УДК 512.543.76

Об альтернативе Титса для некоторых обобщенных тетраэдральных групп.

В.В. Беняш-Кривец, Сюин Хуа

Титс [1] доказал, что если G — линейная группа, то либо G содержит неабелеву свободную подгруппу, либо является почти разрешимой. Если для произвольной группы G выполнено одно из указанных условий, то говорят, что G удовлетворяет альтернативе Титса. Обобщенные тетраэдральные группы, введенные Винбергом в [2], имеют копредставление вида

$$G = \langle a_1, a_2, a_3;\ a_1^{e_1} = a_2^{e_2} = a_3^{e_3} = R_1^m(a_1, a_2) = R_2^p(a_1, a_3) = R_3^q(a_2, a_3) = 1\rangle, \tag{1}$$

где $R_1(a_1, a_2)$, $R_2(a_1, a_3)$, $R_3(a_2, a_3)$ — циклически редуцированные слова в свободной группе, порожденной a_1, a_2, a_3, которые не являются собственной степенью, показатели e_1, e_2, e_3 либо равны 0, либо ≥ 2, а показатели $m, p, q \geq 2$. Будем говорить, что группа G имеет тип (e_1, e_2, e_3, m, p, q). Альтернатива Титса для обобщенных тетраэдральных групп исследовалась в монографии [3, гл. 9]. Наиболее общий результат состоит в следующем. Если все образующие G имеют конечный порядок и

$$\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 2, \tag{2}$$

то группа G содержит неабелеву свободную подгруппу и, значит, удовлетворяет альтернативе Титса. В [3, гл. 9] получен также ряд других результатов, подтверждающих гипотезу о том, что обобщенные тетраэдральные группы удовлетворяют альтернативе Титса, но в силу громоздкости формулировок у нас нет возможности их все здесь упомянуть. Тем не менее для достаточно большого числа типов групп эта гипотеза остается недоказанной. В предлагаемой работе доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — обобщенная тетраэдральная группа типа $(0, 2, 2, 2, 2, 2)$. Тогда G содержит неабелеву свободную подгруппу во всех случаях, за исключением групп*

$$G_1 = \langle a_1, a_2, a_3;\ a_2^2 = a_3^2 = (a_1a_2)^2 = (a_1a_3)^2 = (a_2a_3)^2 = 1\rangle,$$
$$G_2 = \langle a_1, a_2, a_3;\ a_2^2 = a_3^2 = (a_1^2a_2)^2 = (a_1a_3)^2 = (a_2a_3)^2 = 1\rangle,$$

которые являются разрешимыми.

Теорема 1 завершает доказательство гипотезы о том, что обобщенная тетраэдральная группа G удовлетворяет альтернативе Титса в случае, когда хотя бы одна из образующих G имеет бесконечный порядок. С учетом этого, гипотеза остается открытой для конечного числа типов групп, не удовлетворяющих соотношению (2). Ниже мы будем обозначать через E — единичную матрицу в $SL_2(\mathbb{C})$, через $[A]$ — образ матрицы $A \in SL_2(\mathbb{C})$ в $PSL_2(\mathbb{C})$, через $\operatorname{tr} A$ — след матрицы A. Подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbb{C})$ называется неприводимой, если ее прообраз $\overline{H}$ в $SL_2(\mathbb{C})$ — неприводимая подгруппа в обычном смысле. Подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbb{C})$ является *неэлементарной*, если любые два элемента бесконечного порядка из H имеют общий ненулевой собственный вектор. Если H — неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$, то H содержит неабелеву свободную подгруппу [4]. В [4] также доказано, что если подгруппа H порождена двумя элементами $[A]$ и $[B]$, то H неэлементарна тогда и только тогда, когда H неприводима, бесконечна и отлична от бесконечной группы диэдра. При этом H является бесконечной группой диэдра в точности в том случае, если по меньшей мере два из трех следов $\operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr} B$, $\operatorname{tr} AB$ равны нулю. Для доказательства теорем нам необходимы вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и X — матрица из $SL_2(\mathbb{C})$, отличная от $\pm E$. Тогда $[X]^m = 1$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} X = 2\cos\frac{r\pi}{m}$ для некоторого $r \in \{1, \ldots, m-1\}$.*

Доказательство следует из того, что собственными значениями X должны быть числа $\varepsilon, \varepsilon^{-1}$, где ε — корень степени $2m$ из единицы.

Для произвольного элемента $w \in F_3 = F_3(b_1, b_2, b_3)$, где $F_3(b_1, b_2, b_3)$ — свободная группа с базисом b_1, b_2, b_3, рассмотрим следующую регулярную функцию:

$$\tau_w : SL_2(\mathbb{C})^3 \to \mathbb{C}, \qquad \tau_w(A, B, C) = \operatorname{tr} w(A, B, C).$$

Если $w = b_i^{u_1} b_j^{v_1} \dots b_i^{u_s} b_j^{v_s}$, то в [5] доказано, что $\tau_w = Q_w(\tau_{b_i}, \tau_{b_j}, \tau_{b_i b_j})$, где $Q_w \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ — однозначно определенный многочлен с целыми коэффициентами. Функцию τ_w обычно называют характером Фрике, а многочлен Q_w — многочленом Фрике элемента w. Справедливы следующие соотношения между характерами Фрике, которые легко следуют из теоремы Гамильтона-Кэли: $\tau_{w^{-1}} = \tau_w$, $\tau_{gh} = \tau_g \tau_h - \tau_{gh^{-1}}$.

