

УДК 512.547

УНИПОТЕНТНОСТЬ ОБРАЗА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ F_2 ПРИ ОТОБРАЖЕНИИ ПРИМИТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УНИПОТЕНТНЫЕ МАТРИЦЫ С МАЛЫМИ КЛЕТКАМИ ЖОРДАНА

О.И. Тавгень¹, Ду Цзюньхуа², Лю Сцуньянь³¹Белорусский государственный университет, Минск²Институт естественных наук Цицикарского университета, Цицикар, Китай³Харбинский научно-технический университет, Харбин, Китай

THE REPRESENTATION IMAGE UNIPOTENCY OF THE GROUP F_2 BY MAPPING PRIMITIVE ELEMENTS INTO UNIPOTENT MATRICES WITH SMALL JORDAN BLOCKS

O.I. Tavgen¹, Du Junhua², Liu Chunyan³¹Belarusian State University, Minsk²College of Sciences of Qiqihar University, Qiqihar, China³Harbin University of Science and Technology, Harbin, China

Доказано, что образ представления свободной группы $F_2(x, y)$ в $GL(n, C)$ является унипотентной подгруппой, если $(\rho(p) - E)^5 = 0$ для любого примитивного элемента p и $(\rho(\xi) - E)^2 = 0$, $(\rho(\eta) - E)^3 = 0$ для каких-то ассоциированных примитивных элементов ξ и η группы F_2 .

Ключевые слова: унипотентная подгруппа, примитивный элемент, представление группы.

It is proved that the representation image of the free group $F_2(x, y)$ in $GL(n, C)$ is an unipotent subgroup, when $(\rho(p) - E)^5 = 0$ for all primitive elements p and $(\rho(\xi) - E)^2 = 0$, $(\rho(\eta) - E)^3 = 0$ for some associated primitive elements ξ and η of the group F_2 .

Keywords: unipotent subgroup, primitive element, representation of group.

Введение

Пусть $F_2(x, y)$ – свободная группа с образующими x и y . Рассмотрим представление этой группы

$$\rho: F_2(x, y) \rightarrow GL(n, C),$$

при этом образующие и все примитивные элементы F_2 переходят в унипотентные матрицы. Элемент свободной группы называется *примитивным*, если он может быть включен в некоторое множество свободных образующих этой группы [1]. Известным открытым вопросом является вопрос о том, будет ли при этих условиях унипотентным весь образ $\rho(F_2)$. В работах [2], [3] дан утвердительный ответ на этот вопрос для матриц порядков $n \leq 5$. В работах [4]–[5] дан утвердительный ответ на этот вопрос для любого n при условии $(\rho(p) - E)^k = 0$, $k=3,4$, для любого примитивного элемента p . В настоящей работе мы даем утвердительный ответ на этот вопрос для любого n при условии $(\rho(p) - E)^5 = 0$ для

любого примитивного элемента p и соотношения

$$(\rho(\xi) - E)^2 = 0,$$

$$(\rho(\eta) - E)^3 = 0$$

для каких-то ассоциированных примитивных элементов ξ и η группы F_2 .

Теорема. Образ $F_2(x, y)$ относительно $\rho: F_2(x, y) \rightarrow GL(n, C)$ – унипотентная подгруппа в $GL(n, C)$ при условии $(\rho(p) - E)^5 = 0$ для любого примитивного элемента p и

$$(\rho(\xi) - E)^2 = 0,$$

$$(\rho(\eta) - E)^3 = 0$$

для каких-то ассоциированных примитивных элементов ξ и η .

1 Предварительные результаты

Для доказательства теоремы используются следующие леммы.

Лемма 1.1 [1]. Пусть p и q – два ассоциированных примитивных элемента группы F_2 . Тогда все примитивные элементы, ассоциированные с p имеют вид $p^\alpha q^\varepsilon p^\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon = \pm 1$.

В дальнейшем обозначим

$$\rho(\xi) = A = H + E, \quad \rho(\eta) = B = T + E,$$

где ξ и η – два ассоциированных примитивных элемента группы F_2 и

$$(\rho(\xi) - E)^2 = 0,$$

$$(\rho(\eta) - E)^3 = 0,$$

E – единичная матрица, $L(W)$ – длина слова W .

Лемма 1.2. Пусть $(\rho(p) - E)^5 = 0$ для любого примитивного элемента p , то справедливо равенство $W(H, B) = 0$, если в слове $W(H, B)$ не менее пяти элементов H .

Доказательство. Поскольку

$$B^4 = 4B^3 - 6B^2 + 4B - E,$$

то можно считать, что в слове $W(H, B)$ нет элементов B^4 . Поскольку $B^m A$ – унитарные матрицы (см. лемму 1.1), то имеем

$$(B^m A - E)^5 = 0.$$

Отсюда
$$\left(A - E + mTA + \frac{m(m-1)}{2} T^2 A \right)^5 = 0.$$

Из этого получаем $(a_0 + a_1 m + a_2 m^2)^5 = 0$, где

$$a_0 = A - E, \quad a_1 = TA - \frac{1}{2} T^2 A,$$

$$a_2 = \frac{1}{2} T^2 A - \frac{1}{2} T^3 A.$$

Из $(a_0 + a_1 m + a_2 m^2)^5 = 0$ имеем

$$\sum_{k=0}^{10} F'_k m^k = 0,$$

где $F'_0 = a_0^5$, $F'_1 = a_0^4 a_1 + a_0^2 a_1 a_0^3 + a_0^3 a_1 a_0^2 + a_1 a_0^4, \dots$, $F'_{10} = a_2^5$. Если взять $m = m_i$, $i = \overline{1, 11}$, не равными, то $F'_i = 0$, $i = \overline{0, 10}$.

