ F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2w \\ 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}.$$

Из математического анализа функций действительных переменных известно, что вектор $\text{grad } F(w, x, y, z)$ перпендикулярен к поверхности сферы S^3 в любой ее точке P с координатами (w, x, y, z) , удовлетворяющими равенству (6.1). Обозначим через \mathbf{p} радиус-вектор точки P , лежащей на сфере. Видно, что в этом случае

$$\text{grad } F(w, x, y, z) = 2\mathbf{p}.$$

Отсюда следует, что радиус-вектор \mathbf{p} параллелен вектору градиента $\text{grad } F(w, x, y, z)$. Следовательно, радиус-вектор \mathbf{p} также перпендикулярен поверхности сферы S^3 в точке P . Учитывая эти замечания, касательная

плоскость к сфере S^3 в точке P_0 с координатами (w_0, x_0, y_0, z_0) может быть описана следующим уравнением:

$$2w_0(w - w_0) + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0.$$

Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$w_0w + x_0x + y_0y + z_0z = w_0^2 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Принимая во внимание равенство (6.1), последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$w_0w + x_0x + y_0y + z_0z = 1. \quad (6.2)$$

Пример. Рассмотрим сферу S^3 , заданную каноническим уравнением

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Найдем уравнение касательной плоскости к этой сфере в точке с координатами $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Используя равенство (6.2), получим

$$\frac{1}{2}w + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1$$

или

$$w + x + y + z = 2.$$

6.3. Плоские сечения

Рассмотрим единичную сферу S^3 , которая задана каноническим уравнением

$$\mathbf{p}^T \mathbf{S} \mathbf{p} = 1 \quad (6.3)$$

относительно ортогональной системы координат (O, w, x, y, z) . Рассмотрим произвольную плоскость, которая пересекает эту сферу. Эта плоскость может быть задана пересечением двух ортогональных гиперплоскостей

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{p} = d_1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = d_2, \quad (6.4)$$

где d_1 и d_2 – положительные действительные числа, которые удовлетворяют условиям

$$0 \leq d_1^2 + d_2^2 < 1,$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}$$

являются единичными векторами, которые перпендикулярны друг другу и рассматриваемой плоскости, т. е.

$$|\mathbf{m}| = 1, \quad |\mathbf{n}| = 1, \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Определим кривую, которая является пересечением сферы S^3 и заданной плоскости. Для этой цели введем новую ортогональную систему координат $(O, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$, где базисные векторы построены следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{m}, \quad \tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{n}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{m} \times \mathbf{n} \times \mathbf{w}, \quad \tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{w}} \times \tilde{\mathbf{x}}.$$

Тогда матрица перехода от базиса $(\mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ к базису $(\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$ может быть определена следующим образом:

$$\mathbf{R} = [\tilde{\mathbf{w}} \quad \tilde{\mathbf{x}} \quad \tilde{\mathbf{y}} \quad \tilde{\mathbf{z}}].$$

Очевидно, что матрица \mathbf{R} является ортогональной, так как она составлена из осей ортогональной системы координат $(O, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$, т. е.

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I},$$

где \mathbf{I} – единичная матрица. Координатные представления квадратичной формы \mathbf{S} и осей \mathbf{m} и \mathbf{n} преобразуются при переходе к новой системе координат $(O, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$ следующим образом:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{S} \mathbf{R} = \mathbf{S}, \\ \mathbf{R}^T \mathbf{m} = \tilde{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{R}^T \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{z}}.$$

Введем обозначение для радиус-вектора

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{R}^T \mathbf{p},$$

который описывает координаты точки $P \in E^4$ относительно новой системы координат $(O, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$. Используя все эти обозначения, канонические уравнения сферы S^3 и секущей плоскости описываются относительно новой системы координат $(O, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$ следующим образом:

$$(\mathbf{R}^T \mathbf{p})^T (\mathbf{R}^T \mathbf{S} \mathbf{R}) (\mathbf{R}^T \mathbf{p}) = (\mathbf{R}^T \mathbf{p}) \mathbf{S} (\mathbf{R}^T \mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{p}}^T \mathbf{S} \tilde{\mathbf{p}} = 1,$$

$$(\mathbf{R}^T \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{R}^T \mathbf{p}) = \tilde{w} \cdot (\mathbf{R}^T \mathbf{p}) = \tilde{w} \cdot \tilde{\mathbf{p}} = d_1,$$

$$(\mathbf{R}^T \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{R}^T \mathbf{p}) = \tilde{z} \cdot (\mathbf{R}^T \mathbf{p}) = \tilde{z} \cdot \tilde{\mathbf{p}} = d_2.$$

По координатам эти уравнения могут быть записаны следующим образом:

$$\tilde{w}^2 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = 1, \quad (6.5)$$

$$\tilde{w} = d_1, \quad \tilde{z} = d_2, \quad (6.6)$$

где $(\tilde{w}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ – вектор координат точки P относительно новой системы координат $(O, \tilde{w}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Подстановка значений \tilde{w} и \tilde{z} из уравнений (6.6) в уравнение (6.5) дает

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 1 - d_1^2 - d_2^2. \quad (6.7)$$

Уравнение (6.7) описывает окружность, которая лежит на поверхности сферы S^3 . Следовательно, пересечением единичной сферы S^3 и плоскости является окружность.

Если секущая плоскость, описанная уравнениями (6.6), проходит через центр сферы S^3 , то действительные числа d_1 и d_2 удовлетворяют условию

$$d_1^2 + d_2^2 = 0,$$

которое эквивалентно следующим равенствам

$$d_1 = d_2 = 0.$$

В этом случае уравнение (6.7) примет вид

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 1.$$

Отсюда следует, что в этом случае пересечением единичной сферы S^3 и плоскости, проходящей через центр сферы, является единичная окружность S^1 . Эта окружность называется *большой окружностью* на поверхности сферы S^3 .

6.4. Геодезические линии на сфере

Рассмотрим единичную сферу S^3 , заданную каноническим уравнением

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (6.8)$$

относительно некоторой ортогональной системы координат, где (w, x, y, z) – координаты произвольной точки $P \in E^4$. Возьмем на поверхности сфе-

ры S^3 две произвольные различные точки P_1 и P_2 . Пусть (w_1, x_1, y_1, z_1) и (w_2, x_2, y_2, z_2) будут координатами соответственно точек P_1 и P_2 . Проблема заключается в нахождении на поверхности сферы S^3 геодезической линии

$$\mathbf{x}(t) = (w(t), x(t), y(t), z(t)),$$

где $t \in [t_1, t_2]$, которая соединяет точку P_1 с точкой P_2 . Здесь t_1 и t_2 являются некоторыми заданными действительными числами. Это значит, что параметризованная кривая $\mathbf{x}(t)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\mathbf{x}(t_1) = (w_1, x_1, y_1, z_1), \quad \mathbf{x}(t_2) = (w_2, x_2, y_2, z_2).$$

Из вариационного исчисления известно, что геодезическая $\mathbf{x}(t)$ может быть определена как экстремум функционала энергии

$$E(\mathbf{x}(t)) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{w}^2(t) + \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)) dt$$

при условии, что координаты (w, x, y, z) удовлетворяют уравнению (6.8).

В вариационном исчислении показано, что для нахождения экстремума функционала энергии нужно найти экстремумы функционала

$$E(\mathbf{x}(t), \lambda) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda)(t) dt,$$

где $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda)$ – функция Лагранжа, которая определяется следующим образом:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda) = \dot{w}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \lambda \varphi(w, x, y, z).$$

Здесь

$$\varphi(w, x, y, z) = 0, \tag{6.9}$$

ограничения, которым должны удовлетворять экстремумы функционала энергии. Используя уравнение (6.8), эти ограничения могут быть записаны как

$$\varphi(w, x, y, z) = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Отсюда следует, что функция Лагранжа $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda)$ может быть определена как

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda) = \dot{w}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \lambda(w^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Следовательно, функционал $E(\mathbf{x}(t), \lambda)$ определяется следующим образом:

$$E(\mathbf{x}(t), \lambda) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda)(t) dt = \\ = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{w}^2(t) + \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) + \lambda(w^2(t) + x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) - 1)) dt.$$

Экстремали функционала $E(\mathbf{x}(t), \lambda)$ являются решениями следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\lambda \varphi'_w - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\dot{w}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{\partial \dot{w}} = 0, \quad \lambda \varphi'_x - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\dot{w}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{\partial \dot{x}} = 0, \\ \lambda \varphi'_y - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\dot{w}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{\partial \dot{y}} = 0, \quad \lambda \varphi'_z - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\dot{w}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{\partial \dot{z}} = 0$$

при условии, заданном равенством (6.9). Выполнив дифференцирование, эту систему можно переписать следующим образом:

$$\lambda w - \ddot{w} = 0, \quad \lambda x - \ddot{x} = 0, \\ \lambda y - \ddot{y} = 0, \quad \lambda z - \ddot{z} = 0. \quad (6.10)$$

Полученная система дифференциальных уравнений эквивалентна системе

$$\lambda w^2 - w\ddot{w} = 0, \quad \lambda x^2 - x\ddot{x} = 0, \\ \lambda y^2 - y\ddot{y} = 0, \quad \lambda z^2 - z\ddot{z} = 0.$$

Из этих равенств следует равенство

$$w\ddot{w} + x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = \lambda(w^2 + x^2 + y^2 + z^2),$$

которое, учитывая равенство (6.8), эквивалентно следующему равенству:

$$w\ddot{w} + x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = \lambda. \quad (6.11)$$

Теперь два раза продифференцируем равенство (6.8) по переменной t , получим равенство

$$\dot{w}^2 + w\ddot{w} + \dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} + \dot{z}^2 + z\ddot{z} = 0,$$

которое может быть переписано следующим образом:

$$w\ddot{w} + x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = -(\dot{w}^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (6.12)$$

Предположим, что кривая $\mathbf{x}(t)$ является натурально параметризованной, т. е.

$$\dot{w}^2(t) + \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) = 1.$$

Используя это предположение, равенство (6.12) можно переписать следующим образом:

$$w\ddot{w} + x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} = -1.$$

Подстановка этого равенства в равенство (6.11) дает $\lambda = -1$. Подставив это значение λ в равенства (6.10), получим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{w} + w &= 0, & \ddot{x} + x &= 0, \\ \ddot{y} + y &= 0, & \ddot{z} + z &= 0, \end{aligned}$$

которая имеет следующее общее решение:

$$\begin{aligned} w &= a_0 \cos t + b_0 \sin t, & x &= a_1 \cos t + b_1 \sin t, \\ y &= a_2 \cos t + b_2 \sin t, & z &= a_3 \cos t + b_3 \sin t, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где $t \in \mathbb{R}$. Используя векторные обозначения, это общее решение можно записать следующим образом:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} \cos t + \mathbf{b} \sin t \quad (6.14)$$

для $t \in \mathbb{R}$. Тогда векторы

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

могут быть определены, учитывая граничные условия, из системы уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_1) &= \mathbf{a} \cos t_1 + \mathbf{b} \sin t_1, \\ \mathbf{x}(t_2) &= \mathbf{a} \cos t_2 + \mathbf{b} \sin t_2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Из равенства (6.14) видно, что геодезическая линия $\mathbf{x}(t)$ лежит на плоскости, определенной началом системы координат и векторами \mathbf{a} , \mathbf{b} . Следовательно, геодезическая линия $\mathbf{x}(t)$ является большой окружностью сферы S^3 .

Кроме того, подстановка равенств (6.14) в равенство (6.8) показывает, что

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \cos^2 t + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cos t \sin t + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \sin^2 t = 1$$

для любых $t \in R$. Это равенство выполняется только при условии, если

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1.$$

Отсюда следует, что векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} – взаимно перпендикулярны и длина каждого из них равна единице.

6.5. Орбиты поворотов

Рассмотрим единичную сферу S^3 , заданную каноническим уравнением

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (6.16)$$

относительно некоторой ортогональной системы координат. Используя матричные обозначения, это уравнение может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{pS}\mathbf{p}^T = 1,$$

где \mathbf{S} обозначает квадратичную форму сферы S^3 , а \mathbf{p} – радиус-вектор произвольной точки P , которая лежит на поверхности сферы. Заметим, что здесь

$$\mathbf{p} = [w \quad x \quad y \quad z]$$

представляется вектор-строкой. Из равенства (6.16) следует, что любая точка, лежащая на поверхности сферы S^3 , может рассматриваться как вектор конечного поворота или единичный кватернион. Очевидно, что единичная сфера S^3 инвариантна относительно ортогональных поворотов пространства R^4 , так как

$$\begin{aligned} (\mathbf{pR})\mathbf{S}(\mathbf{pR})^T &= \mathbf{pRSR}^T \mathbf{p}^T = \\ &= \mathbf{pRR}^T \mathbf{p}^T = \mathbf{pp}^T = \mathbf{pSp}^T = 1 \end{aligned}$$

для любой ортогональной матрицы \mathbf{R} . Следовательно, ортогональные повороты являются автоморфизмами единичной сферы S^3 .

Возьмем произвольный вектор конечного поворота

$$\mathbf{r}(n, \varphi) = \cos \varphi + \sin \varphi \mathbf{n},$$

который описывает поворот вокруг оси \mathbf{n} на угол φ . Композицию векторов конечных поворотов \mathbf{r} и \mathbf{p} можно представить, используя матричные обозначения, следующим образом:

$$pr = pR,$$

где матрица

$$R = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ -r_1 & r_0 & -r_3 & r_2 \\ -r_2 & r_3 & r_0 & -r_1 \\ -r_3 & -r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix}$$

является ортогональной. Найдем собственные векторы этой матрицы R . Для этой цели рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det(R - \lambda I) = 0.$$

Раскрывая определитель, получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \det(R - \lambda I) &= (r_0 - \lambda)^2((r_0 - \lambda)^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - \\ &- r_1^2(-(r_0 - \lambda)^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2) + r_2^2((r_0 - \lambda)^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - \\ &- r_3^2(-(r_0 - \lambda)^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2) = (r_0 - \lambda)^2(\lambda^2 - 2r_0\lambda + 1) + \\ &+ r_1^2(\lambda^2 - 2r_0\lambda + 1) + r_2^2(\lambda^2 - 2r_0\lambda + 1) + r_3^2(\lambda^2 - 2r_0\lambda + 1) = \\ &= (\lambda^2 - 2r_0\lambda + 1)((r_0 - \lambda)^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = (\lambda^2 - 2r_0\lambda + 1)^2 = 0, \end{aligned}$$

принимая во внимание, что

$$r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1.$$

Следовательно, собственные значения ортогональной матрицы R являются корнями следующего квадратного уравнения:

$$\lambda^2 - 2r_0\lambda + 1 = 0.$$

Разрешая это уравнение относительно неизвестной λ , получим

$$\lambda_{1,2} = r_0 \pm \sqrt{r_0^2 - 1},$$

что эквивалентно

$$\lambda_{1,2} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi,$$

принимая во внимание структуру вектора конечного поворота r . В результате получили, что собственные значения ортогональной матрицы R являются комплексными числами. Чтобы найти соответствующие собственные векторы, подставим любое из этих собственных значений в следующее уравнение:

$$vR = v\lambda.$$

Получим равенство относительно неизвестного вектора \mathbf{v}

$$\mathbf{v}\mathbf{R} = \mathbf{v}\lambda_1, \quad (6.17)$$

которое может быть преобразовано к виду

$$\mathbf{v}(\mathbf{R} - \lambda_1\mathbf{I}) = 0.$$

Это уравнение может быть переписано по координатам следующим образом:

$$\begin{aligned} v_0(r_0 - \lambda_1) - v_1r_1 - v_2r_2 - v_3r_3 &= 0, \\ v_0r_1 + v_1(r_0 - \lambda_1) + v_2r_3 - v_3r_2 &= 0, \\ v_0r_2 - v_1r_3 + v_2(r_0 - \lambda_1) + v_3r_1 &= 0, \\ v_0r_3 + v_1r_2 - v_2r_1 + v_3(r_0 - \lambda_1) &= 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание структуру вектора конечного поворота \mathbf{r} , полученная система уравнений может быть записана так:

$$\begin{aligned} -iv_0 \sin \varphi - v_1n_1 \sin \varphi - v_2n_2 \sin \varphi - v_3n_3 \sin \varphi &= 0, \\ v_0n_1 \sin \varphi - iv_1 \sin \varphi + v_2n_3 \sin \varphi - v_3n_2 \sin \varphi &= 0, \\ v_0n_2 \sin \varphi - v_1n_3 \sin \varphi - iv_2 \sin \varphi + v_3n_1 \sin \varphi &= 0, \\ v_0n_3 \sin \varphi + v_1n_2 \sin \varphi - v_2n_1 \sin \varphi - iv_3 \sin \varphi &= 0, \end{aligned}$$

что эквивалентно системе

$$\begin{aligned} iv_0 + v_1n_1 + v_2n_2 + v_3n_3 &= 0, & v_0n_1 - iv_1 + v_2n_3 - v_3n_2 &= 0, \\ v_0n_2 - v_1n_3 - iv_2 + v_3n_1 &= 0, & v_0n_3 + v_1n_2 - v_2n_1 - iv_3 &= 0. \end{aligned}$$

Видно, что вектор

$$\mathbf{v} = [i \quad n_1 \quad n_2 \quad n_3]$$

является решением этой системы линейных уравнений, так как

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Определим два действительных вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [0 \quad n_1 \quad n_2 \quad n_3], \\ \mathbf{w} &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]. \end{aligned}$$

Тогда вектор \mathbf{v} может быть представлен в виде суммы

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}.$$

Подстановка собственного вектора \mathbf{v} и собственного значения λ_1 в уравнение (6.17) дает уравнение

$$(\mathbf{u} + i\mathbf{w})\mathbf{R} = (\mathbf{u} + i\mathbf{w})(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

которое может быть преобразовано к виду

$$\mathbf{u}\mathbf{R} + i\mathbf{w}\mathbf{R} = (\cos \varphi \mathbf{u} - \sin \varphi \mathbf{w}) + i(\sin \varphi \mathbf{u} + \cos \varphi \mathbf{w}).$$

Это уравнение эквивалентно следующим двум действительным векторным уравнениям:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\mathbf{R} &= \cos \varphi \mathbf{u} - \sin \varphi \mathbf{w}, \\ \mathbf{w}\mathbf{R} &= \sin \varphi \mathbf{u} + \cos \varphi \mathbf{w},\end{aligned}$$

которые в свою очередь могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \cos \varphi \mathbf{u}\mathbf{R}^T - \sin \varphi \mathbf{w}\mathbf{R}^T, \\ \mathbf{w} &= \sin \varphi \mathbf{u}\mathbf{R}^T + \cos \varphi \mathbf{w}\mathbf{R}^T,\end{aligned}$$

принимая во внимание, что матрица \mathbf{R} является ортогональной. Разрешим эти уравнения относительно векторов $\mathbf{u}\mathbf{R}^T$ и $\mathbf{w}\mathbf{R}^T$. Получим

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\mathbf{R}^T &= \cos \varphi \mathbf{u} + \sin \varphi \mathbf{w}, \\ \mathbf{w}\mathbf{R}^T &= -\sin \varphi \mathbf{u} + \cos \varphi \mathbf{w}.\end{aligned}\tag{6.18}$$

Теперь определим плоскость

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} = 0.\tag{6.19}$$

Тогда из уравнений (6.18) и (6.19) следует, что

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}\mathbf{R}) \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{p}\mathbf{R}\mathbf{u}^T = \mathbf{p}(\mathbf{u}\mathbf{R}^T)^T = \mathbf{p}(\cos \varphi \mathbf{u} + \sin \varphi \mathbf{w})^T = \\ &= \cos \varphi \mathbf{p}\mathbf{u}^T + \sin \varphi \mathbf{p}\mathbf{w}^T = \cos \varphi (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}) + \sin \varphi (\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}) = 0\end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned}(\mathbf{p}\mathbf{R}) \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{p}\mathbf{R}\mathbf{w}^T = \mathbf{p}(\mathbf{w}\mathbf{R}^T)^T = \mathbf{p}(-\sin \varphi \mathbf{u} + \cos \varphi \mathbf{w})^T = \\ &= -\sin \varphi \mathbf{p}\mathbf{u}^T + \cos \varphi \mathbf{p}\mathbf{w}^T = -\sin \varphi (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}) + \cos \varphi (\mathbf{p} \cdot \mathbf{w}) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что плоскость, определенная равенствами (6.19), инвариантна относительно ортогонального поворота, представленного матрицей \mathbf{R} .

В результате получили, что как единичная сфера S^3 , так и плоскость, заданная равенствами (6.19), инвариантны относительно ортогонального поворота $\mathbf{r}(\mathbf{n}, \varphi)$. Отсюда следует, что орбитой ортогонального поворота $\mathbf{r}(\mathbf{n}, \varphi)$, который действует на единичную сферу S^3 , является пересечение сферы S^3 и плоскости, заданной равенствами (6.19). Но, как показа-

но в разделе 6.3, это пересечение – окружность сферы S^3 . Следовательно, орбитой ортогонального поворота $r(\mathbf{n}, \varphi)$, действующего на единичную сферу S^3 , также является окружность сферы S^3 .

Так как каждой точке сферы S^3 соответствует некоторая ориентация, то можно сказать, что орбита ортогонального поворота $r(\mathbf{n}, \varphi)$, действующего на единичную сферу S^3 , является окружностью ориентаций.

6.6. Действие поворотов на сферу S^3

Рассмотрим произвольный ортогональный поворот, который представляется ортогональной матрицей третьего порядка $R(\mathbf{n}, \varphi)$. Определим следующую матрицу четвертого порядка:

$$H(\mathbf{n}, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\mathbf{n}, \varphi) \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что матрица $H(\mathbf{n}, \varphi)$ также является ортогональной. Следовательно, эта матрица описывает некоторый ортогональный поворот в евклидовом аффинном пространстве E^4 . Отсюда следует, что единичная сфера S^3 инвариантна относительно действия матрицы $H(\mathbf{n}, \varphi)$.

Определим орбиты ортогонального поворота $H(\mathbf{n}, \varphi)$ при его действии на единичную сферу S^3 . Для этой цели введем векторы

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix},$$

используя которые, определим секущую плоскость

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{p} = d_1, \quad \mathbf{h} \cdot \mathbf{p} = d_2, \quad (6.20)$$

где действительные константы d_1 и d_2 удовлетворяют условию

$$0 \leq d_1^2 + d_2^2 < 1.$$

Очевидно, что эта секущая плоскость инвариантна относительно действий ортогонального поворота $H(\mathbf{n}, \varphi)$, так как

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot (H(\mathbf{n}, \varphi) \mathbf{p}) &= \mathbf{w}^T H(\mathbf{n}, \varphi) \mathbf{p} = \mathbf{w}^T \mathbf{p} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{p} = d_1, \\ \mathbf{h} \cdot (H(\mathbf{n}, \varphi) \mathbf{p}) &= \mathbf{h}^T H(\mathbf{n}, \varphi) \mathbf{p} = (H(\mathbf{n}, \varphi) \mathbf{h})^T \mathbf{p} = \mathbf{h}^T \mathbf{p} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{p} = d_2. \end{aligned}$$

Таким образом, получили, что единичная сфера S^3 и плоскость, заданная равенствами (6.20), одновременно инвариантны относительно действий ортогонального поворота $H(n, \varphi)$. Следовательно, орбита ортогонального поворота $H(n, \varphi)$, действующего на единичную сферу S^3 , является пересечением этой единичной сферы S^3 и секущей плоскости, заданной равенствами (6.20). В общем случае, как показано в разделе 6.3, это пересечение является дугой окружности, лежащей на единичной сфере S^3 . Следовательно, орбитой ортогонального поворота $H(n, \varphi)$, действующего на единичную сферу S^3 , является дуга окружности, лежащая на единичной сфере S^3 .

Так как ортогональный поворот $H(n, \varphi)$ был выбран произвольно, то это замечание касается всех ортогональных поворотов. Ориентационные кривые, которые соответствуют окружностям, лежащим на поверхности единичной сферы S^3 , будут называться *ориентационными окружностями*.

6.7. Параметризованные дуги больших окружностей

Возьмем произвольную ориентацию P и некоторую матрицу поворота $R(n, \varphi)$. Определим параметризованную кривую

$$P(u) = R(n, u\varphi)P$$

для $u \in [0, 1]$. Из результатов, полученных в предыдущем разделе, следует, что параметризованная кривая $P(u)$ определяет некоторую дугу окружности сферы S^3 . Таким образом, параметризованная кривая $P(u)$ описывает параметризованную дугу окружности на сфере S^3 или параметризованную дугу ориентаций.

Определим условия, которые обеспечивают гладкую стыковку сегментов одной дуги окружности ориентаций. Для этого рассмотрим две дуги окружности

$$P(u) = R(n, u\varphi)P_1, \quad Q(u) = R(n, u\varphi)P_2,$$

где $u \in [0, 1]$, а ориентация P_2 определяется как конечная точка дуги окружности $P(u)$, т. е.

$$P_2 = P(1) = R(n, \varphi)P_1.$$

Очевидно, что дуги окружностей $P(u)$ и $Q(u)$ принадлежат одной окружности, так как являются орбитами одного и того же поворота. По-

кажем, что эти дуги окружностей стыкуются в точке P_2 гладким образом. Для этого достаточно показать, что дуга окружности

$$R(u) = R(n, u\varphi)R(n, u\varphi)P_1$$

является гладкой относительно параметрических производных. Но это очевидно, так как эта дуга окружности может быть представлена следующим образом:

$$R(u) = R(n, u(2\varphi))P_1,$$

учитывая аддитивность поворотов вокруг одной оси. Отсюда следует, что параметрические производные кривых $P(u)$ и $Q(u)$ удовлетворяют в точке стыковки следующим условиям:

$$P^{(n)}(0) = Q^{(n)}(1). \quad (6.21)$$

Теперь рассмотрим две произвольные дуги окружности ориентаций

$$P(u) = R(n, u\varphi_1)P_1, \quad (6.22)$$

$$Q(u) = R(n, u\varphi_2)P_2, \quad (6.23)$$

где $u \in [0, 1]$, которые являются орбитами одного и того же поворота и имеют общую граничную ориентацию

$$P_2 = P(1) = Q(0).$$

В этом случае дуги окружностей $P(u)$ и $Q(u)$ имеют разрыв параметрической производной в точке стыковки P_2 , определяемой ориентацией P_2 . Для того чтобы обеспечить параметрическую гладкость в точке стыковки, введем следующую перепараметризацию:

$$u(t) = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \quad (6.24)$$

для $t \in [t_1, t_2]$ и

$$u(t) = \frac{t - t_2}{t_3 - t_2} \quad (6.25)$$

для $t \in [t_2, t_3]$, где узлы t_1 , t_2 и t_3 должны удовлетворять следующему условию:

$$\frac{\varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\varphi_2}{t_3 - t_2}. \quad (6.26)$$

Подставив перепараметризации (6.24) и (6.25) соответственно в определения параметризованных кривых (6.22) и (6.23), получим новые параметризованные кривые

$$P(t) = P(u(t)),$$

где $t \in [t_1, t_2]$, и

$$Q(t) = Q(u(t)),$$

где $t \in [t_2, t_3]$, которые эквивалентны параметризованным кривым $P(u)$ и $Q(u)$ соответственно. Покажем, что эти параметризованные кривые гладко стыкуются в точке P_2 . Для этого вычислим значения параметрических производных этих кривых в точке стыковки. Учитывая равенство (6.21), получим

$$P^{(n)}(t_2) = \left(\frac{\Phi_1}{t_2 - t_1} \right)^n P^{(n)}(1) = \left(\frac{\Phi_2}{t_3 - t_2} \right)^n Q^{(n)}(0) = Q^{(n)}(t_2)$$

для любых $n \in N$.

Перепараметризации, заданные формулами (6.24) и (6.25), будут в дальнейшем использованы при построении сплайн-кривых на поверхности сферы S^3 .

6.8. Параметризованные дуги малых окружностей

Рассмотрим произвольную ортогональную матрицу четвертого порядка, которая имеет следующую структуру:

$$H(n, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(n, \varphi) \end{bmatrix},$$

где $R(n, \varphi)$ – ортогональная матрица третьего порядка. Выберем на поверхности сферы S^3 произвольную точку P . Обозначим через p радиус-вектор точки P . Определим параметризованную кривую

$$p(u) = H(n, u\varphi) p \quad (6.27)$$

для $u \in [0, 1]$. Из результатов, полученных в разделе 6.6, следует, что в общем случае параметризованная кривая $p(u)$ является дугой малой ориентационной окружности на поверхности единичной сферы S^3 . Поэтому параметризованную кривую $p(u)$ также будем называть дугой *малой ориентационной окружности*.

Опишем дугу малой ориентационной окружности $p(u)$, используя ортогональные матрицы третьего порядка. Для этого представим единичный вектор p следующим образом:

$$p = \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi m \end{bmatrix} = r(m, \psi).$$

Используя это представление, равенство (6.27) может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned} p(u) &= H(n, u\varphi)r(m, \psi) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(n, u\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi R(n, u\varphi)m \end{bmatrix} = r(R(n, u\varphi)m, \psi). \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$m(u) = R(n, u\varphi)m$$

для $u \in [0, 1]$. Видно, что параметризованная кривая $m(u)$ описывает дугу окружности на единичной сфере S^2 . Тогда параметризованная ориентационная кривая $p(u)$ может быть описана при помощи ортогональных матриц третьего порядка следующим образом:

$$P(u) = R(m(u), \psi) \quad (6.28)$$

для $u \in [0, 1]$. Следовательно, дуга малой ориентационной окружности может быть представлена формулой (6.28), где $m(u)$ описывает дугу окружности на единичной сфере S^2 .

Рассмотрим две дуги ориентационных окружностей

$$P(u) = R(R(n, u\varphi_1)m_1, \psi),$$

$$Q(u) = R(R(n, u\varphi_2)m_2, \psi)$$

для $u \in [0, 1]$, которые стыкуются в общей точке

$$P(1) = Q(0).$$

Из этого равенства следует, что

$$R(n, \varphi_1)m_1 = R(n, 0)m_2 = m_2.$$

Отсюда следует, что параметризованные кривые

$$p(u) = R(n, u\varphi_1)m_1,$$

$$q(u) = R(n, u\varphi_2)m_2$$

для $u \in [0, 1]$ описывают дуги одной и той же окружности на поверхности единичной сферы S^2 , которые стыкуются в точке m_2 . Поэтому ориентационные параметризованные кривые $P(u)$ и $Q(u)$ описывают дуги одной и той же ориентационной окружности, которые стыкуются в общей ориентации. Но эти параметризованные кривые имеют разрыв по пара-

метрическим производным в точке стыковки. Для того чтобы обеспечить параметрическую непрерывность в точке стыковки дуг ориентационных окружностей $P(u)$ и $Q(u)$, введем следующую перепараметризацию:

$$u(t) = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

для $t \in [t_1, t_2]$ и

$$u(t) = \frac{t - t_2}{t_3 - t_2}$$

для $t \in [t_2, t_3]$, где узлы t_1 , t_2 и t_3 удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{\varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\varphi_2}{t_3 - t_2}. \quad (6.29)$$

Теперь определим параметризованные кривые

$$P(t) = P(u(t)) \quad (6.30)$$

для $t \in [t_1, t_2]$ и

$$Q(t) = Q(u(t)) \quad (6.31)$$

для $t \in [t_2, t_3]$, которые эквивалентны параметризованным ориентационным кривым $P(u)$ и $Q(u)$. В следующей теореме доказано, что параметризованные ориентационные кривые $P(t)$ и $Q(t)$ гладко стыкуются в общей ориентации.

Теорема. Параметризованные ориентационные кривые $P(t)$ и $Q(t)$, определенные равенствами (6.30) и (6.31), удовлетворяют следующим условиям:

$$P^{(n)}(t_2) = Q^{(n)}(t_2)$$

для всех $n \in N$ при условии, что узлы t_1 , t_2 и t_3 удовлетворяют равенству (6.29).

Доказательство. Рассмотрим параметризованные ориентационные кривые $P(t)$ и $Q(t)$, которые определены равенствами (6.30) и (6.31), где узлы t_1 , t_2 и t_3 удовлетворяют равенству (6.29). Равенства (6.30) и (6.31) можно переписать следующим образом:

$$P(t) = R(R(n, u(t)\varphi_1)m_1, \psi),$$

$$Q(t) = R(R(n, u(t)\varphi_2)m_2, \psi)$$

для $u \in [0, 1]$. Рассмотрим параметризованные кривые

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}(u(t)) = \mathbf{R}(n, u(t)\varphi_1)\mathbf{m}_1, \\ \mathbf{q}(t) &= \mathbf{q}(u(t)) = \mathbf{R}(n, u(t)\varphi_2)\mathbf{m}_2, \end{aligned}$$

которые описывают дуги окружностей на поверхности единичной сферы S^2 . Как показано в разделе 5.7, параметризованные кривые $\mathbf{p}(t)$ и $\mathbf{q}(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\mathbf{p}^{(n)}(t_2) = \mathbf{q}^{(n)}(t_2) \quad (6.32)$$

для любых $n \in N$. Для того чтобы упростить и прояснить дальнейшие рассуждения, введем следующие векторные функции конечных поворотов:

$$\mathbf{r}(\mathbf{p}(t), \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \mathbf{p}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}(\mathbf{q}(t), \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \mathbf{q}(t) \end{bmatrix},$$

которые соответствуют параметризованным ориентационным кривым $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{Q}(t)$. Очевидно, что эти векторные функции удовлетворяют следующим условиям в точке стыковки, учитывая равенство (6.32):

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}(\mathbf{p}(t), \psi))^{(n)}(t_2) &= (\mathbf{r}(\mathbf{p}^{(n)}(t), 0))(t_2) = \\ &= (\mathbf{r}(\mathbf{q}^{(n)}(t), 0))(t_2) = (\mathbf{r}(\mathbf{q}(t), \psi))^{(n)}(t_2) \end{aligned}$$

для любых $n \in N$. В свою очередь из этих уравнений следует, что

$$\mathbf{P}^{(n)}(t_2) = \mathbf{Q}^{(n)}(t_2)$$

для любых $n \in N$.

Теорема доказана.

Глава 7

СМЕШЕНИЕ ПАРАМЕТРИЗОВАННЫХ КРИВЫХ НА ГРУППЕ ЛИ

В данной главе определены два класса полиномов, которые в дальнейшем используются для смешения параметризованных кривых на группе Ли. Рассматривается применение предложенного подхода к моделированию сплайн-кривых на гладком многообразии, на котором определено действие группы Ли. В последующих главах предложенный подход используется для моделирования сплайн-кривых на поверхностях двумерной и трехмерной сфер.

Глава имеет следующую структуру. Сначала рассмотрены полиномы Бернштейна и доказаны некоторые их свойства. Потом на базе полиномов Бернштейна определены два класса полиномов, которые в дальнейшем используются для смешения однопараметрических групп Ли. В заключение главы показано, как с помощью предложенных полиномов смешивать однопараметрические подгруппы группы Ли и моделировать сплайновые кривые на многообразии, на котором определено действие группы Ли.

Более подробная информация о полиномах Бернштейна представлена в работах [38–41]. Полиномы, предназначенные для смешения параметризованных кривых на группе Ли, были определены автором и рассмотрены в статьях [42–46]. Для подробного ознакомления с теорией сплайн-функций можно использовать книги [47–51].

Переработанная версия данной главы базируется на статье автора [80], в которой введены новые классы полиномов для сглаживания параметризованных кривых на группе Ли.

7.1. Полиномы Бернштейна

Рассмотрим формулу бинома Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m,$$

где $n \in \mathbb{N}$, a и b – произвольные действительные числа. Здесь

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

обозначают биномиальные коэффициенты. Положим

$$a = 1 - u, \quad b = u,$$

где $u \in [0, 1]$, и подставим эти значения в формулу бинома Ньютона. Получим

$$((1-u) + u)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m (1-u)^{n-m} u^m$$

для любых $u \in [0, 1]$ или эквивалентную формулу

$$\sum_{m=0}^n C_n^m (1-u)^{n-m} u^m = 1.$$

Введем следующие обозначения для полиномов под знаком суммы:

$$b_{m,n}(u) = C_n^m (1-u)^{n-m} u^m,$$

где $m \in \{0, 1, \dots, n\}$. Тогда полученное равенство может быть переписано следующим образом:

$$\sum_{m=0}^n b_{m,n}(u) = 1$$

для любых $u \in [0, 1]$. При этом следует отметить, что

$$b_{0,0}(u) = 1.$$

Полиномы $b_{m,n}(u)$ называются *полиномами Бернштейна степени n* .

На рис. 7.1 показаны графики некоторых полиномов Бернштейна младших степеней. В геометрических приложениях наиболее часто используются следующие полиномы Бернштейна младших степеней:

$$b_{0,1}(u) = 1 - u, \quad b_{1,1}(u) = u,$$

$$b_{0,2}(u) = (1-u)^2, \quad b_{1,2}(u) = 2(1-u)u, \quad b_{2,2}(u) = u^2,$$

$$b_{0,3}(u) = (1-u)^3, \quad b_{1,3}(u) = 3(1-u)^2 u, \quad b_{2,3}(u) = 3(1-u)u^2, \quad b_{3,3}(u) = u^3.$$

Профили этих полиномов Бернштейна и показаны на рис. 7.1.

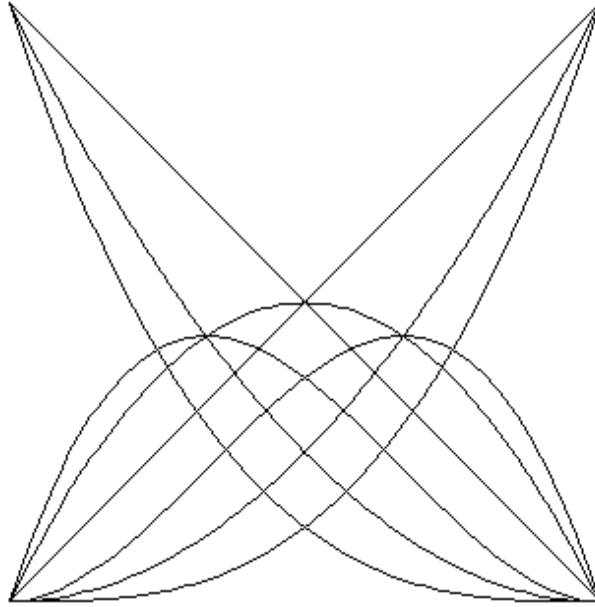


Рис. 7.1. Профили полиномов Бернштейна

Из определения полиномов Бернштейна следует, что они удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$b_{m,n}(0) = \begin{cases} 0, & 0 < m \leq n, \\ 1, & m = 0, \end{cases} \quad (7.1)$$

и

$$b_{m,n}(1) = \begin{cases} 0, & 0 \leq m < n, \\ 1, & m = n. \end{cases} \quad (7.2)$$

Заменим в полиномах Бернштейна аргумент u на значение $(1-u)$, учитывая, что биномиальные коэффициенты удовлетворяют равенству

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

получим

$$b_{m,n}(1-u) = C_n^m u^{n-m} (1-u)^m = C_n^{n-m} (1-u)^m u^{n-m} = b_{n-m,n}(u).$$

В результате получили, что полиномы Бернштейна удовлетворяют следующему свойству:

$$b_{m,n}(1-u) = b_{n-m,n}(u),$$

где $m \in \{0, 1, \dots, n\}$.

7.2. Дифференцирование полиномов Бернштейна

Найдем общую формулу, которая может быть использована для дифференцирования полиномов Бернштейна. Для этой цели рассмотрим произвольный полином Бернштейна $b_{m,n}(u)$, где индекс m удовлетворяет следующим условиям:

$$0 < m < n.$$

Производная от полинома $b_{m,n}(u)$ может быть определена следующим образом:

$$\begin{aligned} (b_{m,n}(u))' &= (C_n^m (1-u)^{n-m} u^m)' = \\ &= mC_n^m (1-u)^{n-m} u^{m-1} - (n-m)C_n^m (1-u)^{n-m-1} u^m = \\ &= \frac{mn!}{m!(n-m)!} (1-u)^{(n-1)-(m-1)} u^{m-1} - \frac{(n-m)n!}{m!(n-m)!} (1-u)^{(n-1)-m} u^m = \\ &= \frac{mn(n-1)!}{m(m-1)!(n-m)!} (1-u)^{(n-1)-(m-1)} u^{m-1} - \frac{(n-m)n(n-1)!}{m!(n-m)(n-1-m)!} (1-u)^{(n-1)-m} u^m = \\ &= nC_{n-1}^{m-1} (1-u)^{(n-1)-(m-1)} u^{m-1} - nC_{n-1}^m (1-u)^{(n-1)-m} u^m = \\ &= n(b_{m-1,n-1}(u) - b_{m,n-1}(u)). \end{aligned}$$

В свою очередь производные от полиномов Бернштейна $b_{0,n}(u)$ и $b_{n,n}(u)$ могут быть определены следующим образом:

$$(b_{0,n}(u))' = ((1-u)^n)' = -n(1-u)^{n-1} = -nb_{0,n-1}(u)$$

и

$$(b_{n,n}(u))' = (u^n)' = nu^{n-1} = nb_{n-1,n-1}(u).$$

Объединяя полученные результаты, получим следующие формулы для вычисления производной от полиномов Бернштейна:

$$(b_{m,n}(u))' = \begin{cases} -nb_{0,n-1}(u), & m = 0, \\ n(b_{m-1,n-1}(u) - b_{m,n-1}(u)), & 0 < m < n, \\ nb_{n-1,n-1}(u), & m = n. \end{cases} \quad (7.3)$$

Пример 1. Найдем производную от полинома Бернштейна $b_{2,5}(u)$. Используя формулы (7.3), получим

$$\begin{aligned} b'_{2,5}(u) &= 5(b_{1,4}(u) - b_{2,4}(u)) = \\ &= 5(4(1-u)^3 u - 6(1-u)^2 u^2) = 20(1-u)^3 u - 30(1-u)^2 u^2. \end{aligned}$$

В принципе формулы (7.3) могут рекуррентно использоваться для вычисления производной любого порядка от полинома Бернштейна. Но эти вычисления утомительны. В следующей теореме выведена формула для вычисления производной произвольного порядка от полинома Бернштейна.

Теорема 1. Производная k -го порядка от полинома Бернштейна может быть вычислена по следующей формуле:

$$b_{m,n}^{(k)}(u) = n(n-1)\cdots(n-(k-1)) \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i b_{m-k+i,n-k}(u) \quad (7.4)$$

для любого $k \in \{1, 2, \dots, \min\{m, n-m\}\}$.

Доказательство. Докажем формулу (7.4), используя принцип математической индукции. Формула (7.4) выполняется при вычислении производной первого порядка от полинома Бернштейна $b_{m,n}(u)$. В этом случае она эквивалентна формуле (7.3). Предположим, что формула (7.4) справедлива для некоторого натурального числа $(k-1)$, т. е.

$$b_{m,n}^{(k-1)}(u) = n(n-1)\cdots(n-(k-2)) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{k-1}^i b_{m-(k-1)+i,n-(k-1)}(u).$$

Используя это предположение и принимая во внимание, что биномиальные коэффициенты удовлетворяют следующим соотношениям:

$$C_{k-1}^0 = C_k^0, \quad C_{k-1}^{k-1} = C_k^k$$

и

$$C_{k-1}^i + C_{k-1}^{i+1} = C_k^{i+1}$$

для любого $i \in \{0, 2, \dots, k-1\}$, производная порядка k от полинома Бернштейна $b_{m,n}(u)$ может быть вычислена следующим образом:

$$\begin{aligned} b_{m,n}^{(k)}(u) &= (b_{m,n}^{(k-1)}(u))' = \\ &= (n(n-1)\cdots(n-(k-2)) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{k-1}^i b_{m-(k-1)+i,n-(k-1)}(u))' = \\ &= n(n-1)\cdots(n-(k-2))(n-(k-1)) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i C_{k-1}^i (b_{m-k+i,n-k}(u) - b_{m-(k-1)+i,n-k}(u)) = \\ &= n(n-1)\cdots(n-(k-1)) \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i b_{m-k+i,n-k}(u). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пример 2. Найдем производную третьего порядка от полинома Бернштейна $b_{3,6}(u)$. Используя формулы (7.3), получим

$$\begin{aligned} b_{3,6}'''(u) &= 6 \cdot 5 \cdot 4(C_3^0 b_{0,3}(u) - C_3^1 b_{1,3}(u) + C_3^2 b_{2,3}(u) - C_3^3 b_{3,3}(u)) = \\ &= 120((1-u)^3 - 9(1-u)^2 u + 9(1-u)u^2 - u^3) = \\ &= 120(1-u)^3 - 1080(1-u)^2 u + 1080(1-u)u^2 - 120u^3. \end{aligned}$$

Из формулы (7.4) следует, что производные от полиномов Бернштейна $b_{0,n}(u)$ и $b_{n,n}(u)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$b_{0,n}^{(k)}(0) = (-1)^k n(n-1) \cdots (n-(k-1)), \quad (7.5)$$

$$b_{0,n}^{(k)}(1) = 0 \quad (7.6)$$

и

$$b_{n,n}^{(k)}(0) = 0, \quad (7.7)$$

$$b_{n,n}^{(k)}(1) = n(n-1) \cdots (n-(k-1)) \quad (7.8)$$

для любых $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Кроме того, из формулы (7.4) и равенств (7.1) и (7.2) из предыдущего раздела следует, что производные от полиномов Бернштейна $b_{n,m}(u)$ удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$b_{m,n}^{(k)}(0) = 0 \quad (7.9)$$

и

$$b_{m,n}^{(k)}(1) = 0 \quad (7.10)$$

для любых $k \in \{1, 2, \dots, \min\{n-(m-1), m-1\}\}$.

7.3. Интегрирование полиномов Бернштейна

Найдем общую формулу, которая может быть использована для интегрирования полиномов Бернштейна. Для этого сначала вычислим неопределенный интеграл от полинома Бернштейна $b_{0,n}(u)$

$$\begin{aligned} \int b_{0,n}(u) du &= \int (1-u)^n du = -\int (1-u)^n d(1-u) = \\ &= -\frac{(1-u)^{n+1}}{n+1} = -\frac{b_{0,n+1}}{n+1} + c, \end{aligned}$$

где $c \in R$. В результате получили следующую формулу:

$$\int b_{0,n}(u)du = -\frac{b_{0,n+1}}{n+1} + c. \quad (7.11)$$

Теперь вычислим неопределенный интеграл от полинома Бернштейна $b_{n,n}(u)$. Получим

$$\int b_{n,n}(u)du = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c = \frac{b_{n+1,n+1}}{n+1} + c. \quad (7.12)$$

Полученные результаты используем для вычисления неопределенного интеграла от произвольного полинома Бернштейна $b_{m,n}(t)$, где индекс m удовлетворяет следующим условиям:

$$0 < m < n.$$

Неопределенный интеграл от функции $b_{m,n}(t)$ можно вычислить, используя формулу интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Для использования этой формулы введем следующие определения:

$$u = t^m, \\ dv = C_n^m (1-t)^{n-m} dt.$$

Тогда

$$du = mt^{m-1}, \\ v = \int dv = \int C_n^m (1-t)^{n-m} dt = -C_n^m \int (1-t)^{n-m} d(1-t) = \\ = -\frac{n!(1-t)^{n-m+1}}{m!(n-m)!(n-m+1)} = -\frac{n!(1-t)^{n-(m-1)}}{m(m-1)!(n-(m-1))!} = -\frac{1}{m} C_n^{m-1} (1-t)^{n-(m-1)}.$$

Используя полученные результаты, неопределенный интеграл от функции $b_{m,n}(t)$ можно проинтегрировать по частям следующим образом:

$$\int b_{m,n}(t)dt = \int C_n^m (1-t)^{n-m} t^m dt = \\ = -\frac{1}{m} C_n^{m-1} (1-t)^{n-(m-1)} t^m + \int C_n^{m-1} (1-t)^{n-(m-1)} t^{m-1} dt = \\ = -\frac{n!}{m(m-1)!((n+1)-m)!} (1-t)^{(n+1)-m} t^m + \int C_n^{m-1} (1-t)^{n-(m-1)} t^{m-1} dt = \\ = -\frac{(n+1)!}{(n+1)m!((n+1)-m)!} (1-t)^{(n+1)-m} t^m + \int C_n^{m-1} (1-t)^{n-(m-1)} t^{m-1} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{n+1} C_{n+1}^m (1-t)^{(n+1)-m} t^m + \int C_n^{m-1} (1-t)^{n-(m-1)} t^{m-1} dt = \\
&= -\frac{1}{n+1} b_{m,n+1}(t) + \int b_{m-1,n}(t) dt.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание равенства (7.11), полученное рекуррентное уравнение может быть переписано следующим образом:

$$\int b_{m,n}(u) du = c - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^m b_{i,n+1}(u), \quad (7.13)$$

где $c \in R$.

Пример. Используя формулу (7.13), вычислим неопределенный интеграл от полинома Бернштейна $b_{5,2}(u)$. Получим

$$\begin{aligned}
\int b_{2,5}(u) du &= c - \frac{1}{6} (b_{0,6}(u) + b_{1,6}(u) + b_{2,6}(u)) = \\
&= c - \frac{1}{6} ((1-u)^6 + 6(1-u)^5 u + 15(1-u)^4 u^2).
\end{aligned}$$

7.4. Полиномиальный базис

Покажем, что полиномы Бернштейна $b_{m,k}(u)$, где $k \in \{0,1,\dots,n\}$, образуют базис всех полиномов степени не больше чем n . Очевидно, что полиномы Бернштейна различных степеней линейно независимы. Докажем, что различные полиномы Бернштейна одной степени также линейно независимы.

Теорема 2. Полиномы Бернштейна $b_{m,n}(u)$, где $m \in \{0,1,\dots,n\}$, являются линейно независимыми.

Доказательство. Предположим, что существуют такие действительные числа c_i , где $i \in \{0,1,\dots,n\}$, что

$$c_0 b_{0,n}(u) + c_1 b_{1,n}(u) + c_2 b_{2,n}(u) + \dots + c_n b_{n,n}(u) = 0 \quad (7.14)$$

для любого $u \in [0,1]$. Разделим это равенство на полином Бернштейна $b_{0,n}(u)$, получим равенство

$$c_0 + c_1 \frac{b_{1,n}(u)}{b_{0,n}(u)} + c_2 \frac{b_{2,n}(u)}{b_{0,n}(u)} + \dots + c_n \frac{b_{n,n}(u)}{b_{0,n}(u)} = 0,$$

которое может быть переписано следующим образом:

$$c_0 + c_1 \frac{C_n^1 b_{1,1}(u)}{C_n^0 b_{0,1}(u)} + c_2 \frac{C_n^2 b_{2,2}(u)}{C_n^0 b_{0,2}(u)} + \dots + c_n \frac{C_n^n b_{n,n}(u)}{C_n^0 b_{0,n}(u)} = 0.$$

Так как это равенство справедливо для любого значения u , то оно также справедливо и при значении

$$u = 0.$$

Подставив это значение u в последнее равенство, получим

$$c_0 + c_1 \frac{C_n^1 b_{1,1}(0)}{C_n^0 b_{0,1}(0)} + c_2 \frac{C_n^2 b_{2,2}(0)}{C_n^0 b_{0,2}(0)} + \dots + c_n \frac{C_n^n b_{n,n}(0)}{C_n^0 b_{0,n}(0)} = 0.$$

Откуда следует, учитывая равенства (7.1) и (7.2) из раздела 7.1, что

$$c_0 = 0.$$

Следовательно, равенство (7.14) может быть переписано следующим образом:

$$c_1 b_{1,n}(u) + c_2 b_{2,n}(u) + c_3 b_{3,n}(u) + \dots + c_n b_{n,n}(u) = 0.$$

Разделив это равенство на $b_{1,n}(u)$, получим

$$c_1 + c_2 \frac{b_{2,n}(u)}{b_{1,n}(u)} + c_3 \frac{b_{3,n}(u)}{b_{1,n}(u)} + \dots + c_n \frac{b_{n,n}(u)}{b_{1,n}(u)} = 0.$$

Это равенство можно переписать следующим образом:

$$c_1 + c_2 \frac{C_n^2 b_{1,1}(u)}{C_n^1 b_{0,1}(u)} + c_3 \frac{C_n^3 b_{2,2}(u)}{C_n^1 b_{0,2}(u)} + \dots + c_n \frac{C_n^n b_{n-1,n-1}(u)}{C_n^1 b_{0,n-1}(u)} = 0.$$

Подставив в это равенство значение

$$u = 0,$$

получим

$$c_1 + c_2 \frac{C_n^2 b_{1,1}(0)}{C_n^1 b_{0,1}(0)} + c_3 \frac{C_n^3 b_{2,2}(0)}{C_n^1 b_{0,2}(0)} + \dots + c_n \frac{C_n^n b_{n-1,n-1}(0)}{C_n^1 b_{0,n-1}(0)} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$c_1 = 0.$$

Повторяя аналогичные рассуждения дальше, получим, что все коэффициенты c_i при $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ равны нулю. Следовательно, полиномы Бернштейна $b_{m,n}(u)$, где $m \in \{0, 1, \dots, n\}$, являются линейно независимыми.