Поскольку $A^m B$ – унитарные матрицы (см. лемму 1), то имеем $(A^m B - E)^5 = 0$. Отсюда $(B - E + mHB)^5 = 0$. Из этого получаем $\sum_{k=0}^5 F_k m^k = 0$. Если взять $m = m_i$, $i = \overline{1, 6}$, не равными, то $F_i = 0$, $i = \overline{0, 5}$. Из $F_1 = 0$ получаем $T^2 HT^2 = 0$, и

$$\begin{aligned} HF_1 H &= HB^2 HB^2 H - 2HB^2 HBH - \\ &- 2HBHB^2 H + 4HBHBH = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Из $F_2 = 0$ получаем $F_2 \cdot T^2 = 0$, значит,

$$T^2 HTHT^2 = 0. \quad (1.2)$$

Из $F_2' = 0$ получаем

$$H \left(TA - \frac{1}{2} T^2 A \right) H \left(TA - \frac{1}{2} T^2 A \right) H = 0,$$

и следует

$$2HTHTH = HTHT^2 H + HT^2 HTH \quad (1.3)$$

или

$$6HBHBH = HB^2 HBH + HBHB^2 H. \quad (1.4)$$

Из (1.1), (1.4) получаем

$$HB^2 HB^2 H = 8HBHBH. \quad (1.5)$$

Умножив уравнение (1.3) справа на T^2 , получаем $2HTHTHT^2 = HTHT^2 HT^2 + HT^2 HTHT^2$, следовательно,

$$HTHTHT^2 = 0. \quad (1.6)$$

Из равенств $F_2' \cdot T = 0$, (1.2) и $T^2 HT^2 = 0$, получаем

$$THTHT^2 + THT^2 HT + T^2 HTHT = 0. \quad (1.7)$$

Умножив на H слева, (с помощью (1.6)) получаем

$$HTHT^2 HT + HT^2 HTHT = 0. \quad (1.8)$$

Умножив уравнение (1.3) справа на T , получаем $2HTHTHT = HTHT^2 HT + HT^2 HTHT$.

Из этого и (1.8) имеем $HTHTHT = 0$, т. е.

$$HBHBHB = HBHBH. \quad (1.9)$$

Аналогично имеем

$$BHBHBH = HBHBH. \quad (1.10)$$

Поэтому

$$8HBHBHB = 8BHBHBH = HB^2 HB^2 H. \quad (1.11)$$

Умножив уравнение (1.5) справа на $B^2 HBHB$, получаем

$$HB^2 HBHB^2 HBHB = 0. \quad (1.12)$$

Аналогично имеем

$$HBHB^2 HBHB^2 HB = 0.$$

Если в слове $W(H, B)$ не менее пяти элементов H , тогда

$$W(H, B) = \dots HB^{s_1} HB^{s_2} HB^{s_3} HB^{s_4} HB^{s_5} \dots$$

Пусть $s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5$, тогда $W(H, B) = 0$, если $s < 6$ (потому что $(HB)^4 = 0$).

Можно считать $s_i < 3$, $i = \overline{1, 5}$ (потому что $(B - E)^3 = 0$). Из (1.11) знаем, что в слове $W(H, B)$ нет $\dots HB^2 HB^2 H \dots$. Поэтому из (1.10), (1.11), (1.12) получаем $W(H, B) = 0$.

Лемма 1.2 доказана.

2 Доказательство основной теоремы

Доказательство теоремы. Берем любое слово $W(H, B)$. В $W(H, B)$ не менее одного элемента H . Тогда $(W(H, B))^5 = 0$ (см. лемму 1.2).

Отсюда получаем $\text{tr}W(H, B) = 0$. Берем любую матрицу $W(A, B)$ в подгруппе $\rho(F_2)$. Тогда $W(A, B) = B^k + \sum a_i W_i(H, B)$ в $W_i(H, B)$ не менее одного H . Поэтому

$$\text{tr}W(A, B) = \text{tr}B^k + a_i \sum \text{tr}W_i(H, B) = n + 0 = n.$$

Так как это равенство справедливо для любой матрицы C , то $\text{tr}C = \text{tr}C^2 = \dots = \text{tr}C^n = n$.

Отсюда следует, что C – унипотентная матрица. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Магнус, В. Комбинаторная теория групп: представление групп в терминах образующих и соотношений / В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр. – М. : Наука, 1974.
2. Самсонов, Ю.Б. Унипотентность образа представления $F_2(x, y)$ матрицами из $GL(n, C)$, $n=2,3,4$, при условии отображения образующих и примитивных элементов в унипотентные матрицы / Ю.Б. Самсонов, О.И. Тавгень // Доклады НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 6. – С. 29–32.

3. Тавгень, О.И. Унипотентность образа представления $F_2(x, y)$ в $GL(5, \mathbb{C})$ при отображении примитивных элементов в унипотентные матрицы / О.И. Тавгень, Ян Синьсун // Вестник БГУ. Серия 1. – 2009. – № 3. – С. 74–79.

4. Тавгень, О.И. Унипотентность образа представления $F_2(x, y)$ в $GL(n, C)$ при условии отображения примитивных элементов в унипотентные матрицы с клетками Жордана малых размерностей / О.И. Тавгень, Ян Синьсун // Весник ВДУ. Серия 1. – 2010. – № 3 (57). – С. 48–53.

5. Тавгень, О.И. Унипотентность образа представления F_2 в $GL(n, C)$ при отображении примитивных элементов в унипотентные матрицы с клетками Жордана малой размерности (II) / О.И. Тавгень, Ян Синьсун, Лю Сцуньянь // Весник ВДУ. Серия 1. – 2010. – № 6 (60). – С. 11–14.

Поступила в редакцию 30.05.11.