Теорема доказана.

Теорема 3. Любой полином степени n может быть представлен единственной линейной комбинацией полиномов Бернштейна $b_{m,n}(u)$, где $m \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный полином

$$p(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \dots + a_nu^n$$

степени n , где $u \in [0, 1]$. Покажем, что полином $p(u)$ может быть представлен единственной линейной комбинацией

$$c_0b_{0,n}(u) + c_1b_{1,n}(u) + \dots + c_nb_{n,n}(u) = p(u),$$

где $c_i \in R$ для $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Последнее равенство эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} c_0b_{0,n}(u) + c_1b_{1,n}(u) + \dots + c_nb_{n,n}(u) &= p(u), \\ c_0b'_{0,n}(u) + c_1b'_{1,n}(u) + \dots + c_nb'_{n,n}(u) &= p'(u), \\ c_0b''_{0,n}(u) + c_1b''_{1,n}(u) + \dots + c_nb''_{n,n}(u) &= p''(u), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ c_0b^{(n)}_{0,n}(u) + c_1b^{(n)}_{1,n}(u) + \dots + c_nb^{(n)}_{n,n}(u) &= p^{(n)}(u), \end{aligned}$$

которая совместна для любого значения $u \in [0, 1]$. Подстановка в эти уравнения значения

$$u = 0$$

дает следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} c_0b_{0,n}(0) + c_1b_{1,n}(0) + \dots + c_nb_{n,n}(0) &= p(0), \\ c_0b'_{0,n}(0) + c_1b'_{1,n}(0) + \dots + c_nb'_{n,n}(0) &= p'(0), \\ c_0b''_{0,n}(0) + c_1b''_{1,n}(0) + \dots + c_nb''_{n,n}(0) &= p''(0), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & \\ c_0b^{(n)}_{0,n}(0) + c_1b^{(n)}_{1,n}(0) + \dots + c_nb^{(n)}_{n,n}(0) &= p^{(n)}(0). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что полиномы Бернштейна и их производные удовлетворяют граничным условиям, описанным соответственно равенствами (1) и (2) из раздела 7.1 и равенствами (3), (5) и (7) из раздела 7.2, полученная система уравнений эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
c_0 b_{0,n}(0) &= p(0), \\
c_0 b'_{0,n}(0) + c_1 b'_{1,n}(0) &= p'(0), \\
c_0 b''_{0,n}(0) + c_1 b''_{1,n}(0) + c_2 b''_{2,n}(0) &= p''(0), \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
c_0 b_{0,n}^{(n)}(0) + c_1 b_{1,n}^{(n)}(0) + \dots + c_{n-1} b_{n-1,n}^{(n)}(0) + c_n b_{n,n}^{(n)}(0) &= p^{(n)}(0).
\end{aligned}$$

Разрешая эту систему относительно неизвестных коэффициентов c_i , где $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, получим

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{p(0)}{b_{1,n}(0)}, \\
c_1 &= \frac{p'(0) - c_0 b'_{0,n}(0)}{b'_{1,n}(0)}, \\
c_2 &= \frac{p''(0) - c_0 b''_{0,n}(0) - c_1 b''_{1,n}(0)}{b''_{2,n}(0)}, \\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
c_n &= \frac{p^{(n)}(0) - c_0 b_{0,n}^{(n)}(0) - c_1 b_{1,n}^{(n)}(0) - \dots - c_{n-1} b_{n-1,n}^{(n)}(0)}{b_{n,n}^{(n)}(0)}. \tag{7.15}
\end{aligned}$$

Следовательно, полином $p(u)$ может быть представлен единственной линейной комбинацией полиномов Бернштейна $b_{m,n}(u)$, где $m \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 следует, что полиномы Бернштейна $b_{m,k}(u)$, где $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, образуют базис для всех полиномов степени не больше чем n .

Пример. Представим полином

$$p(u) = 1 + 2u + 3u^2,$$

где $u \in [0, 1]$, линейной комбинацией полиномов Бернштейна. В этом случае нужно найти такие действительные числа c_0 , c_1 и c_2 , что

$$c_0 b_{0,2}(u) + c_1 b_{1,2}(u) + c_2 b_{2,2}(u) = 1 + 2u + 3u^2.$$

Найдем коэффициенты c_0 , c_1 и c_2 , используя формулу (7.14). Для этой цели найдем первые две производные полиномов Бернштейна

$$b_{0,2}(u) = (1-u)^2, \quad b_{1,2}(u) = 2(1-u)u, \quad b_{2,2}(u) = u^2.$$

Получим

$$b'_{0,2}(u) = -2(1-u), \quad b'_{1,2}(u) = 2-4u, \quad b'_{2,2}(u) = 2u$$

и

$$b''_{0,2}(u) = 2, \quad b''_{1,2}(u) = -4, \quad b''_{2,2}(u) = 2.$$

Кроме того, найдем первые две производные от полинома $p(u)$. Получим

$$p'(u) = 2 + 6u, \quad p''(u) = 6.$$

Тогда, используя формулы (7.15), искомые коэффициенты определяются следующим образом:

$$c_0 = \frac{p(0)}{b_{0,2}(0)} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$c_1 = \frac{p'(0) - c_0 b'_{0,2}(0)}{b'_{1,2}(0)} = \frac{2 - 1 \cdot (-2)}{2} = 2,$$

$$c_2 = \frac{p''(0) - c_0 b''_{0,2}(0) - c_1 b''_{1,2}(0)}{b''_{2,2}(0)} = \frac{6 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-4)}{2} = 6.$$

В результате получили

$$1 + 2u + 3u^2 = (1-u)^2 + 2(2(1-u)u) + 6u^2.$$

7.5. Сглаживающие полиномы

Определим два класса полиномов, которые будут в дальнейшем использоваться для смешения параметризованных кривых на группе Ли. Для этого сначала рассмотрим на действительной прямой R следующие последовательности точек:

$$\left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n+1}, \frac{n+1}{2n+1}, \frac{n+2}{2n+1}, \dots, \frac{2n+1}{2n+1} \right), \quad n \in N.$$

Далее определим кривые Безье на данных последовательностях точек, используя полиномы Бернштейна

$$b_{m,n}(u) = C_n^m (1-u)^{n-m} u^m, \quad u \in [0,1],$$

где C_n^m обозначают биномиальные коэффициенты. Очевидно, что эти кривые Безье представляются следующими полиномами:

$$w_{1,n}(u) = \sum_{i=1}^{n+1} b_{n+i,2n+1}(u) \frac{n+i}{2n+1}, \quad u \in [0,1],$$

где $n \in \mathbb{N}$. Из этого определения следует, что полиномы $w_{1,n}(u)$ имеют следующие граничные точки:

$$w_{1,n}(0) = 0, \quad w_{1,n}(1) = 1. \quad (7.16)$$

На рис. 7.2 показаны графики полиномов $w_{1,n}(u)$, из которых можно определить кинематические свойства этих полиномов. Как видно из этого рисунка, полиномы $w_{1,n}(u)$ могут рассматриваться как довольно хорошая аппроксимация функции разгона, значение которой на интервале $[0,1]$ гладко изменяется от нуля до единицы с требуемой степенью непрерывности. На правом же конце этого интервала скорость изменения значения полиномов становится единичной.

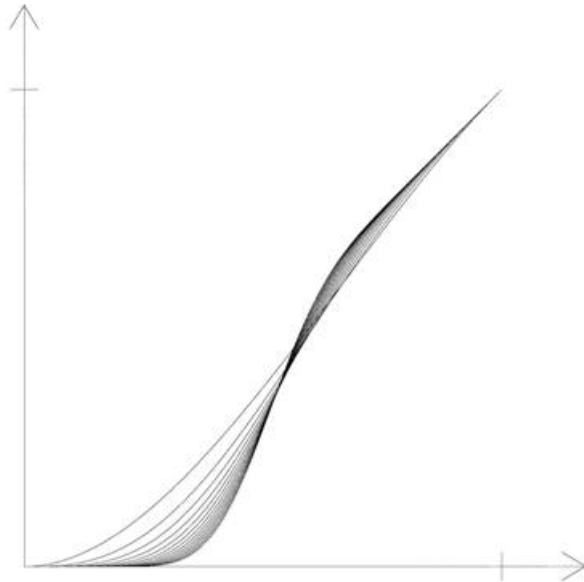


Рис. 7.2. Графики полиномов $w_{1,n}(u)$

Перейдем к определению следующего класса полиномов, которые также будут в дальнейшем использоваться для смешения параметризованных кривых на группе Ли. Для этого рассмотрим следующие последовательности точек на действительной прямой R :

$$\left(0, \frac{1}{2n+1}, \frac{2}{2n+1}, \dots, \frac{n}{2n+1}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n+1} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определим на этих последовательностях точек кривые Безье аналогично тому, как это было сделано для полиномов $w_{1,n}(u)$. Получим следующие полиномы:

$$w_{2,n}(u) = \sum_{i=1}^n b_{i,2n+1}(u) \frac{i}{2n+1}, \quad u \in [0,1],$$

где $n \in \mathbb{N}$. Из этого определения следует, что полиномы $w_{2,n}(u)$ имеют следующие граничные точки:

$$w_{2,n}(0) = 0, \quad w_{2,n}(1) = 0. \quad (7.17)$$

На рис. 7.3 показаны графики полиномов $w_{2,n}(u)$, из которых можно определить кинематические свойства этих полиномов. Как видно из этого рисунка, полиномы $w_{2,n}(u)$ могут рассматриваться как довольно хорошая аппроксимация функции торможения, значение которой на интервале $[0,1]$ гладко изменяются с требуемой степенью непрерывности. При этом на левой границе интервала значение производной от функции торможения равно 1.

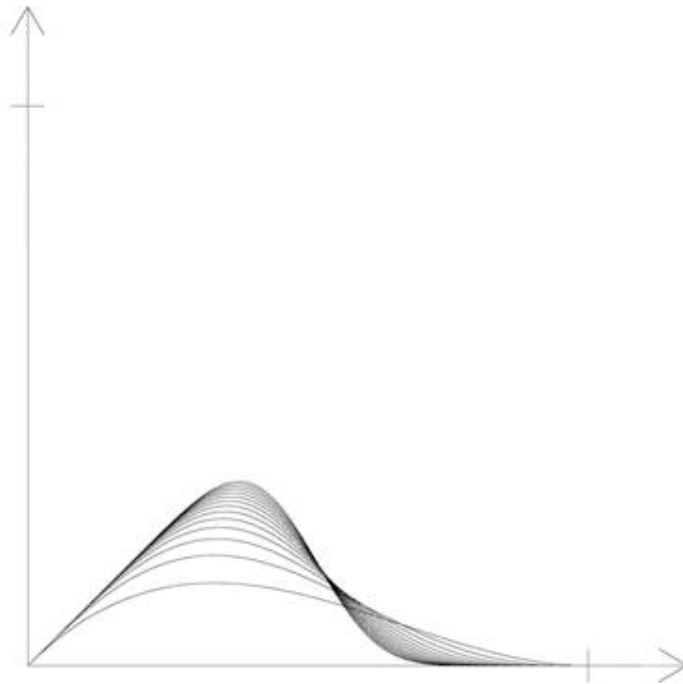


Рис. 7.3. Графики полиномов $w_{2,n}(u)$

7.6. Дифференцирование сглаживающих полиномов

Для того чтобы упростить дальнейшее изложение, определим два тождества с биномиальными коэффициентами, которые в дальнейшем используются для вычисления значений производных высших порядков от полиномов $w_{1,n}(u)$ и $w_{2,n}(u)$. Нам нужно доказать следующие тождества:

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i = 0, \quad \sum_{i=0}^m (-1)^i i C_m^i = 0.$$

Чтобы доказать первое равенство, используя бином Ньютона, развернем следующую сумму:

$$(1-1)^m = \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i = 0.$$

Второе из рассматриваемых тождеств доказывается при помощи следующих двух биномиальных тождеств:

$$C_m^i = C_m^{m-i}, \quad C_m^i = \frac{m}{i} C_{m-1}^{i-1}.$$

Используя эти тождества и первое из доказанных тождеств, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^m (-1)^i i C_m^i = \\ & = 0 \cdot C_m^0 - 1 \cdot C_m^0 + 2 \cdot C_m^0 - \dots - (m-1) \cdot C_m^{m-1} + m \cdot C_m^m = \\ & = \frac{m}{2} \cdot C_m^0 - \frac{m}{2} \cdot C_m^0 + \frac{m}{2} \cdot C_m^0 - \dots - \frac{m}{2} \cdot C_m^{m-1} + \frac{m}{2} \cdot C_m^m = \\ & = \frac{m}{2} \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i = 0 \end{aligned}$$

для четных m . Аналогично для нечетных m получим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^m (-1)^i i C_m^i = \\ & = 0 \cdot C_m^0 - 1 \cdot C_m^0 + 2 \cdot C_m^0 - \dots + (m-1) \cdot C_m^{m-1} - m \cdot C_m^m = \\ & = \frac{m}{2} \cdot C_m^0 - \frac{m-2}{2} \cdot C_m^0 + \frac{m-4}{2} \cdot C_m^0 - \dots + \frac{m-2}{2} \cdot C_m^{m-1} - \frac{m}{2} \cdot C_m^m = \\ & = \frac{m}{2} \cdot C_m^0 - \frac{m}{2} \cdot C_m^0 + \frac{m}{2} \cdot C_m^0 - \dots + \frac{m}{2} \cdot C_m^{m-1} - \frac{m}{2} \cdot C_m^m - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1 \cdot C_m^0 + 2 \cdot C_m^0 - 3 \cdot C_m^0 + \dots + 2 \cdot C_m^{m-2} - 1 \cdot C_m^{m-1} = \\
& = -\frac{m}{2} \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i - m \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i C_{m-1}^i = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, два из требуемых тождеств доказаны.

Теорема 4. Производные полиномов $w_{1,n}(u)$ имеют следующие значения на границах интервала $[0,1]$:

$$w_{1,n}^{(m)}(0) = 0, \quad \forall m \in \{2, 3, \dots, n\}, \quad (7.18)$$

$$w'_{1,n}(1) = 1, \quad w_{1,n}^{(m)}(1) = 0, \quad \forall m \in \{2, 3, \dots, n\}. \quad (7.19)$$

Доказательство. Используя формулы для вычисления значений производных на границах кривой Безье, получим

$$w_{1,n}^{(m)}(0) = 0,$$

$$w_{1,n}^{(m)}(1) = \frac{(2n+1)!}{(2n+1-m)!} \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i \frac{2n+1-i}{2n+1}$$

для всех $m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Вычислим значения производных, которые определены вторым из этих уравнений. Производная первого порядка имеет следующее значение:

$$w'_{1,n}(1) = \frac{(2n+1)!}{(2n)!} \left(\frac{2n+1}{2n+1} - \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{(2n)!}{(2n)!} = 1.$$

Для того чтобы вычислить производные более высоких порядков, используем полученные вспомогательные тождества с биномиальными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
w_{1,n}^{(m)}(1) &= \frac{(2n+1)!}{(2n+1-m)!} \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i \frac{2n+1-i}{2n+1} = \\
&= \frac{(2n+1)!}{(2n+1-m)!} \left(\sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i - \frac{1}{2n+1} \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i i \right) = 0
\end{aligned}$$

для любого $m \in \{2, 3, \dots, n\}$. В результате получили, что производные полиномов $w_{1,n}(u)$ имеют следующие значения на правой границе интервала $[0,1]$:

$$w'_{1,n}(1) = 1, \quad w_{1,n}^{(m)}(1) = 0, \quad \forall m \in \{2, 3, \dots, n\},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. Производные полиномов $w_{2,n}(u)$ имеют следующие значения на границах интервала $[0,1]$:

$$w'_{2,n}(0) = 1, \quad w_{2,n}^{(m)}(0) = 0, \quad \forall m \in \{2,3,\dots,n\}, \quad (7.20)$$

$$w_{2,n}^{(m)}(1) = 0, \quad \forall m \in \{1,2,\dots,n\}. \quad (7.21)$$

Доказательство. Определим производные полиномов $w_{2,n}(u)$ на границах интервала $[0,1]$. Используя формулы для вычисления производных на границах кривой Безье, получим

$$w_{2,n}^{(m)}(0) = \frac{(2n+1)!}{(2n+1-m)!} \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} C_m^i \frac{i}{2n+1},$$

$$w_{2,n}^{(m)}(1) = 0$$

для всех $m \in \{1,2,\dots,n\}$.

Вычислим значения производных, которые определены первым из полученных выражений. Производная первого порядка имеет следующее значение:

$$w'_{n,2}(0) = \frac{(2n+1)!}{(2n)!} \frac{1}{2n+1} = \frac{(2n)!}{(2n)!} = 1.$$

Для того чтобы вычислить производные более высоких порядков, используем вспомогательные тождества с биномиальными коэффициентами:

$$w_{2,n}^{(m)}(0) = \frac{(2n+1)!}{(2n+1-m)!} \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} C_m^i \frac{i}{2n+1} =$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(2n+1-m)! (2n+1)} \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i i = 0, \quad \forall m \in \{2,3,\dots,n\}.$$

В результате получили, что производные полиномов $w_{2,n}(u)$ имеют следующие значения на левой границе интервала $[0,1]$:

$$w'_{2,n}(0) = 1, \quad w_{2,n}^{(m)}(0) = 0, \quad \forall m \in \{2,3,\dots,n\},$$

что и требовалось доказать.

7.7. Оптимальные свойства сглаживающих полиномов

Теорема 6. Полином $w_{1,n}(u)$ является минимумом функционала

$$J_n(f) = \int_0^1 |f^{(n+1)}(u)|^2 du$$

для любого значения $n \in N$, где функция $f(u)$, $u \in [0,1]$, удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \quad f(1) = 1, \\ f^{(m)}(0) &= 0, \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ f'(1) &= 1, \quad f^{(m)}(1) = 0, \quad \forall m \in \{2, 3, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть функция $g(u)$ является минимумом функционала $J_n(f)$. Рассмотрим функцию

$$(g - w_{1,n})(u) = g(u) - w_{1,n}(u).$$

Тогда

$$\begin{aligned} |(g - w_{1,n})^{(n)}|^2 &= |g^{(n)} - w_{1,n}^{(n)}|^2 = (g^{(n)})^2 - 2g^{(n)}w_{1,n}^{(n)} + (w_{1,n}^{(n)})^2 = \\ &= (g^{(n)})^2 - (w_{1,n}^{(n)})^2 - 2(g^{(n)} - w_{1,n}^{(n)})w_{1,n}^{(n)}. \end{aligned}$$

Из полученного уравнения следует, что

$$J_n(g - w_{1,n}) = J_n(g) - J_n(w_{1,n}) - 2 \int_0^1 (g^{(n+1)}(u) - w_{1,n}^{(n+1)}(u))w_{1,n}^{(n+1)}(u)du.$$

Последний интеграл может быть вычислен по частям следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (g^{(n+1)}(u) - w_{1,n}^{(n+1)}(u))w_{1,n}^{(n+1)}(u)du &= \int_0^1 w_{1,n}^{(n+1)}(u)d(g^{(n)}(u) - w_{1,n}^{(n)}(u)) = \\ &= (w_{1,n}^{(n+1)}(u)(g^{(n)}(u) - w_{1,n}^{(n)}(u))) \Big|_0^1 - \int_0^1 (g^{(n)}(u) - w_{1,n}^{(n)}(u))w_{1,n}^{(n+2)}(u)du = \\ &= - \int_0^1 (g^{(n)}(u) - w_{1,n}^{(n)}(u))w_{1,n}^{(n+2)}(u)du, \end{aligned}$$

учитывая, что

$$g^{(n)}(0) = w_{1,n}^{(n)}(0) = 0, \quad g^{(n)}(1) = w_{1,n}^{(n)}(1) = 0$$

по условию теоремы. Применяя эту рекуррентную формулу для последовательного интегрирования по частям и учитывая, что функция $w_{1,n}^{(2n+1)}(u)$ является константой, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 (g^{(n+1)}(u) - w_{1,n}^{(n+1)}(u)) w_{1,n}^{(n+1)}(u) du &= (-1)^n \int_0^1 (g'(u) - w'_{1,n}(u)) w_{1,n}^{(2n+1)}(u) du = \\ &= (-1)^n ((g(u) - w_{1,n}(u)) w_{1,n}^{(2n+1)}(u)) \Big|_0^1 = 0, \end{aligned}$$

так как

$$g(0) = w_{1,n}(0) = 0, \quad g(1) = w_{1,n}(1) = 1.$$

Таким образом, доказано, что

$$J_n(g - w_{1,n}) = J_n(g) - J_n(w_{1,n}).$$

Последнее равенство может быть записано следующим образом:

$$J_n(g) = J_n(w_{1,n}) + J_n(g - w_{1,n}).$$

Из определения функционала $J_n(f)$ следует, что

$$J_n(g - w_{1,n}) \geq 0.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$J_n(w_{1,n}) \leq J_n(g).$$

Но функция $g(u)$ является минимумом функционала $J_n(f)$ по предположению, следовательно,

$$g(u) = w_{1,n}(u).$$

Таким образом, доказано, что полином $w_{1,n}(u)$ является минимумом функционала $J_n(f)$.

Теперь докажем, что этот минимум является единственным. Предположим противное, что существует такая функция $g(u)$, которая удовлетворяет условию

$$J_n(g) = J_n(w_{1,n}).$$

Из этого уравнения следует равенство

$$J_n(g - w_{1,n}) = 0,$$

которое эквивалентно равенству

$$g^{(n+1)}(u) = w_{1,n}^{(n+1)}(u)$$

для всех $u \in [0,1]$. Следовательно,

$$g(u) = w_{1,n}(u) + \sum_{i=0}^n a_i u^i.$$

Но коэффициенты a_i равны нулю для всех $i \in \{0,1,\dots,n\}$, учитывая граничные условия, которым должна удовлетворять функция $g(u)$. Следовательно,

$$g(u) = w_{1,n}(u),$$

что и требовалось доказать.

Функционал $J_n(f)$ можно рассматривать как энергию производной порядка $(n+1)$ от функции, которая удовлетворяет граничным условиям, заданным в теореме 6. Из доказанной теоремы следует, что полиномы $w_{1,n}(u)$ являются минимумами этого функционала. Следующие полиномы низких степеней:

$$w_{1,1}(u) = 2(1-u)u^2 + u^3,$$

$$w_{1,2}(u) = 6(1-u)^2 u^3 + 4(1-u)u^4 + u^5$$

обычно используются в геометрических приложениях. Как будет показано далее, эти полиномы обеспечивают соответственно первую и вторую степени непрерывности при смешении параметризованных кривых на группе Ли.

Теорема 7. Полином $w_{2,n}(u)$ является минимумом функционала

$$J_n(f) = \int_0^1 |f^{(n+1)}(u)|^2 du$$

для любого значения $n \in N$, где функция $f(u)$, $u \in [0,1]$, удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0,$$

$$f'(0) = 1, \quad f^{(m)}(0) = 0, \quad \forall m \in \{2,3,\dots,n\},$$

$$f^{(m)}(1) = 0, \quad \forall m \in \{1,2,\dots,n\}.$$

Доказательство. Пусть функция $g(u)$ является минимумом функционала $J_n(f)$. Рассмотрим функцию

$$(g - w_{2,n})(u) = g(u) - w_{2,n}(u).$$

Тогда

$$\begin{aligned} |(g - w_{2,n})^{(n)}|^2 &= |g^{(n)} - w_{2,n}^{(n)}|^2 = (g^{(n)})^2 - 2g^{(n)}w_{2,n}^{(n)} + (w_{2,n}^{(n)})^2 = \\ &= (g^{(n)})^2 - (w_{2,n}^{(n)})^2 - 2(g^{(n)} - w_{2,n}^{(n)})w_{2,n}^{(n)}. \end{aligned}$$

Из полученного уравнения следует, что

$$J_n(g - w_{2,n}) = J_n(g) - J_n(w_{2,n}) - 2 \int_0^1 (g^{(n+1)}(u) - w_{2,n}^{(n+1)}(u))w_{2,n}^{(n+1)}(u)du.$$

Последний интеграл может быть вычислен по частям следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (g^{(n+1)}(u) - w_{2,n}^{(n+1)}(u))w_{2,n}^{(n+1)}(u)du &= \int_0^1 w_{2,n}^{(n+1)}(u)d(g^{(n)}(u) - w_{2,n}^{(n)}(u)) = \\ &= (w_{2,n}^{(n+1)}(u)(g^{(n)}(u) - w_{2,n}^{(n)}(u))) \Big|_0^1 - \int_0^1 (g^{(n)}(u) - w_{2,n}^{(n)}(u))w_{2,n}^{(n+2)}(u)du = \\ &= - \int_0^1 (g^{(n)}(u) - w_{2,n}^{(n)}(u))w_{2,n}^{(n+2)}(u)du, \end{aligned}$$

учитывая, что

$$g^{(n)}(0) = w_{2,n}^{(n)}(0) = 0, \quad g^{(n)}(1) = w_{2,n}^{(n)}(1) = 0$$

по условию теоремы. Применяя эту рекуррентную формулу для последовательного интегрирования по частям и учитывая, что функция $w_{2,n}^{(2n+1)}(u)$ является константой, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 (g^{(n+1)}(u) - w_{2,n}^{(n+1)}(u))w_{2,n}^{(n+1)}(u)du &= (-1)^n \int_0^1 (g'(u) - w'_{2,n}(u))w_{2,n}^{(2n+1)}(u)du = \\ &= (-1)^n ((g(u) - w_{2,n}(u))w_{2,n}^{(2n+1)}(u)) \Big|_0^1 = 0, \end{aligned}$$

так как

$$g(0) = w_{2,n}(0) = 0, \quad g(1) = w_{2,n}(1) = 0.$$

Таким образом, доказано, что

$$J_n(g - w_{2,n}) = J_n(g) - J_n(w_{2,n}).$$

Последнее равенство может быть записано следующим образом:

$$J_n(g) = J_n(w_{2,n}) + J_n(g - w_{2,n}).$$

Из определения функционала $J_n(f)$ следует, что

$$J_n(g - w_{2,n}) \geq 0.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$J_n(w_{2,n}) \leq J_n(g).$$

Но функция $g(u)$ является минимумом функционала $J_n(f)$ по предположению, следовательно,

$$g(u) = w_{2,n}(u).$$

Таким образом, доказано, что полином $w_{2,n}(u)$ является минимумом функционала $J_n(f)$.

Теперь докажем, что этот минимум – единственный. Предположим противное, что существует такая функция $g(u)$, которая удовлетворяет условию

$$J_n(g) = J_n(w_{2,n}).$$

Из этого уравнения следует равенство

$$J_n(g - w_{2,n}) = 0,$$

которое эквивалентно равенству

$$g^{(n+1)}(u) = w_{2,n}^{(n+1)}(u), \quad \forall u \in [0,1].$$

Следовательно,

$$g(u) = w_{2,n}(u) + \sum_{i=0}^n a_i u^i.$$

Но коэффициенты a_i равны нулю для всех $i \in \{0,1,\dots,n\}$, учитывая граничные условия, которым должна удовлетворять функция $g(u)$. Следовательно,

$$g(u) = w_{2,n}(u),$$

что и требовалось доказать.

Функционал $J_n(f)$ можно рассматривать как энергию производной порядка $(n + 1)$ от функции, которая удовлетворяет граничным условиям, заданным в теореме 7. Из доказанной теоремы следует, что полиномы $w_{2,n}(u)$ являются минимумами этого функционала. Следующие полиномы низких степеней:

$$w_{2,1}(u) = (1-u)^2 u,$$

$$w_{2,2}(u) = (1-u)^2 u^3 + 4(1-u)u^4$$

обычно используются в геометрических приложениях. Как будет показано далее, эти полиномы обеспечивают соответственно первую и вторую степени непрерывности при смешении параметризованных кривых на группе Ли.

7.8. Смешение параметризованных кривых на группе Ли

Формально проблема смешения параметризованных кривых на группе Ли может быть сформулирована следующим образом. Рассмотрим две произвольные параметризованные кривые $g_1(u)$ и $g_2(u)$, $u \in [0,1]$, которые принадлежат группе Ли G и удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$g_1(0) = g_2(0) = e, \quad (7.22)$$

где e обозначает единицу группы Ли G . Следует отметить, так как любая точка $g \in G$ может быть выбрана в качестве единицы этой группы посредством перехода к другой системе координат, то использование e в данных начальных условиях несущественно. Проблема состоит в построении параметризованной кривой $g \in G$, $u \in [0,1]$, которая удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$g(0) = g_2(0) = e, \quad g(1) = g_1(1), \quad (7.23)$$

$$g^{(m)}(0) = g_2^{(m)}(0), \quad g^{(m)}(1) = g_1^{(m)}(1), \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (7.24)$$

где $n \in \mathbb{N}$. Параметризованную кривую $g(u)$, которая удовлетворяет заданным граничным условиям, будем называть *параметризованной кривой, смешивающей параметризованные кривые $g_1(u)$ и $g_2(u)$* . Параметризованная кривая $g(u)$ также может рассматриваться как кривая, обеспечивающая гладкий переход от кривой $g_2(u)$ к кривой $g_1(u)$ или деформацию кривой $g_2(u)$ в кривую $g_1(u)$. Следует также отметить, что в геометрических приложениях параметризованные кривые $g_1(u)$ и $g_2(u)$ обычно представляют собой однопараметрические подгруппы группы Ли, что поясняет постановку задачи.

Принимая во внимание, что параметризованные кривые принадлежат группе Ли G , предполагаем, что параметризованная кривая $g(u)$, которая является решением поставленной задачи, имеет вид

$$g(u) = g_1(f_{1,n}(u))g_2(f_{2,n}(u)), \quad u \in [0,1],$$

где $f_{1,n}(u)$ и $f_{2,n}(u)$ – некоторые действительные функции, обеспечивающие выполнение условий (7.23) и (7.24), а также обладающие некоторыми экстремальными свойствами. Следовательно, рассматриваемая задача свелась к задаче нахождения подходящих действительных функций $f_{1,n}(u)$ и $f_{2,n}(u)$.

Для решения поставленной задачи используем в качестве требуемых действительных функций $f_{1,n}(u)$ и $f_{2,n}(u)$ определенные в предыдущих подразделах классы полиномов $w_{1,n}(u)$ и $w_{2,n}(u)$.

Теперь решим сформулированную проблему смешения параметризованных кривых на группе Ли. Для этой цели рассмотрим две параметризованные кривые $g_1(u)$ и $g_2(u)$, $u \in [0,1]$, которые принадлежат матричной группе G и удовлетворяют начальным условиям, заданным равенствами (7.22). Проблема состоит в построении параметризованной кривой $g(u)$, $u \in [0,1]$, которая удовлетворяет граничным условиям (7.23) и (7.24).

Теорема 8. Если параметризованные кривые $g_1(u)$ и $g_2(u)$, $u \in [0,1]$, принадлежащие матричной группе G , удовлетворяют начальным условиям (7.22), то параметризованная кривая

$$g(u) = g_1(w_{1,n}(u))g_2(w_{2,n}(u)), \quad u \in [0,1], \quad (7.25)$$

удовлетворяет граничным условиям, заданным равенствами (7.23) и (7.24).

Доказательство. Принимая во внимание, что полиномы $w_{1,n}(u)$ и $w_{2,n}(u)$ удовлетворяют равенствам (7.16) и (7.17) соответственно, из начальных условий (7.22) следует, что

$$g(0) = g_1(w_{1,n}(0))g_2(w_{2,n}(0)) = g_1(0)g_2(0) = e \circ e = e,$$

$$g(1) = g_1(w_{1,n}(1))g_2(w_{2,n}(1)) = g_1(1)g_2(0) = g_1(1) \circ e = g_1(1).$$

Следовательно, граничные условия, заданные равенствами (7.23), выполняются.

Для того чтобы доказать равенства (7.24), необходимо использовать следующие равенства, касающиеся производных высшего порядка от сложных функций и произведения матриц. Из математического анали-

за известно, что производная высшего порядка от сложной функции $f(g(u))$ определяется следующим образом:

$$(f(g(u)))^{(n)} = \sum \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!} f^{(k)}(g(u)) \left(\frac{g'(u)}{1!} \right)^{k_1} \left(\frac{g''(u)}{2!} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{g^{(n)}(u)}{n!} \right)^{k_n},$$

где сумма берется по всем неотрицательным целочисленным решениям диофантова уравнения

$$k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n,$$

где $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. Для наших целей достаточно отметить, что последовательность значений

$$(k_1, k_2, \dots, k_n) = (n, 0, 0, \dots, 0)$$

всегда является решением этого диофантова уравнения. Кроме того, производная высшего порядка от произведения матриц $f(u)g(u)$ определяется как

$$(f(u)g(u))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(u)g^{(n-k)}(u), \quad \forall n \in N.$$

Используя правило вычисления сложной производной, а также принимая во внимание, что производные от полиномов $w_{1,n}(u)$ удовлетворяют условиям (7.18) и (7.19), производные высших порядков от параметризованной кривой $g_1(w_{1,n}(u))$ на границах интервала $[0,1]$ могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{aligned} & (g_1(w_{1,n}(u)))^{(m)}(0) = \\ & = \left(\sum \frac{m!}{k_1!k_2!\dots k_n!} g_1^{(k)}(w_{1,n}(u)) \left(\frac{w'_{1,n}(u)}{1!} \right)^{k_1} \left(\frac{w''_{1,n}(u)}{2!} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{w_{1,n}^{(m)}(u)}{m!} \right)^{k_m} \right) (0) = \\ & = \sum \frac{m!}{k_1!k_2!\dots k_n!} (g_1^{(k)}(w_{1,n}(u)))(0) \left(\frac{(w'_{1,n}(u))(0)}{1!} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{(w_{1,n}^{(m)}(u))(0)}{m!} \right)^{k_m} = 0, \\ & (g_1(w_{1,n}(u)))^{(m)}(1) = \\ & = \left(\sum \frac{m!}{k_1!k_2!\dots k_n!} g_1^{(k)}(w_{1,n}(u)) \left(\frac{w'_{1,n}(u)}{1!} \right)^{k_1} \left(\frac{w''_{1,n}(u)}{2!} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{w_{1,n}^{(m)}(u)}{m!} \right)^{k_m} \right) (1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum \frac{m!}{k_1!k_2!\dots k_n!} (g_1^{(k)}(w_{1,n}(u)))(1) \left(\frac{(w'_{1,n}(u))(1)}{1!} \right)^{k_1} \dots \left(\frac{(w_{1,n}^{(m)}(u))(1)}{m!} \right)^{k_m} = \\
&= (g_1^{(m)}(w_{1,n}(u)))(1) \left(\frac{(w'_{1,n}(u))(1)}{1!} \right)^m = (g_1^{(m)}(w_{1,n}(u)))(1) = (g_1^{(m)}(u))(1)
\end{aligned}$$

для любых $m \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Аналогично, используя равенства (7.20) и (7.21), можно показать, что граничные производные высших порядков от параметризованной кривой $g_2(w_{2,n}(u))$ определяются как

$$\begin{aligned}
(g_2(w_{2,n}(u)))^{(m)}(0) &= (g_2^{(m)}(u))(0), \quad (g_2(w_{2,n}(u)))^{(m)}(1) = 0, \\
\forall m \in \{1, 2, \dots, n\}.
\end{aligned}$$

Используя полученные значения для производных от параметризованных кривых $g_1(w_{1,n}(u))$ и $g_2(w_{2,n}(u))$ на границах интервала $[0, 1]$, определим значения производных высших порядков от параметризованной кривой $g(u)$, заданной равенством (7.19), на границах этого интервала. Принимая во внимание равенство для вычисления производной высшего порядка для произведения матриц, получим

$$\begin{aligned}
g^{(m)}(0) &= (g_1(w_{1,n}(u))g_2(w_{2,n}(u)))^{(m)}(0) = \\
&= \left(\sum_{k=0}^m C_m^k ((g_1(w_{1,n}(u)))^{(k)}(g_2(w_{2,n}(u)))^{(m-k)}(0)) \right) = \\
&= (g_1(w_{1,n}(u))(g_2(w_{2,n}(u)))^{(m)}(0)) = \\
&= g_1(0)(g_2(w_{2,n}(u)))^{(m)}(0) = e \circ (g_2(w_{2,n}(u)))^{(m)}(0) = \\
&= (g_2(w_{2,n}(u)))^{(m)}(0) = (g_2^{(m)}(u))(0),
\end{aligned}$$

для всех $m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Аналогично можно показать, что

$$g^{(m)}(1) = (g_1^{(m)}(u))(1), \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Таким образом, равенства (7.24) также выполняются.

Для простоты в данном подразделе рассматривались только матричные группы Ли. Но, принимая во внимание, что посредством экспоненциального отображения любая матричная группа Ли является локально гомеоморфной матричной группе Ли, полученные результаты справедливы и для абстрактных групп Ли. Следовательно, предлагаемый подход может быть

использован и для смешения параметризованных кривых на абстрактных группах Ли. Однако в области геометрических приложений это несущественно, так как здесь применяются только матричные преобразования.

Далее будет показано, как предлагаемая техника смешения параметризованных кривых на группе Ли может применяться к построению сплайновых кривых на гладких многообразиях. Построение полиномов $w_{1,n}(u)$ и $w_{2,n}(u)$ вызвано желанием уменьшить степень полиномов, рассмотренных автором в работах [42–46] и используемых для решения задач геометрического моделирования сплайновых кривых.

7.9. Смешение параметризованных кривых на гладких многообразиях

В данном подразделе рассмотрен общий подход к смешению параметризованных кривых на гладких многообразиях посредством действия группы Ли на рассматриваемое гладкое многообразие. Для этой цели рассмотрим гладкое многообразие M и группу Ли G , действующую на это многообразие. Возьмем две произвольные точки $p_1, p_2 \in M$ и предположим, что эти точки соединяются двумя различными параметризованными кривыми $q_1(u)$ и $q_2(u)$, $u \in [0,1]$, которые определены следующим образом:

$$q_j(u) = g_j(u)p_1, u \in [0,1], j \in \{1,2\},$$

где $g_1(u), g_2(u) \in G$, и удовлетворяют начальным условиям (7.22). Из этого определения следует, что

$$q_j(0) = g_j(0)p_1 = p_1, q_j(1) = g_j(1)p_1 = p_2, j \in \{1,2\}. \quad (7.26)$$

Задача состоит в том, чтобы построить параметризованную кривую $q(u) \in M$, которая удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$q(0) = p_1, q(1) = p_2, \quad (7.27)$$

$$q^{(m)}(0) = q_2^{(m)}(0), q^{(m)}(1) = q_1^{(m)}(1), \forall m \in \{1,2,\dots,n\}, \quad (7.28)$$

где $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 9. Если параметризованные кривые $q_1(u)$ и $q_2(u)$, $u \in [0,1]$, удовлетворяют граничным условиям (7.26), то параметризованная кривая

$$q(u) = g_1(w_{1,n}(u))g_2(w_{2,n}(u))p_1 = g(u)p_1, u \in [0,1], \quad (7.29)$$

удовлетворяет граничным условиям, заданным равенствами (7.27) и (7.28).

Доказательство. Очевидно, что параметризованная кривая $q(u)$ принадлежит многообразию M , так как параметризованная кривая $g(u)$ принадлежит группе Ли G , которая действует на это многообразие. Покажем, что параметризованная кривая $q(u)$ удовлетворяет условиям, заданным равенствами (7.27) и (7.28).

Сначала докажем равенство (7.27). Принимая во внимание условия (7.26), которым удовлетворяет параметризованная кривая $g(u)$, получим

$$\begin{aligned} q(0) &= g(0)p_1 = g_2(0)p_1 = p_1, \\ q(1) &= g(1)p_1 = g_1(1)p_1 = p_2. \end{aligned}$$

Таким образом, условия (7.27) выполняются, т. е. параметризованная кривая $q(u)$ соединяет точки p_1 и p_2 .

Теперь докажем равенства (7.28). Принимая во внимание условия (7.24), которым удовлетворяет параметризованная кривая $g(u)$, получим

$$\begin{aligned} q^{(m)}(0) &= g^{(m)}(0)(p_1) = g_2^{(m)}(0)p_1 = q_2^{(m)}(0), \\ q^{(m)}(1) &= g^{(m)}(1)p_1 = g_1^{(m)}(1)p_1 = q_1^{(m)}(1) \end{aligned}$$

для всех $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, равенства (7.28) также выполняются.

Теорема доказана.

Так как различие в рассматриваемых параметризованных кривых $q_1(u)$ и $q_2(u)$ заключается в различии параметризованных кривых $g_1(u)$ и $g_2(u)$, которые смешиваются, то можно считать, что параметризованная кривая $q(u)$ получена посредством смешения параметризованных кривых $q_1(u)$ и $q_2(u)$.

7.10. Построение сплайновых кривых на гладких многообразиях

Покажем, как можно применить предложенный подход к смешению параметризованных кривых на группах Ли для построения сплайновых кривых на гладких многообразиях. Сегмент сплайновой кривой на гладком многообразии строится посредством смешения двух однопараметрических подгрупп группы Ли, которая действует на это многообразие. Такой подход имеет смысл, так как однопараметрические подгруппы группы Ли являются геодезическими линиями на этой группе, а также пред-

ставляют собой простейшие параметризованные кривые, которые можно определить на группе Ли.

Рассмотрим произвольную последовательность точек (p_0, p_1, \dots, p_k) , $k \in N$, которые принадлежат гладкому многообразию M , и группу Ли G , действующую на это многообразие. Задача состоит в построении сплайновой кривой степени непрерывности C^n , которая интерполирует эти точки. Для решения этой задачи рассмотрим произвольные четыре последовательные узловые точки p_{i-1} , p_i , p_{i+1} , p_{i+2} , принадлежащие заданной последовательности точек. Выберем две гладкие кривые, первая из которых проходит через точки p_{i-1} , p_i и p_{i+1} , а вторая – через точки p_i , p_{i+1} , p_{i+2} . В общем случае выбор кривых обусловлен свойствами гладкого многообразия. Обозначим через

$$q_{i,j}(u) = g_{i,j}(u)p_i, \quad j \in \{1, 2\},$$

сегменты этих кривых, которые соединяют соответственно точки p_i и p_{i+1} . Тогда сегмент сплайновой кривой между узловыми точками p_i и p_{i+1} может быть задан как

$$q_i(u) = g_{i,1}(w_{1,n}(u))g_{2,n}(w_{2,n}(u))p_i = g_i(u)p_i, \quad u \in [0, 1],$$

для всех $i \in \{1, 2, \dots, k-2\}$. Дополнительно определим начальный и конечный сегменты конструируемой сплайновой кривой следующим образом:

$$q_1(u) = q_{1,1}(u) = g_{1,1}(u)p_1, \quad q_{k-1}(u) = q_{k-1,2}(u) = g_2(u)p_{k-1}, \quad u \in [0, 1].$$

Например, если сегмент $q_i(u)$ сплайновой кривой конструируется на поверхности сферы, то в качестве параметризованных кривых $q_{i,1}(u)$ и $q_{i,2}(u)$ можно выбрать дуги малых окружностей, лежащих на поверхности сферы, которые определяются посредством действия параметризованных ортогональных поворотов на сферу.

Для того чтобы обеспечить C^n непрерывность сплайновой кривой в узловых точках p_i , $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, параметризованные кривые $q_{i,1}(u)$ и $q_{i+1,2}(u)$ должны быть соединены в узловой точке p_{i+1} также со степенью непрерывности C^n , т. е.

$$q_{i,1}^{(m)}(1) = q_{i+1,2}^{(m)}(0), \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Обычно в этом случае, как правило, используют некоторую натуральную параметризацию t для рассматриваемых однопараметрических подгрупп. Например, для ортогональных поворотов – это углы поворо-

та. В общем случае можно предположить, что каждой узловой точке p_i ставится в соответствие некоторое значение параметра t_i . Тогда для параметризованных кривых $q_{i,1}(u)$ и $q_{i+1,2}(u)$ можно определить новую параметризацию:

$$u(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

При этом значения t_i должны быть выбраны таким образом, чтобы обеспечить C^n непрерывность сплайновой кривой в узловых точках, т. е. должно выполняться следующие равенства:

$$q_{i,1}^{(m)}(t_i) = q_{i+1,2}^{(m)}(t_i), \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Предположим, что параметризованные кривые $q_{i,1}(u)$ и $q_{i,2}(u)$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned} q_{i,1}(u) &= g_{i,1}(u\varphi_{i,1})p_i, \quad i \in \{0, 1, \dots, k-2\}, \\ q_{i,2}(u) &= g_{i,2}(u\varphi_{i,2})p_i, \quad i \in \{1, 2, \dots, k-1\}, \end{aligned}$$

где $g_{i,1}(u\varphi_{i,1})$ и $g_{i+1,2}(u\varphi_{i,2})$ – параметризованные кривые, которые принадлежат одной и той же однопараметрической подгруппе. Тогда, чтобы обеспечить C^n непрерывность сплайновой кривой в узловых точках, значения параметра t_i можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \quad t_1 = \varphi_{0,1}, \\ t_{i+1} &= t_i + \frac{\varphi_{i+1,2}}{\varphi_{i,1}}(t_i - t_{i-1}), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\}. \end{aligned}$$

В этом случае выполняется равенство

$$\left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right)' \varphi_{i+1,2} = \frac{\varphi_{i+1,2}}{t_{i+1} - t_i} = \frac{\varphi_{i,1}}{t_{i+1} - t_i} = \left(\frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right)' \varphi_{i,1},$$

которое обеспечивает C^n непрерывность параметризованных кривых $g_{i,1}(u\varphi_{i,1})$ и $g_{i+1,2}(u\varphi_{i,2})$ в узловых точках p_i , а следовательно, и C^n непрерывность всей сплайновой кривой.

В следующих главах предложенный подход применяется к построению сплайновых кривых на сферах S^2 и S^3 .

Глава 8

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЛАЙНОВЫХ КРИВЫХ НА СФЕРЕ S^2

Рассмотрен подход к моделированию сплайновых кривых на поверхности двумерной сферы при помощи смешения параметризованных поворотов. В следующей главе этот же подход будет использован для моделирования ориентационных кривых. Отметим, что изучение данной главы существенно упростит понимание материала, изложенного в следующей главе.

Материал в главе организован следующим образом. Сначала рассмотрено построение интерполяционных сплайновых кривых, а затем сглаживание углов ломаных линий на поверхности двумерной сферы. Сегменты сплайновых кривых определяются как смешение дуг окружностей, являющихся орбитами поворотов.

Отметим, что изложенный в данной главе подход можно рассматривать как кинематический способ построения сплайновых кривых, поэтому он особенно подходит для решения различных кинематических задач, например таких, как планирование траекторий роботов.

Другие подходы к моделированию кривых на поверхности двумерной сферы рассмотрены в работах [52–64].

8.1. Постановка задачи построения сплайн-кривой на сфере

Рассмотрим сферу S^2 , которая описана каноническим уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

относительно некоторой ортогональной системы координат с началом в центре этой сферы. Пусть задана некоторая последовательность различных точек (P_1, P_2, \dots, P_k) , лежащих на поверхности сферы S^2 . Причем предполагается, что последовательность содержит более трех точек, т. е.

$$k > 3.$$

Обозначим через p_i радиус-вектор точки P_i , который для краткости также будем называть точкой. Тогда проблема формулируется следующим образом:

1. Требуется построить параметризованную сплайновую кривую $r(t)$, которая лежит на поверхности сферы S^2 и интерполирует точки p_i .

2. Параметризованная сплайн-кривая $r(t)$ должна принадлежать классу C^n , т. е. иметь непрерывные производные до порядка n включительно.

3. Форма параметризованной сплайновой кривой $r(t)$ должна локально зависеть от узловых точек последовательности, что позволяет генерировать и модифицировать моделируемую сплайновую кривую в режиме онлайн.

4. Дополнительным требованием к параметризованной сплайновой кривой $r(t)$ является ее инвариантность относительно выбора ортогональной системы координат с началом в центре сферы.

Параметризованная кривая $r(t)$, удовлетворяющая перечисленным выше требованиям, будет называться *интерполяционным сплайном* на поверхности сферы S^2 .

Предлагаемое решение этой проблемы, которое будет рассматриваться в дальнейших разделах, базируется на смешении дуг малых окружностей сферы S^2 , каждая из которых проходит через три соседние точки последовательности (P_1, P_2, \dots, P_k) .

8.2. Построение дуг малых окружностей по точкам

Рассмотрим сферу S^2 , которая описана каноническим уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

относительно ортогональной системы координат с началом в центре сферы. Возьмем три различные точки P_1 , P_2 и P_3 на поверхности сферы S^2 . В этом случае эти точки определяют секущую плоскость, которая описывается уравнением

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

где (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) – координаты точек P_1 , P_2 и P_3 соответственно. Раскрывая определитель, это уравнение может быть переписано следующим образом:

$$a_1x + a_2y + a_3z + a = 0,$$

где

$$a_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad a_2 = - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad a_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad a = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Приведем это уравнение секущей плоскости к нормальному виду, получим

$$n_1x + n_2y + n_3z - d = 0,$$

где

$$n_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad i \in \{1, 2, 3\},$$

и

$$d = - \frac{a}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Такая секущая плоскость, как было показано в разделе 5.3, пересекает сферу S^2 по малой окружности сферы.

Определим центр этой малой окружности. Для этой цели зададим нормальный вектор

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix},$$

который перпендикулярен секущей плоскости, и обозначим через c радиус-вектор точки C , являющейся центром малой окружности. Тогда, принимая во внимание, что начало системы координат совпадает с центром сферы S^2 , радиус-вектор c определяется как:

$$c = d\mathbf{n},$$

так как значение d равно расстоянию от секущей плоскости до начала системы координат.

Определим нормальный вектор \mathbf{n} и центр окружности \mathbf{c} , используя векторные операции. Для этой цели введем вектор

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

и

$$d = -\frac{a}{|\mathbf{a}|}.$$

Теперь предположим, что точки P_1 , P_2 и P_3 описываются соответственно радиус-векторами \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 и \mathbf{p}_3 относительно выбранной системы координат. Тогда из равенств для вычисления значений скаляров a_1 , a_2 , a_3 и a получим, что

$$\mathbf{a} = (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \times (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$$

и

$$a = -[\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3],$$

где

$$[\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3] = (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_3)$$

обозначает смешанное векторное произведение. Следовательно, используя векторные операции, нормальный вектор \mathbf{n} и центр \mathbf{c} могут быть определены следующим образом:

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \times (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)}{|(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \times (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)|} \quad (8.1)$$

и

$$\mathbf{c} = \frac{[\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3]}{|(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \times (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)|} \mathbf{n}. \quad (8.2)$$

Определим дугу малой окружности от точки P_1 до точки P_3 , которая проходит через промежуточную точку P_2 . Для этой цели нужно определить центральные углы

$$\varphi = \angle P_1 C P_2, \quad \psi = \angle P_2 C P_3.$$

Для краткости аналитических выражений введем следующие обозначения для радиус-векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{c}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{c}, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{p}_3 - \mathbf{c}, \\ \mathbf{n}_1 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{n}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 \end{aligned}$$

и скаляров:

$$\begin{aligned} n_1 &= |\mathbf{n}_1|, \quad n_2 = |\mathbf{n}_2|, \\ s_1 &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2, \quad s_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3. \end{aligned}$$

Используя эти обозначения, центральные углы φ и ψ могут быть определены следующим образом:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan 2(n_1, s_1), & \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n} > 0, \\ 2\pi - \arctan 2(n_1, s_1), & \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n} < 0, \end{cases} \quad (8.3)$$

и

$$\psi = \begin{cases} \arctan 2(n_2, s_2), & \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n} > 0, \\ 2\pi - \arctan 2(n_2, s_2), & \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n} < 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

Тогда требуемая дуга малой окружности может быть описана следующей параметризованной кривой:

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, u(\varphi + \psi)) \mathbf{p}_1, \quad u \in [0, 1].$$

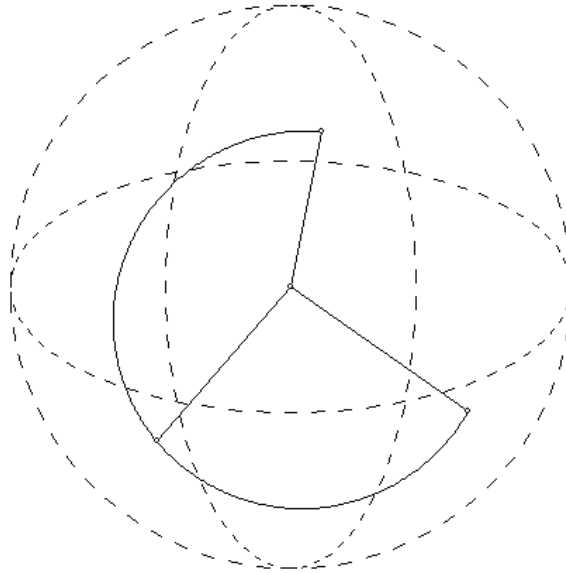


Рис. 8.1. Дуга малой окружности сферы, построенная по трем точкам

На рис. 8.1 показана дуга малой окружности сферы, построенная по трем точкам на поверхности сферы, используя приведенные формулы.

8.3. Смещение дуг окружностей

Рассмотрим сферу S^2 , которая описана каноническим уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

относительно ортогональной системы координат с началом в центре сферы. Возьмем две произвольные различные точки P_1 и P_2 , лежащие на поверхности сферы S^2 . Предположим, что точки P_1 и P_2 описываются соответственно радиус-векторами p_1 и p_2 относительно выбранной системы координат. Рассмотрим две произвольные окружности

$$p(u) = R(m, u\varphi)p_1, \quad u \in [0, 1], \quad (8.5)$$

и

$$q(u) = R(n, u\psi)p_1, \quad u \in [0, 1], \quad (8.6)$$

которые лежат на поверхности сферы S^2 и имеют следующие граничные точки:

$$p(0) = q(0) = p_1, \quad p(1) = q(1) = p_2. \quad (8.7)$$

Из этих уравнений видно, что дуги окружностей $p(u)$ и $q(u)$ соединяют точки P_1 и P_2 .

Проблема заключается в следующем. Нужно построить такую параметризованную кривую $r(u)$, которая лежит на поверхности сферы S^2 и удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$r(0) = p_1, \quad r(1) = p_2 \quad (8.8)$$

и

$$r^{(k)}(0) = p^{(k)}(0), \quad r^{(k)}(1) = q^{(k)}(1) \quad (8.9)$$

для всех $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $n \in N$. Параметризованную кривую $r(u)$ будем называть *смещением* параметризованных кривых $p(u)$ и $q(u)$ или *деформацией* параметризованной кривой $p(u)$ в параметризованную кривую $q(u)$.

Используя сглаживающие полиномы $w_{1,n}(u)$ и $w_{2,n}(u)$, рассмотренные в разделе 7.5, определим параметризованную кривую $r(u)$ следующим образом:

$$r(u) = R(n, w_{1,n}(u)\psi)R(m, w_{2,n}(u)\varphi)p_1, \quad u \in [0, 1]. \quad (8.10)$$

Во-первых, отметим, что данная кривая лежит на поверхности сферы S^2 , так как является орбитой ортогонального поворота. В следующих теоре-

мах покажем, что эта параметризованная кривая удовлетворяет требуемым граничным условиям и инвариантна относительно перехода между ортогональными системами координат.

Теорема 1. Параметризованная кривая $r(u)$, заданная формулой (8.10), удовлетворяет граничным условиям, заданным равенствами (8.8) и (8.9).

Доказательство. Принимая во внимание равенства (8.5), (8.6) и (8.7), из определения параметризованной кривой $r(u)$ следует, что

$$r(0) = R(n,0)R(m,0)p_1 = p_1$$

и

$$r(1) = R(n,\psi)R(m,0)p_1 = R(n,\psi)p_1 = p_2.$$

Следовательно, граничные условия, заданные равенствами (8.8), выполняются. Кроме того, из теоремы 8, доказанной в разделе 7.8, следует, что

$$(R(n, w_{1,n}(u)\psi)R(m, w_{2,n}(u)\varphi))^{(k)}(0) = R^{(k)}(m, u\varphi)(0)$$

и

$$(R(n, w_{1,n}(u)\psi)R(m, w_{2,n}(u)\varphi))^{(k)}(1) = R^{(k)}(n, u\psi)(1)$$

для всех $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $n \in N$. Следовательно,

$$\begin{aligned} r^{(k)}(0) &= (R(n, w_{1,n}(u)\psi)R(m, w_{2,n}(u)\varphi))^{(k)}(0)p_1 = \\ &= (R(m, u\varphi))^{(k)}(0)p_1 = p^{(k)}(0) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} r^{(k)}(1) &= (R(n, w_{1,n}(u)\psi)R(m, w_{2,n}(u)\varphi))^{(k)}(1)p_1 = \\ &= (R(n, u\psi))^{(k)}(1)p_1 = q^{(k)}(1) \end{aligned}$$

для всех $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $n \in N$. Таким образом, граничные условия, заданные равенствами (8.9), также выполняются.

Теорема доказана.

Теорема 2. Параметризованная кривая $r(u)$, заданная формулой (8.10), инвариантна относительно перехода между ортогональными системами координат с началом в центре сферы S^2 .

Доказательство. Возьмем произвольную ортогональную систему координат с началом в центре сферы S^2 . Обозначим через R ортогональную матрицу перехода к новой ортогональной системе координат с началом в центре сферы. Для краткости введем следующие обозначения:

$$\mathbf{R}_1(u) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, w_{1,n}(u)\psi), \quad \mathbf{R}_2(u) = \mathbf{R}(\mathbf{m}, w_{2,n}(u)\varphi).$$

Тогда координаты радиус-вектора \mathbf{p}_1 и параметризованных ортогональных поворотов $\mathbf{R}_1(u)$, $\mathbf{R}_2(u)$ преобразуются при переходе к новой системе координат следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}_1$$

и

$$\tilde{\mathbf{R}}_1(u) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_1(u) \mathbf{R}, \quad \tilde{\mathbf{R}}_2(u) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_2(u) \mathbf{R}.$$

Используя эти равенства, координатное представление сферической кривой $\mathbf{r}(u)$, описанной формулой (8.10), преобразуется при переходе к новой системе координат как

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}(u) &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_1(u) \mathbf{R}_2(u) \mathbf{p}_1 = \\ &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_1(u) \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_2(u) \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}_1 = \\ &= \tilde{\mathbf{R}}_1(u) \tilde{\mathbf{R}}_2(u) \tilde{\mathbf{p}}_1 = \tilde{\mathbf{r}}(u). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что координатное представление сферической кривой $\tilde{\mathbf{r}}(u)$ относительно новой системы координат может быть получено из исходного представления этой кривой $\mathbf{r}(u)$ посредством поворота, заданного матрицей \mathbf{R}^{-1} .

Теорема доказана.

Пример деформации дуг окружностей на сфере показан на рис. 8.2.

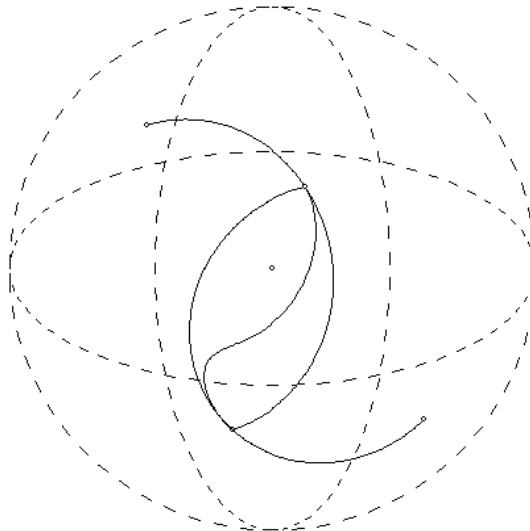


Рис. 8.2. Деформация дуг окружностей на сфере

8.4. Построение сплайновой кривой на сфере

Теперь объединим полученные результаты и приведем детальное описание алгоритма построения интерполирующей сплайновой кривой $r(t) \in C^n$ на поверхности сферы S^2 , которая проходит через последовательность точек (p_0, p_1, \dots, p_k) , $k > 1$, лежащих на поверхности сферы.

Для решения поставленной задачи разработан алгоритм, который базируется на следующих процедурах.

Процедура 8.1. Вычисление оси поворота n по трем точкам p_1 , p_2 и p_3 , лежащим на поверхности двумерной сферы S^2 .

Требуемая ось поворота вычисляется по формуле

$$n = \frac{(p_3 - p_2) \times (p_1 - p_2)}{|(p_3 - p_2) \times (p_1 - p_2)|}.$$

Процедура 8.2. Вычисление центра c малой окружности, которая определяется тремя точками p_1 , p_2 и p_3 , лежащими на поверхности двумерной сферы S^2 .

Требуемый центр малой окружности вычисляется по формуле

$$c = \frac{[p_1 \ p_2 \ p_3]}{|(p_3 - p_2) \times (p_1 - p_2)|} n,$$

где ось поворота n вычисляется при помощи процедуры 8.1.

Процедура 8.3. Вычисление центральных углов φ_1 и φ_2 , которые определяются тремя точкам p_1 , p_2 и p_3 лежащими на поверхности двумерной сферы S^2 и центром этой сферы.

Требуемые центральные углы вычисляются по формулам

$$\varphi_1 = \begin{cases} \arctan 2(n_1, s_1), & n_1 \cdot n_i > 0, \\ 2\pi - \arctan 2(n_1, s_1), & n_1 \cdot n_i < 0, \end{cases}$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} \arctan 2(n_2, s_2), & n_2 \cdot n_i > 0, \\ 2\pi - \arctan 2(n_2, s_2), & n_2 \cdot n_i < 0. \end{cases}$$

где

$$n_1 = r_1 \times r_2, \quad n_2 = r_2 \times r_3,$$

$$n_1 = |n_1|, \quad n_2 = |n_2|,$$

$$s_1 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2, \quad s_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3,$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{c}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{c}, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{p}_3 - \mathbf{c},$$

а ось поворота \mathbf{n}_i и центр малой окружности \mathbf{c}_i на поверхности двумерной сферы S^2 вычисляются соответственно при помощи процедур 8.1 и 8.2.

Алгоритм 8.1. Генерация сплайновой кривой $\mathbf{r}(t)$ на поверхности двумерной сферы S^2 .

Шаг 1. Определяем ось \mathbf{n}_0 , используя процедуру 8.1.

Шаг 2. Определяем центральные углы $\varphi_{0,1}$ и $\varphi_{0,2}$, используя процедуру 8.3.

Шаг 3. Генерируем начальный сегмент $\mathbf{r}_0(t)$ интерполирующей сплайновой кривой $\mathbf{r}(t)$, используя формулу

$$\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{R}(\mathbf{n}_0, u(t)\varphi_{0,1})\mathbf{p}_0, \quad u(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}, \quad t \in [t_0, t_1], \quad t_0 = 0, \quad t_1 = \varphi_{0,1},$$

где $\mathbf{R}(\mathbf{n}_0, \varphi_{0,1})$ описывает ортогональный поворот вокруг оси \mathbf{n}_0 на угол $\varphi_{0,1}$.

Шаг 4. Полагаем $i = 1$.

Шаг 5. Определяем ось \mathbf{n}_i , используя процедуру 8.1.

Шаг 6. Определяем центральные углы $\varphi_{i,1}$ и $\varphi_{i,2}$, используя процедуру 8.3.

Шаг 7. Генерируем промежуточный сегмент $\mathbf{r}_i(t)$ интерполирующей сплайновой кривой $\mathbf{r}(t)$, используя формулу

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{R}(\mathbf{n}_i, w_{1,n}(u(t))\varphi_{i,1})\mathbf{R}(\mathbf{n}_{i-1}, w_{2,n}(u(t))\varphi_{i-1,2})\mathbf{p}_i,$$

$$u(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad t_{i+1} = t_i + \frac{\varphi_{i-1,2}}{\varphi_{i-1,1}}(t_i - t_{i-1}),$$

где $\mathbf{R}(\mathbf{n}_{i-1}, \varphi_{i-1,2})$ и $\mathbf{R}(\mathbf{n}_i, \varphi_{i,1})$ описывают ортогональные повороты вокруг осей \mathbf{n}_{i-1} и \mathbf{n}_i на углы $\varphi_{i-1,2}$ и $\varphi_{i,1}$ соответственно.

Шаг 8. Полагаем $i = i + 1$.

Шаг 9. Если $i < k - 1$, то переходим к шагу 5.

Шаг 10. Генерируем последний сегмент $\mathbf{r}_{k-1}(t)$ интерполирующей сплайновой кривой $\mathbf{r}(t)$, используя формулу

$$r_{k-1}(t) = R(n_{k-2}, u(t)\varphi_{k-2,2})p_{k-1}, \quad u(t) = \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}, \quad t \in [t_{k-1}, t_k],$$

$$t_k = t_{k-1} + \frac{\varphi_{k-2,2}}{\varphi_{k-2,1}}(t_{k-1} - t_{k-2}),$$

где $R(n_{k-2}, \varphi_{k-2,2})$ описывает ортогональный поворот вокруг оси n_{k-2} на угол $\varphi_{k-2,2}$.

Из теоремы 9, доказанной в разделе 7.9, следует, что первые три требования поставленной задачи выполняются. Кроме того, в предыдущем подразделе была показана инвариантность сегментов сплайновых кривых, построенных при помощи алгоритма 8.1, относительно выбора ортогональной системы координат с началом в центре рассматриваемой двумерной сферы. Следовательно, параметризованная кривая $r(t)$ удовлетворяет всем сформулированным требованиям.

На рис. 8.3 приведен пример сплайновой кривой на поверхности двумерной сферы S^2 , построенной при помощи алгоритма 8.1.

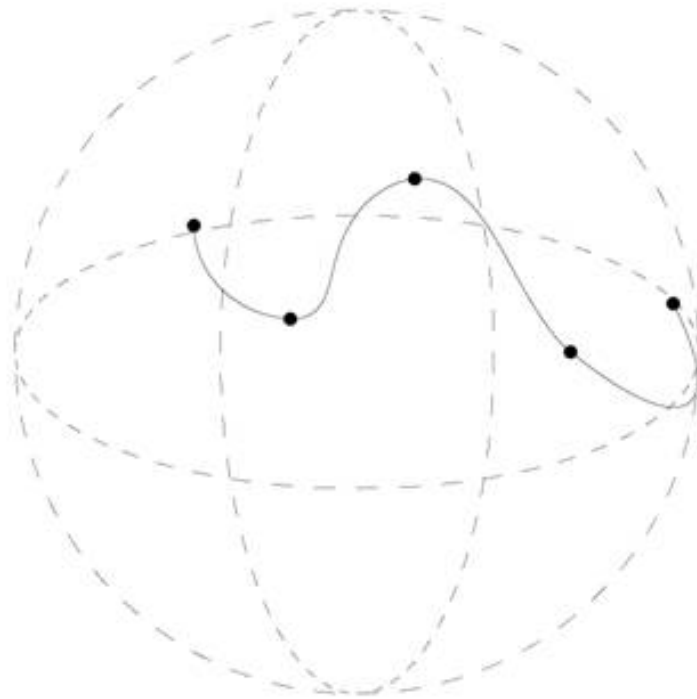


Рис. 8.3. Пример сплайновой кривой на поверхности двумерной сферы S^2 , построенной при помощи алгоритма 8.1

8.5. Постановка задачи сглаживания ломаной линии на сфере

Рассмотрим сферу S^2 , которая описана каноническим уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

относительно ортогональной системы координат, центр которой находится в центре сферы. Пусть на поверхности сферы S^2 заданы три различные точки P_1 , P_2 и P_3 . Предположим, что точки P_1 и P_2 , а также точки P_2 и P_3 соединены дугами больших окружностей. В общем случае, эти дуги больших окружностей образуют угол в точке P_2 . Выберем некоторые точки Q_1 и Q_2 , которые лежат на этих дугах больших окружностей и отмечают соответственно начало и окончание сглаживания угла в точке P_2 .

Задача формулируется следующим образом:

1. Требуется построить параметризованную кривую $r(t)$, которая состоит из трех сегментов. Первый сегмент этой кривой описывает дугу большой окружности от точки P_1 до точки Q_1 . Второй сегмент этой кривой сглаживает угол в точке P_2 . Третий сегмент этой кривой описывает дугу большой окружности от точки Q_2 до точки P_3 .

2. Параметризованная кривая $r(t)$ должна принадлежать классу C^n , т. е. иметь непрерывные производные до порядка n включительно.

3. Дополнительным требованием к параметризованной кривой $r(t)$ является ее инвариантность относительно выбора ортогональной системы координат с началом в центре сферы.

Параметризованную кривую $r(t)$ будем называть сплайн-кривой на поверхности сферы S^2 , которая сглаживает угол в точке P_2 .

Предлагаемое решение этой проблемы, которое рассматривается в дальнейших разделах, базируется на сглаживании дуг больших окружностей сферы, которые соединяют точку Q_1 с точкой P_2 и точку P_2 с точкой Q_2 .

Здесь следует заметить, что выбор точек Q_1 и Q_2 зависит от различных кинематических или геометрических требований к сглаживающей сплайн-кривой $r(t)$. Например, при трассировке кривой роботоманипулятором точки Q_1 и Q_2 могут быть выбраны настолько близко к точке P_2 , насколько позволяют кинематические и динамические характеристики робота-манипулятора.

8.6. Построение дуг больших окружностей по точкам

Рассмотрим сферу S^2 , которая описана каноническим уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

относительно ортогональной системы координат (O, x, y, z) . Возьмем на поверхности этой сферы две различные точки P_1 и P_2 . Эти точки вместе с центром сферы определяют секущую плоскость, которая описывается уравнением

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

где (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) – координаты точек P_1 и P_2 соответственно. Раскрывая определитель, это уравнение может быть записано следующим образом

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0,$$

где

$$a_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad a_2 = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad a_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Как показано в разделе 5.3, пересечением плоскости, проходящей через центр сферы, с этой сферой является большая окружность сферы, центр которой совпадает с центром сферы.

Найдем параметрическое представление дуги большой окружности от точки P_1 к точке P_2 , используя ортогональный поворот. Для этой цели определим вектор

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},$$

который перпендикулярен секущей плоскости. Тогда ось ортогонального поворота можно определить следующим образом:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

или, используя векторные операции, как

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2}{|\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2|}, \quad (8.11)$$

где \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 обозначают радиус-векторы точек P_1 и P_2 соответственно. Центральный угол $\varphi = \angle P_1 O P_2$ дуги большой окружности определяется как

$$\varphi = \arctan(|\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2| / (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)). \quad (8.12)$$

Используя найденные ось и угол поворота, дугу большой окружности от точки P_1 к точке P_2 можно определить следующим образом:

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, u\varphi)\mathbf{p}_1, \quad u \in [0,1]. \quad (8.13)$$

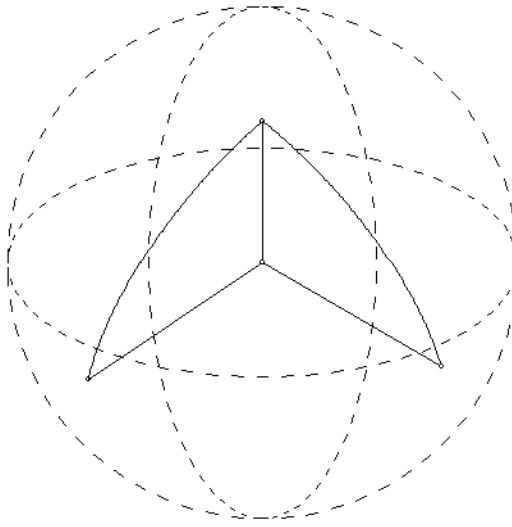


Рис. 8.4. Дуги больших окружностей на сфере

На рис. 8.4 показаны дуги больших окружностей на сфере, которые стыкуются в общей точке.

8.7. Сглаживание дуг окружностей

Рассмотрим сферу S^2 , которая описана каноническим уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

относительно ортогональной системы координат. Возьмем три различные точки P_1 , P_2 и P_3 на поверхности этой сферы, радиус-векторы которых обозначим как \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 и \mathbf{p}_3 соответственно. Используя формулу (8.13) из предыдущего раздела, определим две дуги больших окружностей

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{R}(\mathbf{m}, u\varphi)\mathbf{p}_1, \quad u \in [0,1], \quad (8.14)$$

и

$$\mathbf{q}(u) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, u\psi)\mathbf{p}_2, \quad u \in [0,1], \quad (8.15)$$

которые лежат на поверхности сферы S^2 и удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{p}(1) = \mathbf{q}(0) = \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{q}(1) = \mathbf{p}_3, \quad (8.16)$$

т. е. дуга окружности $\mathbf{p}(u)$ соединяет точку P_1 с точкой P_2 , а дуга окружности $\mathbf{q}(u)$ соединяет точку P_2 с точкой P_3 .

В общем случае дуги окружностей $\mathbf{p}(u)$ и $\mathbf{q}(u)$ образуют угол в точке стыковки P_2 . Задача заключается в том, чтобы сгладить этот угол. Эта задача часто встречается при планировании траекторий движения и трассировке кривых. Формально она может быть сформулирована следующим образом. Необходимо построить параметризованную кривую $\mathbf{r}(u)$, которая лежит на поверхности сферы S^2 и удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}_1, \quad \mathbf{r}(1) = \mathbf{p}_3 \quad (8.17)$$

и

$$\mathbf{r}^{(k)}(0) = \mathbf{p}^{(k)}(0), \quad \mathbf{r}^{(k)}(1) = \mathbf{q}^{(k)}(1) \quad (8.18)$$

для $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $n \in N$. В этом случае параметризованная кривая $\mathbf{r}(u)$ будет называться параметризованной кривой, сглаживающей параметризованные кривые $\mathbf{p}(u)$ и $\mathbf{q}(u)$ в точке стыковки или просто *сглаживающей параметризованной кривой*.

Для того чтобы построить сглаживающую параметризованную кривую $\mathbf{r}(u)$, переопределим дугу окружности $\mathbf{p}(u)$ следующим образом:

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{R}(\mathbf{m}, (1-u)(-\varphi))\mathbf{p}_2, \quad u \in [0,1].$$

Теперь, используя сглаживающие полиномы $w_{1,n}(u)$, которые определены в разделе 7.5, определим параметризованную кривую

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, w_{1,n}(u)\psi)\mathbf{R}(\mathbf{m}, w_{1,n}(1-u)(-\varphi))\mathbf{p}_2, \quad u \in [0,1]. \quad (8.19)$$

Покажем, что эта параметризованная кривая удовлетворяет граничным условиям, заданным равенствами (8.17) и (8.18).

Теорема 3. Параметризованная кривая $\mathbf{r}(u)$, заданная равенством (8.19), удовлетворяет граничным условиям, заданным равенствами (8.17) и (8.18).

Доказательство. Из определения параметризованной кривой $r(u)$ следует, что

$$r(0) = R(n,0)R(m,-\varphi)p_2 = R(m,-\varphi)p_2 = p_1$$

и

$$r(1) = R(n,\psi)R(m,0)p_2 = R(n,\psi)p_2 = p_3,$$

т. е. граничные условия (8.19) выполняются.

Теперь покажем, что также выполняются граничные условия (8.18). Для этого найдем значения параметрических производных кривой $r(u)$ в граничных точках. Используя теорему 8 из раздела 7.8, получим

$$\begin{aligned} (R(n, w_{1,n}(u)\psi)R(m, w_{1,n}(1-u)(-\varphi)))^{(k)}(0) &= R^{(k)}(m, (1-u)(-\varphi))(0) = \\ &= (R(m, (u-1)\varphi))^{(k)}(0) = (R(m, u\varphi)R(m, -\varphi))^{(k)}(0) = \\ &= R^{(k)}(m, u\varphi)(0)R(m, -\varphi) \end{aligned}$$

и

$$(R(n, w_{1,n}(u)\psi)R(m, w_{1,n}(1-u)(-\varphi)))^{(k)}(1) = R^{(k)}(n, u\psi)(1)$$

для $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $n \in N$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} r^{(k)}(0) &= (R(n, w_{1,n}(u)\psi)R(m, w_{1,n}(1-u)(-\varphi)))^{(k)}(0)p_2 = \\ &= R^{(k)}(m, u\varphi)(0)R(m, -\varphi)p_2 = R^{(k)}(m, u\varphi)(0)p_1 = p^{(k)}(0) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} r^{(k)}(1) &= (R(n, w_{1,n}(u)\psi)R(m, w_{1,n}(1-u)(-\varphi)))^{(k)}(1)p_2 = \\ &= (R(n, w_{1,n}(u)\psi))^{(k)}(1)p_2 = (R(n, u\psi))^{(k)}(1)p_2 = q^{(k)}(1) \end{aligned}$$

для $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $n \in N$. Таким образом, граничные условия (8.18) также выполняются.

Теорема доказана.

В разделе 3.2 показано, что ортогональные повороты являются автоморфизмами сферы S^2 . Поэтому важно, чтобы кривые, моделируемые на поверхности сферы, были инвариантны относительно выбора ортогональных систем координат. В следующей теореме доказано, что параметризованная кривая $r(u)$ удовлетворяет этому требованию.

Теорема 4. Сферическая кривая $r(u)$, определенная уравнением (8.19), инвариантна относительно перехода между ортогональными системами координат с началом в центре сферы S^2 .

Доказательство. Рассмотрим произвольную систему координат с началом в центре сферы S^2 . Пусть \mathbf{R} обозначает ортогональную матрицу перехода к новой системе координат. Для краткости изложения введем следующие обозначения:

$$\mathbf{R}_1(u) = \mathbf{R}(n, w_{1,n}(u)\psi), \quad \mathbf{R}_2(u) = \mathbf{R}(m, w_{1,n}(1-u)(-\varphi)).$$

Тогда радиус-вектор \mathbf{p}_2 и матрицы ортогональных поворотов $\mathbf{R}_1(u)$, $\mathbf{R}_2(u)$ преобразуются при переходе к новой системе координат следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}_2$$

и

$$\tilde{\mathbf{R}}_1(u) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_1(u) \mathbf{R}, \quad \tilde{\mathbf{R}}_2(u) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_2(u) \mathbf{R}.$$

Используя эти равенства, координатное представление сферической кривой $\mathbf{r}(u)$, определенной равенством (8.19), преобразуется при переходе к новой системе координат следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}(u) &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_1(u) \mathbf{R}_2(u) \mathbf{p}_2 = \\ &= \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_1(u) \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}_2(u) \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}_2 = \\ &= \tilde{\mathbf{R}}_1(u) \tilde{\mathbf{R}}_2(u) \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{r}}(u). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что сферическая кривая $\tilde{\mathbf{r}}(u)$, которая определена относительно новой системы координат, может быть получена из исходной сферической кривой $\mathbf{r}(u)$ посредством того же поворота \mathbf{R} .

Теорема доказана.

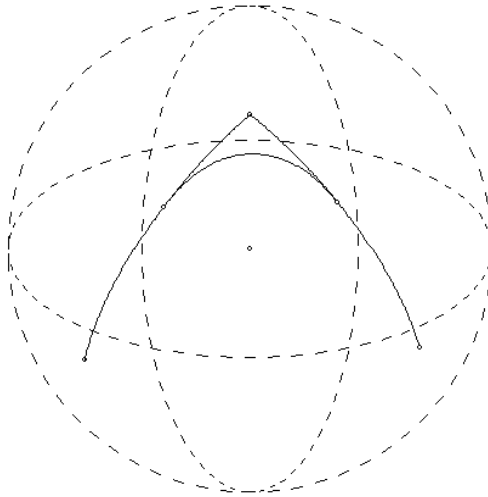


Рис. 8.5. Сглаживание угла на сфере

На рис. 8.5 показан пример сглаживания угла, образованного двумя дугами больших окружностей на сфере.

8.8. Сглаживание углов ломаной линии на сфере

Теперь приведем детальное описание алгоритма построения параметризованной кривой $r(t) \in C^n$ на поверхности сферы S^2 , которая сглаживает угол в точке P_2 , образованный дугами больших окружностей. Для этой цели введем следующие обозначения:

1. Пусть $r_i(t)$, где $i \in \{1, 2, 3\}$, описывает i -й сегмент сглаживающей сплайновой кривой $r(t)$.

2. Через m и n обозначим единичные векторы, которые перпендикулярны к секущим плоскостям, определяемым соответственно точками P_1 , P_2 и P_2 , P_3 вместе с центром сферы, который находится в точке O .

3. Радиус-векторы точек P_1 , P_2 и P_3 будут обозначаться соответственно как p_1 , p_2 , p_3 .

4. Радиус-векторы точек Q_1 и Q_2 будут обозначаться соответственно q_1 и q_2 .

Тогда проблема сглаживания угла в точке стыковки дуг больших окружностей может быть решена по следующему алгоритму.

Алгоритм 8.2. Сглаживание угла ломаной кривой на поверхности двумерной сферы S^2 .

Шаг 1. Выполняем следующие вычисления:

1. Определяем нормальный вектор m и центральный угол $\varphi_1 = \angle P_1 O Q_1$, используя соответственно формулы (8.11) и (8.12) из раздела 8.6.

2. Генерируем параметризованную кривую

$$r_1(t) = R(m, u(t)\varphi_1)p_1, \quad u(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}, \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (8.20)$$

Здесь узлы t_1 и t_2 могут быть выбраны, принимая во внимание дополнительные кинематические или геометрические требования.

Очевидно, что в этом случае параметризованная кривая $r_1(t)$ имеет следующие граничные точки:

$$r_1(t_1) = R(m, u(t_1)\varphi_1)p_1 = R(m, 0)p_1 = p_1$$

и

$$r_1(t_2) = R(m, u(t_2)\varphi_1)p_1 = R(m, \varphi_1)p_1 = q_1.$$

Шаг 2. Выполняем следующие вычисления:

1. Определяем ось \mathbf{n} и центральные углы

$$\varphi_2 = \angle Q_1 O P_2, \quad \psi_1 = \angle P_2 O Q_2,$$

используя соответственно формулы (8.11) и (8.12) из раздела 8.6.

2. Используя формулу (8.19) из раздела 8.7, генерируем параметризованную кривую

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, w_{1,n}(u(t))\psi_1) \mathbf{R}(\mathbf{m}, w_{1,n}(1-u(t))(-\varphi_2)) \mathbf{q}_1, \quad (8.21)$$

$$u(t) = \frac{t-t_2}{t_3-t_2}, \quad t \in [t_2, t_3].$$

Здесь $w_{1,n}(u)$ обозначают сглаживающие полиномы, которые были определены в разделе 7.5. Значение индекса n должно соответствовать требуемой степени непрерывности составной кривой. Для того чтобы обеспечить параметрическую непрерывность составной кривой $\mathbf{r}(t)$ в точке Q_1 , значение узла t_3 определяется из условия

$$t_3 = t_2 + \frac{(t_2 - t_1)}{\varphi_1} \varphi_2.$$

Очевидно, что в этом случае параметризованная кривая $\mathbf{r}_2(t)$ имеет следующие граничные точки:

$$\mathbf{r}_2(t_2) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, 0) \mathbf{R}(\mathbf{m}, -\varphi_2) \mathbf{q}_1 = \mathbf{R}(\mathbf{m}, -\varphi_2) \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1$$

и

$$\mathbf{r}_2(t_3) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, \psi_1) \mathbf{R}(\mathbf{m}, 0) \mathbf{q}_1 = \mathbf{R}(\mathbf{n}, \psi_1) \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2.$$

Шаг 3. Выполняем следующие вычисления:

1. Определим центральный угол $\psi_2 = \angle Q_2 O P_3$, используя формулу (8.12) из раздела 8.6.

2. Генерируем параметризованную кривую

$$\mathbf{r}_3(t) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, u(t)\psi_2) \mathbf{q}_2, \quad u(t) = \frac{t-t_3}{t_4-t_3}, \quad t \in [t_3, t_4]. \quad (8.22)$$

Для того чтобы обеспечить параметрическую непрерывность составной кривой $\mathbf{r}(t)$ в точке Q_2 , значение узла t_4 определяется из условия

$$t_4 = t_3 + \frac{(t_3 - t_2)}{\psi_1} \psi_2.$$

Очевидно, что в этом случае параметризованная кривая $r_3(t)$ имеет следующие граничные точки:

$$r_3(t_3) = \mathbf{R}(n, u(t_3)\psi_2)q_2 = \mathbf{R}(n, 0)q_2 = q_2$$

и

$$r_3(t_4) = \mathbf{R}(n, u(t_4)\psi_2)q_2 = \mathbf{R}(n, \psi_2)q_2 = p_3.$$

Тогда параметризованная кривая $r(t)$ при $t \in [t_1, t_4]$ может быть определена следующим образом:

$$r(t) = r_i(t), t \in [t_i, t_{i+1}], i \in \{1, 2, 3\}.$$

Очевидно, что определенная таким образом параметризованная кривая $r(t)$ имеет следующие свойства:

1. Из равенств (8.20), (8.21) и (8.22) следует, что параметризованные кривые $r_i(t)$ проходят через точки P_1 , Q_1 , Q_2 и P_3 .

2. Из теоремы 3, доказанной в разделе 8.7, следует, что параметризованная кривая $r(t)$ имеет n -ю степень непрерывности, т. е. $r(t) \in C^n$.

3. Кроме того, из теоремы 4, доказанной в разделе 8.7, следует, что параметризованная кривая $r(t)$ инвариантна относительно перехода между ортонормированными системами координат с центром в сфере S^2 .

Следовательно, параметризованная кривая $r(t)$ удовлетворяет всем сформулированным в разделе 8.5 требованиям.

Глава 9

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЛАЙНОВЫХ КРИВЫХ НА СФЕРЕ S^3

В этой главе рассмотрен подход к моделированию сплайновых кривых на поверхности трехмерной сферы единичных кватернионов. Сплайновые кривые конструируются посредством смещения дуг окружностей, лежащих на сфере единичных кватернионов. Сами дуги окружностей представляются как орбиты действия подгруппы группы единичных кватернионов на эту сферу. Предлагаемый подход концептуально аналогичен подходу, используемому для моделирования сплайновых кривых на поверхности двумерной сферы, который изложен в главе 8. Но в этом случае нужно учитывать, что рассматриваются действия группы единичных кватернионов на саму себя.

Материал, изложенный в данной главе, базируется на работах автора [42; 44–46; 79]. Другие подходы к моделированию ориентаций твердого тела изложены в [43; 65–78]. Можно отметить работу [73], в которой ориентационные сплайновые кривые также моделируются посредством деформации ориентационных дуг. Но эта работа отличается от предлагаемого подхода как концептуально, так и технически.

Материал в главе организован следующим образом. Сначала рассмотрено построение интерполяционных сплайновых кривых, а затем сглаживание углов ломаных линий на поверхности сферы единичных кватернионов. Сегменты сплайновых кривых определяются как смещение дуг окружностей, являющихся орбитами поворотов трехмерной сферы.

Отметим, что изложенный в данной главе подход можно рассматривать как кинематический способ построения сплайновых кривых, поэтому он особенно подходит для решения различных кинематических задач, например таких, как планирование траекторий роботов.

9.1. Постановка задачи построения ориентационной сплайн-кривой

Рассмотрим сферу S^3 , которая описана каноническим уравнением

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

относительно некоторой ортогональной системы координат с началом в центре этой сферы. Пусть задана некоторая последовательность различных точек (P_1, P_2, \dots, P_k) , $k > 1$, лежащих на поверхности сферы S^3 . Проблема формулируется следующим образом:

1. Требуется построить параметризованную сплайновую кривую $R(t)$, которая лежит на поверхности сферы S^3 и интерполирует точки P_i .

2. Параметризованная сплайн-кривая $R(t)$ должна принадлежать классу C^n , т. е. иметь непрерывные производные до порядка n включительно.

3. Форма параметризованной сплайновой кривой $R(t)$ должна локально зависеть от узловых точек последовательности, что позволяет генерировать и модифицировать моделируемую сплайновую кривую в режиме онлайн.

4. Дополнительным требованием к параметризованной сплайновой кривой $R(t)$ является ее инвариантность относительно выбора ортогональной системы координат с началом в центре сферы.

Параметризованная кривая $R(t)$, удовлетворяющая перечисленным выше требованиям, будет называться *интерполяционным сплайном* на поверхности сферы S^3 .

Предлагаемое решение этой проблемы, которое рассматривается в дальнейших разделах, базируется на смещении дуг малых окружностей сферы S^3 , каждая из которых проходит через три соседние точки последовательности (P_1, P_2, \dots, P_k) .

9.2. Построение дуг малых окружностей по ориентациям

Рассмотрим три различные ориентации, которые представлены единичными кватернионами P_1 , P_2 и P_3 . Определим дугу ориентационной окружности, которая проходит через эти ориентации, начиная от ориентации P_1 , проходя через ориентацию P_2 и заканчиваясь в ориентации P_3 . Для этой цели, используя векторное произведение кватернионов, определим единичный кватернион

$$H = \frac{P_1 \times P_2 \times P_3}{|P_1 \times P_3 \times P_3|},$$

который, как показано в разделе 2.9, перпендикулярен единичным кватернионам P_1 , P_2 и P_3 . После этого определим единичные кватернионы R_i , удовлетворяющие равенствам

$$P_i = R_i H, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (9.1)$$

которые, как показано в разделе 2.8, имеют только векторные части, так как единичный кватернион H перпендикулярен единичным кватернионам P_1 , P_2 и P_3 . Для этой цели введем следующие обозначения:

$$P_i = \cos \alpha_i + \sin \alpha_i k_i, \quad i \in \{1, 2, 3\},$$

и

$$H = \cos \beta + \sin \beta l.$$

Тогда единичные кватернионы R_i могут быть определены следующим образом:

$$R_i = P_i H^*$$

или при помощи формулы (2.12) из раздела 2.8 как

$$R_i = -\cos \alpha_i l + \cos \beta k_i - \sin \alpha_i \sin \beta (k_i \times l), \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Так как кватернионы R_i имеют только векторную часть, то можно ввести обозначения

$$m_i = R_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

При этом векторы m_i – единичные нормальные векторы, так как кватернионы R_i являются единичными как произведения единичных кватернионов. Используя эти обозначения, единичные кватернионы R_i могут быть представлены как:

$$R_i = \cos(\pi/2) + \sin(\pi/2)m_i = m_i$$

Таким образом, получили, что нормальные векторы m_i представляют некоторые точки M_i , лежащие на поверхности сферы S^2 с центром в начале системы координат.

Теперь определим параметрическую дугу малой окружности единичной сферы S^2 , которая проходит от точки M_1 до точки M_3 через точку M_2 , которые соответствуют нормальным векторам m_i . Для этой цели используем формулы (8.1), (8.3) и (8.4) из раздела 8.2. Пусть n , φ

и ψ обозначают соответственно ось и центральные углы, которые получены, используя эти формулы. Тогда параметризованная кривая

$$\mathbf{r}(u) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, u(\varphi + \psi))\mathbf{m}_1, \quad u \in [0, 1], \quad (9.2)$$

описывает требуемую дугу малой окружности на поверхности единичной сферы S^2 .

Используя параметризованную кривую $\mathbf{r}(u)$, заданную равенством (9.2), определим параметризованную кривую

$$\mathbf{R}(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{r}(u) \end{bmatrix}, \quad u \in [0, 1], \quad (9.3)$$

которая лежит на сфере единичных кватернионов. Теперь определим параметризованную кривую

$$\mathbf{P}(u) = \mathbf{R}(u)\mathbf{H}, \quad u \in [0, 1]. \quad (9.4)$$

Так как параметризованная кривая $\mathbf{P}(u)$ определяется через параметризованную кривую $\mathbf{R}(u)$ и все точки этой кривой являются единичными кватернионами, то очевидно, что параметризованная кривая $\mathbf{P}(u)$ описывает некоторую дугу окружности на сфере единичных кватернионов. Можно сказать, что параметризованная кривая $\mathbf{P}(u)$ лежит в плоскости, перпендикулярной кватерниону \mathbf{H} , и каждая точка этой кривой строится поворотом кватерниона \mathbf{H} , причем эти повороты образуют непрерывную параметризованную $\mathbf{R}(u)$. Так как окружности, описываемые параметризованными кривыми $\mathbf{R}(u)$, имеют различные радиусы, то в общем случае параметризованные кривые $\mathbf{P}(u)$ описывают дуги малых окружностей на сфере единичных кватернионов.

Очевидно, что дуга ориентационной окружности $\mathbf{P}(u)$ начинается в ориентации \mathbf{P}_1 , проходит через ориентацию \mathbf{P}_2 и заканчивается в ориентации \mathbf{P}_3 . Следовательно, параметризованная кривая $\mathbf{P}(u)$ описывает требуемую дугу ориентационной окружности.

На рис. 9.1 показаны оси трех ориентаций и дуги окружностей, которые проходят через эти ориентации. А на рис. 9.2 показаны эти же дуги ориентационных окружностей, но без ориентационных осей. Можно сказать, что эти дуги являются проекцией трехмерной окружности на поверхность двумерной сферы.

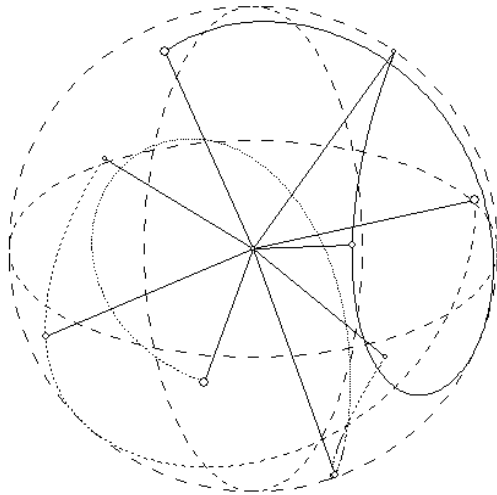


Рис. 9.1. Дуги окружностей с осями ориентаций

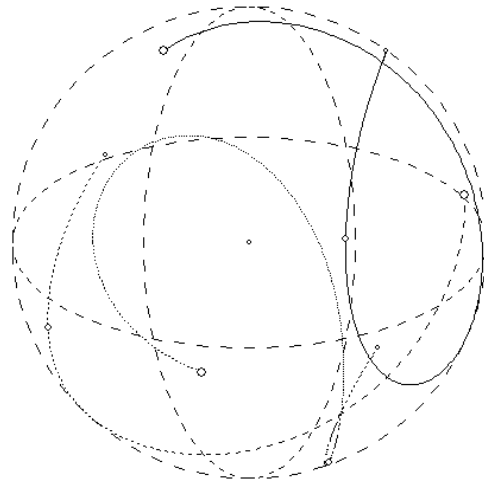


Рис. 9.2. Дуги окружностей без осей ориентаций

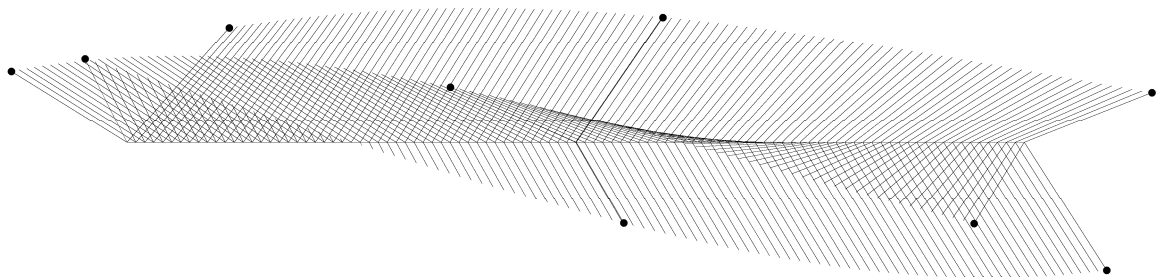


Рис. 9.3. Ориентационная дуга малой окружности при движении твердого тела вдоль линейного сегмента

Чтобы представить параметризованную кривую $P(u)$ как орбиту некоторого преобразования трехмерной единичной сферы, преобразуем формулу (9.4) следующим образом. Учитывая равенства (9.1), выразим кватернион H через кватернион P_1 следующим образом:

$$H = R_1^* P_1.$$

Теперь подставим это выражение в равенство (9.4), получим следующее выражение для параметризованной кривой $P(u)$:

$$P(u) = R(u)R_1^* P_1. \quad (9.5)$$

Если ввести обозначение

$$\tilde{R}(u) = R(u)R_1^*,$$

то параметризованная кривая $P(u)$ может быть определена следующим образом:

$$P(u) = \tilde{R}(u)P_1, u \in [0,1].$$

Таким образом, получили, что параметризованная кривая $P(u)$ описывает дугу малой окружности трехмерной сферы как орбиту некоторого преобразования этой сферы.

Принимая во внимание последнее равенство, в дальнейшем для простоты изложения дуга малой окружности сферы единичных кватернионов будет обозначаться как

$$P(u) = R(u)P_1, u \in [0,1],$$

или для различия вращений как

$$P(u) = R(n, u\alpha)P_1, u \in [0,1]. \quad (9.6)$$

В последнем случае подразумевается, что $R(n, u\alpha)$ обозначает некоторый параметризованный единичный кватернион.

9.3. Смешение ориентационных дуг

Рассмотрим единичную сферу S^3 , которая описана каноническим уравнением

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

относительно некоторой ортогональной системы координат с центром в начале сферы. Возьмем на поверхности этой сферы две различные точки P_1 и P_2 . Предположим, что точки P_1 и P_2 описаны относительно заданной системы координат единичными радиус-векторами P_1 и P_2 соответственно. Рассмотрим две дуги окружности

$$P(u) = R(m, u\varphi)P_1, u \in [0,1], \quad (9.7)$$

и

$$Q(u) = R(n, u\psi)P_1, u \in [0,1], \quad (9.8)$$

которые лежат на поверхности сферы S^3 и имеют следующие граничные точки:

$$P(0) = Q(0) = P_1, P(1) = Q(1) = P_2. \quad (9.9)$$

Из этих равенств видно, что дуги окружностей $P(u)$ и $Q(u)$ соединяют точки P_1 и P_2 . Проблема заключается в конструировании параметризованной кривой $R(u)$, которая лежит на поверхности сферы S^3 и удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$R(0) = P_1, R(1) = P_2 \quad (9.10)$$

и

$$R^{(k)}(0) = P^{(k)}(0), R^{(k)}(1) = Q^{(k)}(1) \quad (9.11)$$

для всех $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $n \in N$. Параметризованную кривую $R(u)$ будем называть *смешением* параметризованных кривых $P(u)$ и $Q(u)$ или *деформацией параметризованной кривой $P(u)$ в параметризованную кривую $Q(u)$* .

Используя сглаживающие полиномы $w_{1,n}(u)$ и $w_{2,n}(u)$, рассмотренные в разделе 7.5, и формулу (9.6) из раздела 9.2, определим параметризованную кривую $R(u)$ следующим образом:

$$R(u) = R(n, w_{1,n}(u)\psi)R(m, w_{2,n}(u)\varphi)P_1, u \in [0, 1]. \quad (9.12)$$

Во-первых, отметим, что данная кривая $R(u)$ лежит на поверхности сферы S^3 , так как является орбитой ортогонального поворота. В следующих теоремах покажем, что эта параметризованная кривая удовлетворяет требуемым граничным условиям и инвариантна относительно перехода между ортогональными системами координат.

Теорема 1. Параметризованная кривая $R(u)$, заданная формулой (9.12), удовлетворяет граничным условиям, заданным равенствами (9.10) и (9.11).

Доказательство. Принимая во внимание равенства (9.9), из определения параметризованной кривой $R(u)$ следует, что

$$R(0) = R(n, 0)R(m, 0)P_1 = P_1$$

и

$$R(1) = R(n, \psi)R(m, 0)P_1 = R(n, \psi)P_1 = P_2.$$

Следовательно, граничные условия, заданные равенствами (9.10), выполняются. Кроме того, из теоремы 8, доказанной в разделе 7.8, следует, что

$$(R(n, w_{1,n}(u)\psi)R(m, w_{2,n}(u)\varphi))^{(k)}(0) = R^{(k)}(m, u\varphi)(0)$$

и

$$(\mathbf{R}(\mathbf{n}, w_{1,n}(u)\psi)\mathbf{R}(\mathbf{m}, w_{2,n}(u)\varphi))^{(k)}(1) = \mathbf{R}^{(k)}(\mathbf{n}, u\psi)(1)$$

для всех $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $n \in N$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(k)}(0) &= (\mathbf{R}(\mathbf{n}, w_{1,n}(u)\psi)\mathbf{R}(\mathbf{m}, w_{2,n}(u)\varphi))^{(k)}(0)\mathbf{P}_1 = \\ &= (\mathbf{R}(\mathbf{m}, u\varphi))^{(k)}(0)\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}^{(k)}(0) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(k)}(1) &= (\mathbf{R}(\mathbf{n}, w_{1,n}(u)\psi)\mathbf{R}(\mathbf{m}, w_{2,n}(u)\varphi))^{(k)}(1)\mathbf{P}_1 = \\ &= (\mathbf{R}(\mathbf{n}, u\psi))^{(k)}(1)\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}^{(k)}(1) \end{aligned}$$

для всех $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $n \in N$. Таким образом, граничные условия, заданные равенствами (9.11), также выполняются.

Теорема доказана.

Теорема 2. Параметризованная кривая $\mathbf{R}(u)$, определенная равенством (9.12), инвариантна относительно перехода между ортогональными системами координат с началом в центре сферы S^3 .

Доказательство. Возьмем произвольную ортогональную систему координат с началом в центре сферы S^3 . Обозначим через \mathbf{R} ортогональную матрицу перехода к новой ортогональной системе координат с началом в центре сферы. Для краткости введем следующие обозначения:

$$\mathbf{R}_1(u) = \mathbf{R}(\mathbf{n}, w_{1,n}(u)\psi), \quad \mathbf{R}_2(u) = \mathbf{R}(\mathbf{m}, w_{2,n}(u)\varphi).$$

Тогда координаты радиус-вектора \mathbf{P}_1 и параметризованных ортогональных поворотов $\mathbf{R}_1(u)$, $\mathbf{R}_2(u)$, учитывая формулу (9.5) из раздела 9.2, преобразуются при переходе к новой системе координат следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{P}_1$$

и

$$\tilde{\mathbf{R}}_1(u) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_1(u)\mathbf{R}, \quad \tilde{\mathbf{R}}_2(u) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_2(u)\mathbf{R}.$$

Используя эти равенства, координатное представление сферической кривой $\mathbf{R}(u)$, описанной формулой (9.11), преобразуется при переходе к новой системе координат как

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}(u) &= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_1(u)\mathbf{R}_2(u)\mathbf{P}_1 = \\ &= \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_1(u)\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_2(u)\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P}_1 = \\ &= \tilde{\mathbf{R}}_1(u)\tilde{\mathbf{R}}_2(u)\tilde{\mathbf{P}}_1 = \tilde{\mathbf{R}}(u). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что координатное представление сферической кривой $\tilde{R}(u)$ относительно новой системы координат может быть получено из исходного представления этой кривой $R(u)$ посредством поворота, заданного матрицей R^{-1} .

Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что параметризованная ориентационная кривая $R(u)$ инвариантна относительно перехода между ортогональными системами координат с общей начальной точкой в евклидовом аффинном пространстве E^3 . Параметризованная кривая $R(u)$ будет называться *смещением параметризованных кривых $P(u)$ и $Q(u)$* или *деформацией параметризованной кривой $P(u)$ в параметризованную кривую $Q(u)$* .

На рис. 9.4 показаны исходные дуги двух ориентационных кривых при движении твердого тела вдоль прямолинейного отрезка.

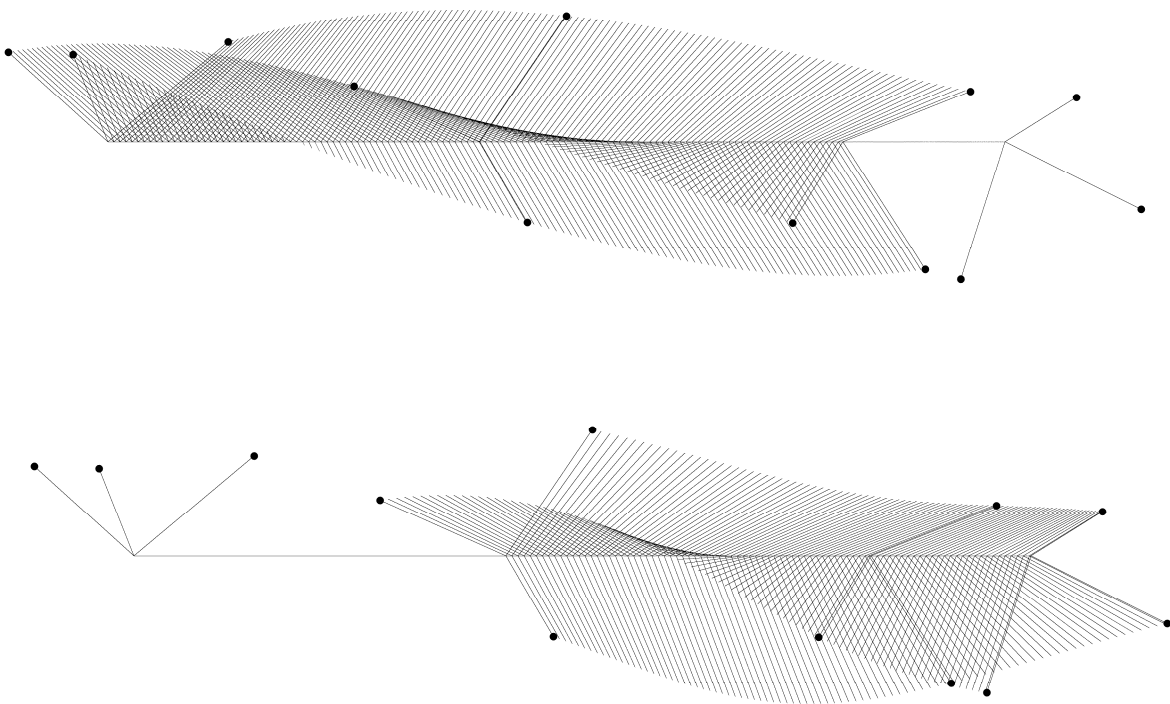


Рис. 9.4. Исходные дуги двух ориентационных кривых при движении вдоль линейного сегмента

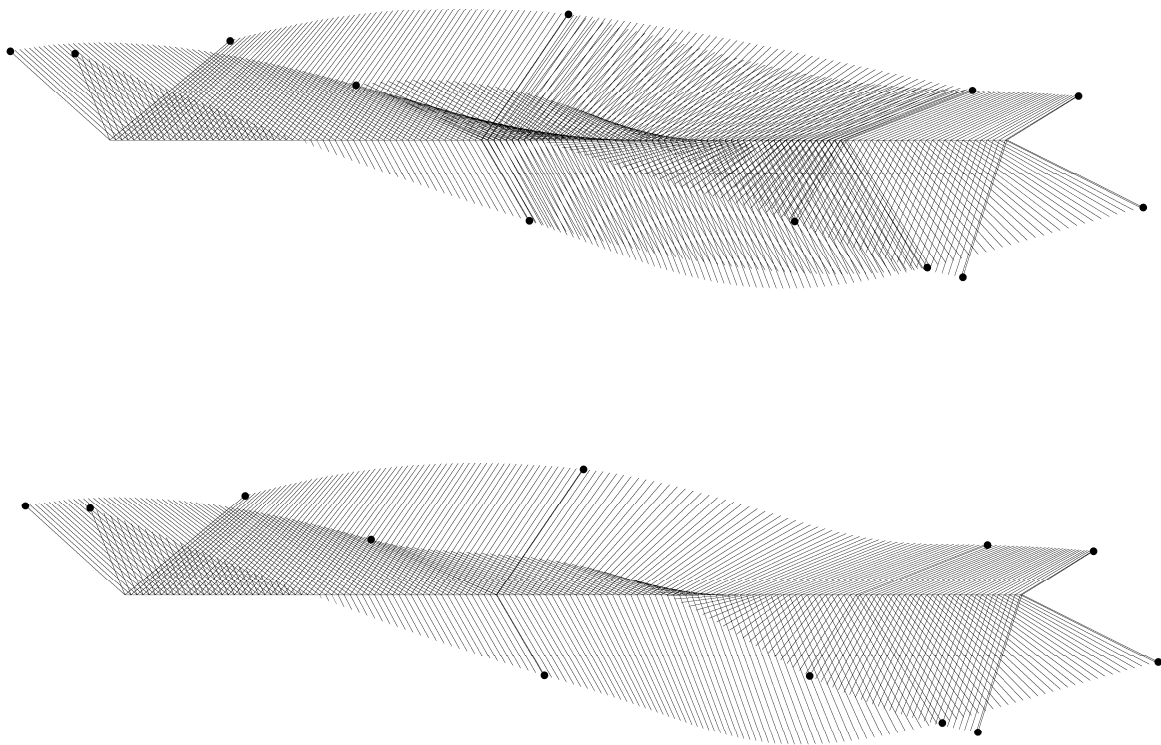


Рис. 9.5. Ориентационная дуга, полученная смещением исходных ориентационных дуг при движении вдоль линейного сегмента

На рис. 9.5 сначала показана композиция исходных ориентационных дуг, представленных на рис. 9.4, а затем ориентационная дуга при движении твердого тела вдоль прямолинейного отрезка, которая получена путем смещения двух исходных ориентационных дуг посредством предлагаемого подхода.

9.4. Построение ориентационной сплайновой кривой

Теперь объединим полученные результаты и приведем детальное описание алгоритма построения интерполирующей сплайновой кривой $\mathbf{R}(t) \in C^n$ на поверхности сферы S^3 , которая проходит через последовательность точек $(\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_k)$, $k > 1$, лежащих на поверхности сферы.

Для решения поставленной задачи разработан алгоритм, который базируется на следующих процедурах.

Процедура 9.1. Вычисление единичного кватерниона N_i , перпендикулярного трем заданным единичным кватернионам R_i , R_{i+1} и R_{i+2} , лежащим на поверхности трехмерной сферы S^3 :

$$N_i = \frac{R_i \times R_{i+1} \times R_{i+2}}{|R_i \times R_{i+1} \times R_{i+2}|}.$$

Процедура 9.2. Преобразование единичных кватернионов R_i , R_{i+1} и R_{i+2} в точки r_i , r_{i+1} и r_{i+2} , которые лежат на поверхности единичной двумерной сферы S^2 :

$$r_i = P_i N_i^*,$$

где единичный кватернион N_i вычисляется посредством процедуры 9.1.

Процедура 9.3. Генерация начального сегмента $R_0(t)$ ориентационной сплайновой кривой $R(t)$.

Шаг 1. Вычисляем единичный кватернион N_0 , используя процедуру 9.1.

Шаг 2. Используя процедуру 9.2, преобразуем заданные единичные кватернионы R_0 , R_1 и R_2 в точки r_0 , r_1 и r_2 , лежащие на поверхности единичной двумерной сферы S^2 .

Шаг 3. Определяем ось n_0 , используя процедуру 8.1.

Шаг 4. Определяем центральные углы φ_0 и ψ_0 , используя процедуру 8.3.

Шаг 5. Генерируем начальный сегмент $R_0(t)$ интерполирующей сплайновой кривой $R(t)$, используя процедуру

$$R_0(t) = R(n_0, u(t)\varphi_0)r_0N_0, \quad u(t) = \frac{t-t_0}{t_1-t_0}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

где $R(n_0, \varphi_0)$ описывает ортогональный поворот вокруг оси n_0 на угол φ_0 .

Процедура 9.4. Генерация промежуточного сегмента $R_i(t)$ ориентационной сплайновой кривой $R(t)$.

Шаг 1. Вычисляем единичный кватернион N_i , используя процедуру 9.1.

Шаг 2. Используя процедуру 9.2, преобразуем заданные единичные кватернионы R_i , R_{i+1} и R_{i+2} в точки r_i , r_{i+1} и r_{i+2} , лежащие на поверхности единичной двумерной сферы S^2 .

Шаг 3. Определяем ось \mathbf{n}_i , используя процедуру 8.1.

Шаг 4. Определяем центральные углы φ_i и ψ_i , используя процедуру 8.3.

Шаг 5. Генерируем промежуточный сегмент $\mathbf{R}_i(t)$ интерполирующей сплайновой кривой $\mathbf{R}(t)$, используя формулу

$$\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{R}(\mathbf{n}_i, w_{1,n}(u(t))\varphi_i) \mathbf{R}(\mathbf{n}_{i-1}, w_{2,n}(u(t))\psi_{i-1}) \mathbf{r}_i \mathbf{N}_i,$$

$$u(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}],$$

где $\mathbf{R}(\mathbf{n}_{i-1}, \psi_{i-1})$ и $\mathbf{R}(\mathbf{n}_i, \varphi_i)$ описывают ортогональные повороты вокруг осей \mathbf{n}_{i-1} и \mathbf{n}_i на углы ψ_{i-1} и φ_i соответственно.

Процедура 9.5. Генерация конечного сегмента $\mathbf{R}_{k-1}(t)$ ориентационной сплайновой кривой $\mathbf{R}(t)$.

Шаг 1. Генерируем конечный сегмент $\mathbf{R}_{k-1}(t)$ интерполирующей сплайновой кривой $\mathbf{R}(t)$, используя формулу

$$\mathbf{R}_{k-1}(t) = \mathbf{R}(\mathbf{n}_{k-2}, u(t)\psi_{k-2}) \mathbf{r}_{k-1} \mathbf{N}_{k-2}, \quad u(t) = \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}, \quad t \in [t_{k-1}, t_k],$$

где $\mathbf{R}(\mathbf{n}_{k-2}, \psi_{k-2})$ описывает ортогональный поворот вокруг оси \mathbf{n}_{k-2} на угол ψ_{k-2} .

Алгоритм 9.1. Моделирование сплайновой кривой $\mathbf{R}(t)$, лежащей на поверхности единичной сферы S^3 .

Шаг 1. Генерируем начальный сегмент $\mathbf{R}_0(t)$ интерполирующей сплайновой кривой $\mathbf{R}(t)$, используя процедуру 9.3.

Шаг 2. Полагаем $i = 1$.

Шаг 3. Генерируем промежуточный сегмент $\mathbf{R}_i(t)$ интерполирующей сплайновой кривой $\mathbf{R}(t)$, используя процедуру 9.4.

Шаг 4. Полагаем $i = i + 1$.

Шаг 5. Если $i < k - 1$, то переходим к шагу 3.

Шаг 6. Генерируем конечный сегмент $\mathbf{R}_{k-1}(t)$ интерполирующей сплайновой кривой $\mathbf{R}(t)$, используя процедуру 9.5.

Из теоремы 1 следует, что первые три требования поставленной задачи выполняются. Кроме того, из теоремы 2 следует, что параметризованная кривая $\mathbf{R}(t)$, построенная при помощи алгоритма 9.1, инвариантна относительно поворотов ортогональной системы координат в аффинном векторном пространстве E^3 .

9.5. Постановка задачи сглаживания ориентационной ломаной линии

Рассмотрим сферу S^3 , которая описана каноническим уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$$

относительно ортогональной системы координат, центр которой находится в центре сферы. Пусть на поверхности сферы S^3 заданы три различные ориентации P_1 , P_2 и P_3 , которые описаны ортогональными матрицами P_1 , P_2 и P_3 соответственно. Предположим, что ориентации P_1 и P_2 , а также ориентации P_2 и P_3 соединены дугами больших ориентационных окружностей. В общем случае эти дуги больших окружностей образуют угол в ориентации P_2 . Выберем некоторые ориентации Q_1 и Q_2 , которые лежат на этих дугах больших окружностей и отмечают соответственно начало и окончание сглаживания угла в ориентации P_2 . Пусть Q_1 и Q_2 – ортогональные матрицы, которые описывают эти ориентации.

Тогда задача формулируется следующим образом:

1. Требуется построить параметризованную кривую $R(t)$, которая состоит из трех сегментов. Первый сегмент этой кривой описывает ориентационную дугу большой окружности от ориентации P_1 до ориентации Q_1 . Второй сегмент этой кривой сглаживает угол в ориентации P_2 . Третий сегмент этой кривой описывает ориентационную дугу большой окружности от ориентации Q_2 до ориентации P_3 .

2. Параметризованная кривая $R(t)$ должна принадлежать классу C^n , т. е. иметь непрерывные производные до порядка n включительно.

3. Дополнительным требованием к параметризованной кривой $R(t)$ является ее инвариантность относительно выбора ортогональной системы координат с началом в центре сферы.

Параметризованную кривую $R(t)$ будем называть сплайновой кривой на поверхности сферы S^3 , которая сглаживает угол в ориентации P_2 .

Предлагаемое решение этой проблемы, которое рассматривается в дальнейших разделах, базируется на сглаживании дуг больших окружностей сферы S^3 , которые соединяют точку Q_1 с точкой P_2 и точку P_2 с точкой Q_2 .

Здесь следует заметить, что выбор ориентаций Q_1 и Q_2 зависит от различных кинематических или геометрических требований к сглаживающей сплайновой кривой $R(t)$. Например, ориентации Q_1 и Q_2 могут быть выбраны настолько близко к ориентации P_2 , насколько это позволяют кинематические и динамические характеристики робота-манипулятора.

9.6. Построение дуг больших окружностей по ориентациям

Рассмотрим две различные ориентации P_1 и P_2 , которые заданы ортогональными матрицами. Определим дугу большой окружности на единичной сфере S^3 , которая соединяет ориентацию P_1 с ориентацией P_2 . Для этого определим ортогональную матрицу R , которая удовлетворяет следующему условию:

$$RP_1 = P_2.$$

Найдем из этого уравнения матрицу R , получим

$$R = P_2 P_1^T.$$

Ортогональная матрица R описывает некоторый поворот $R(n, \varphi)$, ось n и угол φ которого могут быть найдены при помощи формул (3.12)–(3.16) из раздела 3.4.

Используя полученную матрицу поворота $R(n, \varphi)$, определим параметризованную кривую

$$P(u) = R(n, u\varphi)P_1, \quad u \in [0, 1].$$

Очевидно, что параметризованная кривая $P(u)$ имеет следующие граничные точки:

$$P(0) = P_1, \quad P(1) = P_2,$$

т. е. параметризованная кривая $P(u)$ соединяет ориентацию P_1 с ориентацией P_2 . Учитывая результаты, полученные в разделе 6.5, делаем заключение, что параметризованная кривая $P(u)$ описывает дугу большой окружности на единичной сфере S^3 . Эта окружность определяется как пересечение единичной сферы S^3 и двух гиперплоскостей

$$w \cdot p = 0, \quad u \cdot p = 0,$$

где векторы w и u заданы следующим образом:

$$\mathbf{w} = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \mathbf{u} = [0 \ n_1 \ n_2 \ n_3].$$

Таким образом, определенная параметризованная кривая $P(u)$ описывает дугу большой окружности ориентаций на единичной сфере S^3 между точками P_1 и P_2 .

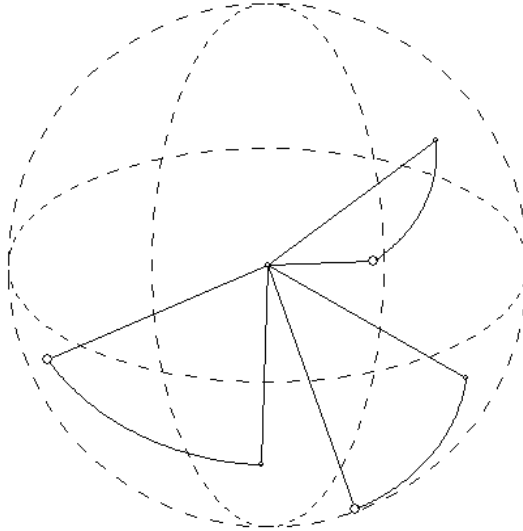


Рис. 9.6. Дуга большой ориентационной окружности

На рис. 9.6 показан пример дуги большой ориентационной окружности, построенной, используя приведенную формулу.

9.7. Сглаживание ориентационных дуг

Возьмем три различные ориентации, которые описаны ортогональными матрицами P_1 , P_2 и P_3 . Рассмотрим две дуги окружностей ориентаций

$$P(u) = R(\mathbf{m}, u\varphi)P_1, \quad u \in [0, 1], \quad (9.13)$$

и

$$Q(u) = R(\mathbf{n}, u\psi)P_2, \quad u \in [0, 1], \quad (9.14)$$

которые имеют следующие граничные ориентации:

$$P(0) = P_1, \quad P(1) = Q(0) = P_2, \quad Q(1) = P_3. \quad (9.15)$$

Из этих равенств видно, что дуги окружностей $P(u)$ и $Q(u)$ соединяют ориентацию P_1 с ориентацией P_2 и ориентацию P_2 с ориентацией P_3 соответственно. В общем случае дуги ориентационных окружностей

$P(u)$ и $Q(u)$ образуют угол в точке P_2 . Проблема состоит в том, чтобы построить ориентационную кривую $R(u)$, которая удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$R(0) = P_1, R(1) = P_3 \quad (9.16)$$

и

$$R^{(k)}(0) = P^{(k)}(0), R^{(k)}(1) = Q^{(k)}(1) \quad (9.17)$$

для $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $n \in N$. Параметризованная кривая $R(u)$ будет называться параметризованной кривой, сглаживающей параметризованные кривые $P(u)$ и $Q(u)$ или *сглаживающей параметризованной кривой*.

Для того чтобы построить сглаживающую параметризованную кривую $R(u)$, переопределим дугу ориентационной окружности $P(u)$ следующим образом:

$$P(u) = R(m, (1-u)(-\varphi))P_2, u \in [0, 1].$$

Теперь, используя сглаживающие полиномы $w_{1,n}(u)$, которые были определены в разделе 7.5, определим параметризованную кривую

$$R(u) = R(n, w_{1,n}(u)\psi)R(m, w_{1,n}(1-u)(-\varphi))P_2, u \in [0, 1]. \quad (9.18)$$

Покажем, что эта параметризованная кривая удовлетворяет граничным условиям, заданным равенствами (9.16) и (9.17).

Теорема 3. Параметризованная кривая, заданная формулой (9.18), удовлетворяет граничным условиям, заданным равенствами (9.16) и (9.17).

Доказательство. Из определения параметризованной кривой $R(u)$ следует, что

$$R(0) = R(n, 0)R(m, -\varphi)P_2 = R(m, -\varphi)P_2 = P_1$$

и

$$R(1) = R(n, \psi)R(m, 0)P_2 = R(n, \psi)P_2 = P_3,$$

т. е. граничные условия (9.16) выполняются.

Теперь покажем, что также выполняются граничные условия (9.17). Для этого найдем значения параметрических производных кривой $R(u)$ в граничных точках. Используя теорему 8 из раздела 9.8, получим

$$\begin{aligned} (R(n, w_{1,n}(u)\psi)R(m, w_{1,n}(1-u)(-\varphi)))^{(k)}(0) &= R^{(k)}(m, (1-u)(-\varphi))(0) = \\ &= (R(m, (u-1)\varphi))^{(k)}(0) = (R(m, u\varphi)R(m, -\varphi))^{(k)}(0) = \\ &= R^{(k)}(m, u\varphi)(0)R(m, -\varphi) \end{aligned}$$

и

$$(\mathbf{R}(n, w_{1,n}(u)\psi)\mathbf{R}(m, w_{1,n}(1-u)(-\varphi)))^{(k)}(1) = \mathbf{R}^{(k)}(n, u\psi)(1)$$

для $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $n \in N$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(k)}(0) &= (\mathbf{R}(n, w_{1,n}(u)\psi)\mathbf{R}(m, w_{1,n}(1-u)(-\varphi)))^{(k)}(0)\mathbf{P}_2 = \\ &= \mathbf{R}^{(k)}(m, u\varphi)(0)\mathbf{R}(m, -\varphi)\mathbf{P}_2 = \mathbf{R}^{(k)}(m, u\varphi)(0)\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}^{(k)}(0) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(k)}(1) &= (\mathbf{R}(n, w_{1,n}(u)\psi)\mathbf{R}(m, w_{1,n}(1-u)(-\varphi)))^{(k)}(1)\mathbf{P}_2 = \\ &= (\mathbf{R}(n, w_{1,n}(u)\psi))^{(k)}(1)\mathbf{P}_2 = (\mathbf{R}(n, u\psi))^{(k)}(1)\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}^{(k)}(1) \end{aligned}$$

для $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, где $n \in N$. Таким образом, граничные условия (9.17) также выполняются.

Теорема доказана.

Очевидно, что ортогональные повороты являются автоморфизмами сферы S^3 . Поэтому важно, чтобы кривые, моделируемые на поверхности сферы S^3 , были инвариантны относительно выбора ортогональных систем координат. В следующей теореме доказано, что параметризованная кривая $\mathbf{R}(u)$ удовлетворяет этому требованию.

Теорема 4. Ориентационная параметризованная кривая $\mathbf{R}(u)$, определенная равенством (9.18), инвариантна относительно поворотов ортогональной системы координат с центром в фиксированной точке пространства E^3 .

Доказательство. Рассмотрим евклидово аффинное пространство E^3 и зафиксируем в нем некоторую точку. Выберем в пространстве E^3 произвольную ортогональную систему координат с центром в этой точке. Обозначим через \mathbf{R} ортогональную матрицу перехода к новой системе координат с центром в этой же фиксированной точке. Для краткости изложения введем следующие обозначения:

$$\mathbf{R}_1(u) = \mathbf{R}(n, w_{1,n}(u)\psi), \quad \mathbf{R}_2(u) = \mathbf{R}(m, w_{1,n}(1-u)(-\varphi)).$$

Тогда ориентация \mathbf{P}_2 и матрицы ортогональных поворотов $\mathbf{R}_1(u)$ и $\mathbf{R}_2(u)$ преобразуются при переходе к новой системе координат следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}_2\mathbf{R},$$

и

$$\tilde{R}_1(u) = R^{-1}R_1(u)R, \quad \tilde{R}_2(u) = R^{-1}R_2(u)R.$$

Используя эти равенства, координатное представление параметризованной ориентационной кривой $R(u)$, определенной равенством (9.18), преобразуется при переходе к новой системе координат следующим образом:

$$\begin{aligned} R^{-1}R(u)R &= R^{-1}R_1(u)R_2(u)P_2R = \\ &= R^{-1}R_1(u)RR^{-1}R_2(u)RR^{-1}P_2R = \\ &= \tilde{R}_1(u)\tilde{R}_2(u)\tilde{P}_2 = \tilde{R}(u). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что параметризованная ориентационная кривая $\tilde{R}(u)$, которая определена относительно новой системы координат, может быть получена из исходной параметризованной ориентационной кривой $R(u)$ посредством того же поворота R .

Теорема доказана.

На рис. 9.7 и 9.8 показан один и тот же угол между дугами ориентационных окружностей, который в дальнейшем сглаживается. На рис. 9.9 показан пример сглаживания угла между дугами ориентационных окружностей.

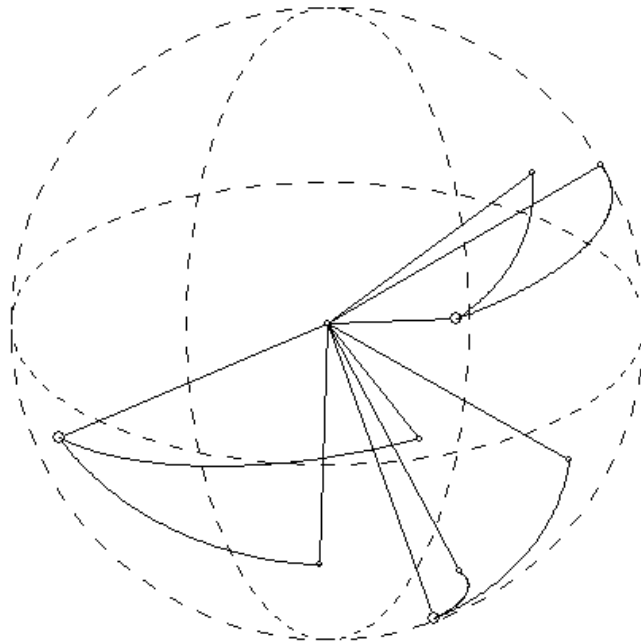


Рис. 9.7. Угол между ориентационными дугами

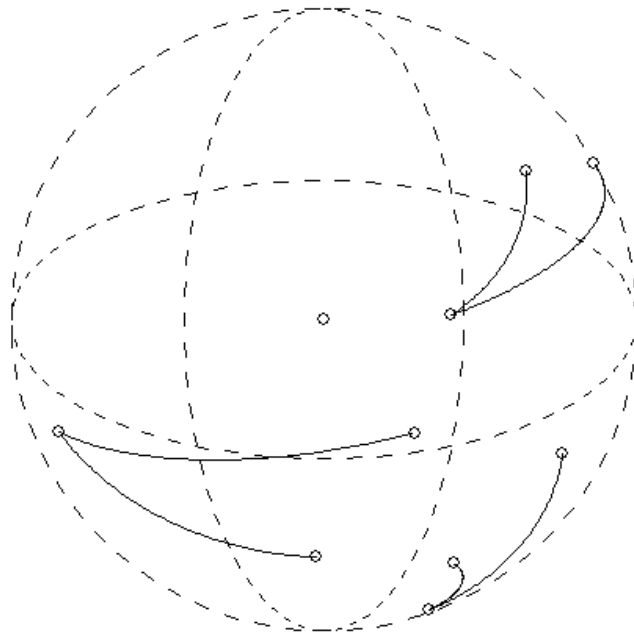


Рис. 9.8. Угол между ориентационными дугами без осей

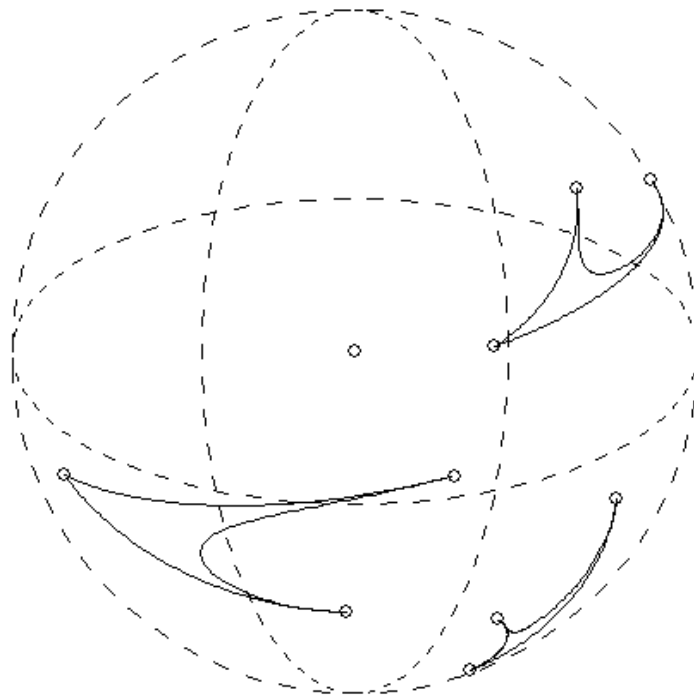


Рис. 9.9. Сглаживание ориентационных углов

9.8. Сглаживание углов ориентационной ломаной линии

Теперь приведем детальное описание алгоритма построения параметризованной кривой $R(t) \in C^n$ на поверхности сферы S^3 , которая сглаживает угол в ориентации P_2 , образованный дугами больших окружностей. Для этой цели введем следующие обозначения. Пусть $R_i(t)$, где $i \in \{1, 2, 3\}$, описывает i -й сегмент сглаживающей сплайновой кривой $R(t)$.

Тогда проблема сглаживания угла в точке стыковки дуг больших ориентационных окружностей может быть решена по следующему алгоритму.

Шаг 1. Выполняем следующие вычисления:

1. Определяем ось m и угол поворота φ_1 из ортогональной матрицы

$$R(m, \varphi_1) = Q_1 P_1^{-1},$$

используя для этого формулы (3.12)–(3.16) из раздела 3.4.

2. Генерируем параметризованную кривую

$$R_1(t) = R(m, u(t)\varphi_1)P_1, \quad u(t) = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}, \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (9.19)$$

Здесь узлы t_1 и t_2 могут быть выбраны, принимая во внимание некоторые кинематические или геометрические требования. Видно, что в этом случае параметризованная ориентационная кривая $R_1(t)$ имеет следующие граничные точки:

$$R_1(t_1) = R(m, u(t_1)\varphi_1)P_1 = R(m, 0)P_1 = P_1$$

и

$$R_1(t_2) = R(m, u(t_2)\varphi_1)P_1 = R(m, \varphi_1)P_1 = Q_1.$$

Шаг 2. Выполняем следующие вычисления:

1. Определяем оси m , n и углы поворотов φ_2 , ψ_1 из ортогональных матриц

$$R(m, \varphi_2) = P_2 Q_1^{-1}$$

и

$$R(n, \psi_1) = Q_2 P_2^{-1},$$

используя для этого формулы (3.12)–(3.16) из раздела 3.4.

2. После этого в соответствии с формулой (9.18) из раздела 9.7 генерируем параметризованную кривую

$$\mathbf{R}_2(t) = \mathbf{R}(n, w_{1,n}(u(t))\psi_1)\mathbf{R}(m, w_{1,n}(1-u(t))(-\varphi_2))\mathbf{Q}_1, \quad (9.20)$$

$$u(t) = \frac{t-t_2}{t_3-t_2}, \quad t \in [t_2, t_3].$$

Здесь $w_{1,n}(u)$ обозначают сглаживающие полиномы, которые были определены в разделе 7.5. Значение индекса n должно соответствовать требуемой степени непрерывности составной кривой. Для того чтобы обеспечить параметрическую непрерывность составной кривой $\mathbf{R}(t)$ в ориентации \mathbf{Q}_1 , значение узла t_3 определяется из условия

$$t_3 = t_2 + \frac{(t_2 - t_1)}{\varphi_1} \varphi_2.$$

Очевидно, что в этом случае параметризованная кривая $\mathbf{R}_2(t)$ имеет следующие граничные ориентации:

$$\mathbf{R}_2(t_2) = \mathbf{R}(n, 0)\mathbf{R}(m, -\varphi_2)\mathbf{Q}_1 = \mathbf{R}(m, -\varphi_2)\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1$$

и

$$\mathbf{R}_2(t_3) = \mathbf{R}(n, \psi_1)\mathbf{R}(m, 0)\mathbf{Q}_1 = \mathbf{R}(n, \psi_1)\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2.$$

Шаг 3. Выполняем следующие вычисления:

1. Определяем ось n и угол поворота ψ_2 из ортогональной матрицы

$$\mathbf{R}(n, \psi_2) = \mathbf{P}_3\mathbf{Q}_2^{-1},$$

используя для этого формулы (3.12)–(3.16) из раздела 3.4.

2. Генерируем параметризованную кривую

$$\mathbf{R}_3(t) = \mathbf{R}(n, u(t)\psi_2)\mathbf{Q}_2, \quad u(t) = \frac{t-t_3}{t_4-t_3}, \quad t \in [t_3, t_4]. \quad (9.21)$$

Для того чтобы обеспечить параметрическую непрерывность составной кривой $\mathbf{R}(t)$ в ориентации \mathbf{Q}_2 , значение узла t_4 определяется из условия

$$t_4 = t_3 + \frac{(t_3 - t_2)}{\psi_1} \psi_2.$$

Очевидно, что в этом случае параметризованная кривая $\mathbf{R}_3(t)$ имеет следующие граничные точки:

$$\mathbf{R}_3(t_3) = \mathbf{R}(n, u(t_3)\psi_2)\mathbf{Q}_2 = \mathbf{R}(n, 0)\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2$$

и

$$\mathbf{R}_3(t_4) = \mathbf{R}(n, u(t_4)\psi_2)\mathbf{Q}_2 = \mathbf{R}(n, \psi_2)\mathbf{Q}_2 = \mathbf{P}_3.$$

Тогда параметризованная кривая $\mathbf{R}(t)$, $t \in [t_1, t_4]$, может быть определена следующим образом:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_i(t), t \in [t_i, t_{i+1}], i \in \{1, 2, 3\}.$$

Очевидно, что определенная таким образом параметризованная кривая $\mathbf{R}(t)$ имеет следующие свойства:

1. Из равенств (9.19), (9.20) и (9.21) следует, что параметризованные кривые $\mathbf{R}_i(t)$ проходят через ориентации P_1 , Q_1 , Q_2 и P_3 .

2. Из теоремы 3, доказанной в разделе 9.7, следует, что параметризованная кривая $\mathbf{R}(t)$ имеет n -ю степень непрерывности, т. е. $\mathbf{R}(t) \in C^n$.

3. Кроме того, из теоремы 4, доказанной в разделе 9.7, следует, что параметризованная кривая $\mathbf{R}(t)$ инвариантна относительно перехода между ортонормальными системами координат с центром в сфере S^3 .

Следовательно, параметризованная кривая $\mathbf{R}(t)$ удовлетворяет всем сформулированным в разделе 9.5 требованиям.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абелева группа 18
Автоморфизм сферы 65
Аддитивная группа 18
Алгебра кватернионов 39
Атлас множества 10
- Базовая ориентация 95
Большая окружность двумерной сферы 116
- Вектор конечного поворота 97
Векторное произведение кватернионов 47
Векторное умножение кватернионов 47
Векторная часть кватерниона 36
Векторный кватернион 87
- Геодезическая линия 117
Гладкая дифференциальная структура 12
Гладкий атлас 11
Гладкое многообразие 12
Гладкое отображение перехода 11
Гладкое подмногообразие 12
Глобальная карта 9
Глобальная параметризация 14
Гомоморфизм 19
Гомотопия 32
Гомотопия линейная 34
Гомотопные параметризованные кривые 32
Группа 17
Группа единичных кватернионов 51
Группа Ли 24
Группа Ли n -мерная 24
- Двумерная сфера 112
Действие группы Ли 27
Деформация кривых 33
- Единичный кватернион 50
Единичный элемент 18
- Изоморфизм 21
Изоморфные группы 22
Интерполяционный сплайн на поверхности двумерной сферы 176
Интерполяционный сплайн на поверхности трехмерной сферы 196
- Каноническое уравнение двумерной сферы 112
Каноническое уравнение трехмерной единичной сферы 126
Кватернион 35
Коммутативная группа 18
Координатное отображение 9
Координатное представление действия группы Ли 28
Координатное представление отображения перехода 11
Координатная функция отображения перехода 11
Координаты кватерниона 35
- Левое действие 27
Линейное пространство кватернионов 36
Локальная карта 8
Локальная параметризация 13
Локальная система координат 9
Локальные координатные функции 9
Локальные координаты 9

Максимальный атлас 12
 Малая окружность двумерной сферы 116
 Матрица Якоби 15
 Многообразие n -мерное 10
 Множество G -инвариантное 29
 Модуль кватерниона 42
 Мультипликативная группа 18

Норма кватерниона 42
 Нулевой элемент 18

Область карты 8
 Обратный кватернион 44
 Обратный элемент 18
 Однопараметрическая подгруппа группы Ли 27
 Однородное пространство 30
 Операция сложения 18
 Операция умножения 18
 Орбита точки 29
 Ориентационные окружности 139
 Ориентация 95
 Ориентация левая 95
 Ориентация объекта 95
 Ориентация правая 95
 Ортогональная группа 63
 Ортогональная матрица 63
 Ортогональное дополнение кватернионов 48
 Ортогональные кватернионы 46
 Ортогональный поворот 65
 Отображения перехода между картами 10

Параметризация множества 14
 Параметрический кватернион 55
 Параметры 14
 Параметрическая кривая 56
 Параметры Родрига 102

Параметры Кэли – Клейна 81
 Параметры Эйлера 103
 Поворот 66
 Подгруппа 23
 Подгруппа группы Ли 26
 Полиномы Бернштейна степени n 146
 Преобразование гладкого многообразия 30
 Произведение кватерниона на действительное число 36
 Произведение кватернионов 37
 Противоположный элемент 18

Связная компонента единицы 26
 Сглаживающая параметризованная кривая 189, 210
 Симметричный элемент 18
 Скалярное произведение кватернионов 41
 Скалярная часть кватерниона 35
 Смешение параметризованных кривых 167
 Собственно ортогональная матрица 64
 Собственный ортогональный поворот 66
 Сопряженный кватернион 40
 Специальная ортогональная группа 64
 Специальная унитарная группа 75
 Специальная унитарная матрица 75
 Спин матрицы Паули 78
 Сумма кватернионов 36

Трехмерная единичная сфера 126

Факторизация Кэли 97

Эквивалентные гладкие атласы 11

Явное описание гладкого многообразия 14

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М. : МГУ, 1980.
2. Дубровин, Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: методы и приложения. 2-е изд. М. : Наука, 1986.
3. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли : пер. с англ. М. : Мир, 1987.
4. Понтрягин Л. С. Непрерывны группы. 3-е изд. М. : Наука, 1973.
5. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям : пер. с англ. М. : Мир, 1989.
6. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. М. : Наука, 1987.
7. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. М. : Наука, 1988.
8. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли. М. : Наука, 1982.
9. Введение в топологию : учеб. пособие для вузов / Ю. Г. Борисович [и др.]. М. : Высш. шк., 1980.
10. Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии : пер. с англ. М. : Мир, 1967.
11. Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные. М. : Наука, 1973.
12. Кострикин А. И. Введение в алгебру. М. : Наука, 1977.
13. Blaschke W. Kinematik und Quaternionen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.
14. Бранец В. Н., Шмыглевский Н. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М. : Наука, 1973.
15. Кирпичников С. Н. Новоселов В. С. Математические аспекты математики твердого тела. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.
16. Голубев Ю. Ф. Основы теоретической механики. М. : Изд-во МГУ, 1992.
17. Altmann S. L. Rotations, Quaternions and Double Groups. Oxford : Clarendon Press, 1986.
18. Арнольд В. И. Геометрия сферических кривых и алгебра кватернионов // Успехи Математических Наук. 1995. Т. 50, № 1(301). С. 3–68.
18. Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. М. : Изд-во Моск. центра непрерыв. мат. образования, 2002.
19. Yefremov A. P. Hypercomplex Numbers in Geometry and Physics // Scientific Journal. Quaternions: algebra, geometry and physical theories. 2004. Vol. 1, № 1. P. 104–119.

20. *Eberly D.* Quaternion Algebra and Calculus // Geometric Tools, LLC. 1998–2008. URL: <http://www.geometrictools.com/Documentation/Quaternions.pdf>. Date of access: 16.11.2009.
21. *Шахинпур М.* Курс Робототехники : пер. с англ. М. : Мир, 1990.
22. *Фу К., Гонсалес Р., Лу К.* Робототехника : пер. с англ. М. : Мир, 1989.
23. *Spring K. W.* Euler parameters and the use of quaternion algebra in the manipulation of finite rotations: A review // Mechanism Machine Theory. 1986. Vol. 21, № 5. P. 365–373.
24. *Funda J.* On Homogeneous Transforms, Quaternions and Computational Efficiency // IEEE Trans. On Robotics and Automation. 1990. Vol. 6, № 3. P. 383–388.
25. *Chou Jack C. K.* Quaternion Kinematic and Dynamic Differential Equations // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 1992. Vol. 8, № 1. P. 53–64.
26. *Coutsias Evangelos A., Romero L.* The Quaternions with an application to Rigid Body Dynamics // Department of Mathematics and Statistics, University of New Mexico, Albuquerque, NM 87131, Friday 12 February 1999.
27. *Aleš Ude.* Filtering in a unit quaternion space for model based object tracking // Robotics and Autonomous Systems. 1999. Vol. 28, № 2–3. P. 163–172.
28. *Shoemake K.* Quaternion calculus and fast animation // SIGGRAPH'87 Course Notes on State of the Art Image Synthesis. ACM Press, 1987. P. 101–121.
29. *Pletinckx D.* Quaternion calculus as a basic tool in computer graphics // The Visual Comput. J. 1989. Vol. 5, № 1. P. 2–13.
30. *Hanson A. J.* Visualizing quaternions. Morgan-Kaufmann/Elsevier, 2006.
31. *Mukundan R.* Quaternions: From Classical Mechanics to Computer Graphics, and Beyond // Proceedings of the 7th Asian Technology Conference in Mathematics. Melaka, 2002. P. 97–106.
32. *Stuelpnagel J.* On the parametrization of three-dimensional rotation group // SIAM Rev. 1964. Vol. 6, № 4. P. 422–430.
33. *Fillmore X. J. P.* A Note on Rotation matrices // IEEE Computer Grphics & Applications. 1984. February. P. 30–34.
34. *Grassia F. S.* Practical parameterization of rotations using the exponential map // J. Graph. Tools. 1998. Vol. 3, № 3. P. 29–48.
35. *Gallier J., Xu D.* Computing exponentials of skew-symmetric matrices and logarithms of orthogonal matrices // Intern. J. Robotics Automation. 2003. Vol. 18. P. 10–20.
36. *Bauchau O. A., Trainelli L.* The vectorial parametrization of rotation // Nonlinear Dynamics. 2003. Vol. 32. P. 71–92.
37. *Meister L., Schaeben H.* A concise quaternion geometry of rotations // Math. Meth. Appl. Sci. 2005. Vol. 28. P. 101–126.
38. *Bernstein I. N.* The Analytic Continuation of Generalized Functions with Respect to a Parameter // Functional Anal. Appl. 1972. Vol. 6. P. 273–285.
39. *Farouki R. T., Rajan V. T.* On the numerical condition of polynomials in Bernstein form // Computer Aided Geometric Design. 1987. Vol. 4. P. 191–216.
40. *Farouki R. T., Rajan V. T.* Algorithms for polynomials in Bernstein form // Computer Aided Geometric Design. 1988. Vol. 5. P. 1–26.
41. *Farouki R. T., Goldman, T. N. T.* On the optimal stability of the Bernstein basis // Mathematics of computation. 1996. Vol. 65. P. 1553–1566.
42. *Pobegailo A. P.* Spherical splines and orientation interpolation // The Visual Computer Journal. 1994. Vol. 11, № 1. P. 63–68.

43. *Pobegailo A. P.* Modeling of C_n spherical and orientational splines // Proc. Of the Third Pacific Conference on Computer Graphics and Applications, Pacific Graphics'95. Editors: Sung Yong Shin, Tosiyasu L Kunii. World Scientific, 1995. P. 148–156.
44. *Pobegailo A. P.* C_n interpolation on smooth manifolds with one-parameter transformations // Computer-Aided Design. 1996. Vol. 28, № 12. P. 973–979.
45. *Побегайло А. П.* Полиномиальная деформация кривых и её применение в геометрическом моделировании // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2009. № 3. С. 106–109.
46. *Pobegailo A. P.* Interpolation of rectangular grids using deformation of curves / A. P. Pobegailo // Pattern Recognition and Information Processing, PRIP'2009, Proc. of the 10th International Conference, 19–21 May, 2009. Minsk, 2009. P. 334–338.
47. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолли Дж.* Теория сплайнов и её приложения. М. : Мир, 1972.
48. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М. : Наука, 1976.
49. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М. : Наука, 1980.
50. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближений. М. : Наука, 1984.
51. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. М. : Радио и связь, 1985.
52. *Hoschek J.* Circular Splines // Comput Aided Design. 1992. Vol. 24. P. 611–618.
53. *Hoschek J., Seemann G.* Spherical splines // RAIRO, Modélisation mathématique et analyse numérique. 1992. Т. 26, № 1. P. 1–22.
54. *Dietz R., Hoschek J., Jüttler B.* An algebraic approach to curves and surfaces on the sphere and on other quadrics // Computer Aided Geometry Design. 1993. Vol. 10. P. 211–229.
55. *Park F. C., Ravani B.* Brezier curves on Riemannian manifolds and Lie groups with kinematic applications // Mechanism, Synthesis and Analysis. 1994. Vol. 70. P. 15–21.
56. *Wang W., Joe B.* Interpolation on quadric surfaces with rational quadratic spline curves // Computer Aided Geometric Design. 1997. Vol. 14. P. 207–230.
57. *Wang W, Qin K.* Rational spherical curve interpolation // Proceedings of CAD/Graphics '97, 1997. Shenzhen, China. International Academic Publishers, Beijing, 1997. P. 447–449.
58. *Wang W., Qin K.* Existence and computation of spherical rational quartic curves for Hermite interpolation // The Visual Comput. J. 2000. Vol. 16. P. 187–196.
59. *Buss S. R., Fillmore J. P.* Spherical averages and applications to spherical splines and interpolation // ACM Trans. Graph. 2001. Vol. 20. № 2. P. 95–126.
60. *Noakes L.* Quadratic interpolation on spheres // Adv. Comput. Math. 2002. Vol. 17. P. 385–395.
61. *Jüttler B., Wenping Wang.* The shape of spherical quartics // Computer Aided Geometric Design. 2003. Vol. 20, № 8–9. P. 621–636.
62. *Popiel T., Noakes L.* C_2 spherical Bézier splines // Computer Aided Geometric Design. 2006. Vol. 23, № 3. P. 261–275.
63. Constructing spherical curves by interpolation / Wang Xiaoping [et. al.] // Advances in Engineering Software. 2007. Vol. 38. № 3. P. 150–157.
64. A new geometric algorithm to generate smooth interpolating curves on Riemannian manifolds / C. Rui [et. al.] // The London Mathematical Society Journal, Comput. Math. 2005. Vol. 8. P.251–266.

65. *Shoemake K.* Animating rotation with quaternion curves // ACM SIGGRAPH Computer Graphics. 1985. Vol. 19, № 3. P. 245–254.
66. *Roberts K. S., Bishop G., Ganapathy S. K.* Smooth interpolation of rotational matrices // Proceedings CVPR '88: Computer Vision and Pattern Recognition. 1988. IEEE Computer Science Press, 1988. P. 724–729.
67. Smooth interpolation of orientations with angular velocity constraints using quaternions / A. H. Barr [et. al.] // Comput. Graph. 1992. Vol.26. № 2. P. 313–320.
68. *Nielson G. M., Heiland R. W.* Animated rotations using quaternions and splines on a 4D sphere // Program. Comput. Softw. 1992. Vol. 18. P. 145–154.
69. *Nielson G.* Smooth interpolation of orientation // In: Proc. Computer Animation'93: Models and Techniques in Computer Animation. 1993. Springer-Verlag. Berlin, 1993. P. 75–93.
70. *Wang W., Joe B.* Orientation interpolation in quaternion space using spherical biarcs // Proceedings of Graphics Interface'93. Canadian Information Processing Society, Toronto, Ontario, Canada, May 1993. P. 24–32.
71. *Hart J. C., Francis G. K., Kauffman L. H.* Visualizing Quaternion Rotation // ACM Transactions on Graphics. 1994. Vol. 13, № 3. P. 256–276.
72. *Kim M.-J., Kim M.-S., Shin S.* A general construction scheme for unit quaternion curves with simple high order derivatives // Computer Graphics (SIGGRAPH). 1995. Vol. 29. P. 369–376.
73. *Kim M.-S., Nam K.-W.* Interpolating solid orientations with circular blending quaternion curves // Computer-Aided Design. 1995. Vol. 27, № 5. P. 385–398.
74. *Johnstone J. K., Williams J. P.* Rational control of orientation for animation // Proceedings of Graphics Interface'95, 1995. Québec, Canada, Canadian Human-Computer Communications Society, Canada. P. 179–186.
75. *Park F. C., Ravani B.* Smooth invariant interpolation of rotations // ACM Trans. Graph. 1997. Vol. 16, № 3. P. 277–295.
76. *Horsch T., Jüttler B.* Cartesian spline interpolation for industrial robots // Computer-Aided Design. 1998. Vol. 30, № 3. P. 217–224.
77. *Röschel O.* Rational motion design – a survey // Computer-Aided Design. 1998. Vol. 30, № 3. P. 169–178.
78. *Zefran M., Kumar V.* Interpolation schemes for rigid body motions // Computer-Aided Design. 1998. Vol. 30, № 3. P. 179–189.
79. *Pobegailo A. P.* Construction of Small Circular Arcs on a Sphere of Unit Quaternions // J. of Graphics Tools. 2013. Vol. 17, № 1–2. P. 45–51.
80. *Pobegailo A. P.* Construction of spline curves on smooth manifolds by action of Lie groups // LMS J. Comput. Math. 2015. Vol. 18, № 1. P. 217–230.

Научное издание

Побегайло Александр Павлович

**ПРИМЕНЕНИЕ КВАТЕРНИОНОВ
В КОМПЬЮТЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ГРАФИКЕ**

Ответственный за выпуск *Е. А. Логвинович*

Дизайн обложки *О. В. Гасюк*

Технический редактор *Л. В. Жаборовская*

Компьютерная верстка *О. В. Гасюк*

Корректор *Е. В. Бобрович*

Тираж 10 экз.

Электронный ресурс 4,5 Мб

Белорусский государственный университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/270 от 03.04.2014.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.