Лемма 2. *Для произвольных чисел $a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{C}$ существуют матрицы $A_1, A_2, A_3 \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A_i = a_i$, $\operatorname{tr} A_i A_j = a_{ij}$ для всех i, j.*

Доказательство. Вначале рассмотрим случай $a_1 \neq 2$. Матрицы A_1, A_2, A_3 будем искать в виде

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1^{-1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ \frac{-x_2^2 + a_2 x_2 - 1}{y_2} & a_2 - x_2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} x_3 & \frac{-x_3^2 + a_3 x_3 - 1}{y_3} \\ y_3 & a_3 - x_3 \end{pmatrix},$$

где $x_1 \neq \pm 1$ — корень уравнения $x_1 + x_1^{-1} = a_1$. Вычисляя следы $\operatorname{tr} A_1 A_2$, $\operatorname{tr} A_1 A_3$, получаем уравнения

$$(x_1 - x_1^{-1}) x_2 + x_1^{-1} a_2 = a_{12}, \qquad (x_1 - x_1^{-1}) x_3 + x_1^{-1} a_3 = a_{13},$$

из которых находим x_2, x_3. Условие $\operatorname{tr} A_2 A_3 = a_{23}$ дает уравнение

$$y_2 y_3 + \frac{(-x_2^2 + a_2 x_2 - 1)(-x_3^2 + a_3 x_3 - 1)}{y_2 y_3} + x_2 x_3 + (a_2 - x_2)(a_3 - x_3) = b_{23}. \qquad (3)$$

Если $b_2 = -x_2^2 + a_2 x_2 - 1 = 0$, то полагаем $y_3 = 1$ и из (3) находим y_2. Аналогично, если $b_3 = -x_3^2 + a_3 x_3 - 1 = 0$, то полагаем $y_2 = 1$ и из (3) находим y_3. Если же $b_2 \neq 0$ и $b_3 \neq 0$, то полагаем $y_2 = 1$ и из (3) находим $y_3 \neq 0$.

Пусть теперь $a_1 = 2$. Если $a_2 = a_{12}$ и $a_3 = a_{13}$, то положим $A_1 = E$. После этого нетрудно подобрать матрицы A_2 и A_3 с требуемыми свойствами. Предположим, что $a_2 \neq a_{12}$. Матрицы A_1, A_2, A_3 будем искать в виде

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} x_2 & \frac{-x_2^2 + a_2 x_2 - 1}{a_{12} - a_2} \\ a_{12} - a_2 & a_2 - x_2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ a_{13} - a_3 & a_3 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Если $a_{13} - a_3 = 0$, то в уравнение $\operatorname{tr} A_2 A_3 = a_{23}$ нетривиально входит y_3, что позволяет найти искомые матрицы A_2 и A_3. Если $a_{13} - a_3 \neq 0$, то положим $y_3 = \frac{-x_3^2 + a_3 x_3 - 1}{a_{13} - a_3}$. Тогда в уравнение $\operatorname{tr} A_2 A_3 = a_{23}$ нетривиально входят x_2, x_3, что также позволяет найти искомые матрицы A_2 и A_3. Лемма доказана.

Далее, нам нужна более детальная информация о многочленах Фрике (см. [6]). Рассмотрим многочлены $P_n(x)$, которые удовлетворяют начальным условиям $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$ и рекуррентному соотношению $P_{n+1}(x) = x P_n(x) - P_{n-1}(x)$ для $n > 0$. Если $n < 0$, то положим $P_n(x) = -P_{|n|-2}(x)$. Индукцией по n легко проверить, что при $n > 0$

$$P_n(2 \cos \varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}. \qquad (4)$$

Из (4) следует, что многочлен $P_n(x)$, $n > 0$, имеет n нулей, определенных формулой

$$x_k = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Далее, пусть $w = b_i^{u_1} b_j^{v_1} \ldots b_i^{u_s} b_j^{v_s}$, $s \geq 1$, — циклически редуцированное слово в свободной группе F_3 и пусть $x = \tau_{b_i}$, $y = \tau_{b_j}$, $z = \tau_{b_i b_j}$. В [7] доказано, что многочлен Фрике Q_w имеет вид

$$Q_w(x, y, z) = M_s(x, y) z^s + \cdots + M_0(x, y), \tag{6}$$

где $M_s(x, y) = \prod_{i=1}^{s} P_{u_i - 1}(x) P_{v_i - 1}(y)$. В дальнейшем нам также понадобится следующий факт: пара матриц $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ порождает приводимую подгруппу тогда и только тогда, когда

$$(\operatorname{tr} A)^2 + (\operatorname{tr} B)^2 + (\operatorname{tr} AB)^2 - \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B \operatorname{tr} AB - 4 = 0. \tag{7}$$

Идея доказательства теоремы 1 состоит в том, чтобы построить представление $\rho : G \to PSL_2(\mathbb{C})$ такое, что образ $\rho(G)$ является неэлементарной подгруппой в $PSL_2(\mathbb{C})$. Тогда группа $\rho(G)$ (а следовательно, и G) содержит неабелеву свободную подгруппу. Для построения этого представления мы будем использовать следующую конструкцию. Обозначим $x_i = \tau_{b_i}$, $y_{ij} = \tau_{b_i b_j}$, и положим $x_i = 2\cos\frac{\pi}{e_i}$ в случае $e_i > 0$. Затем рассмотрим многочлены Фрике $f_i = Q_{R_i}$ и составим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, y_{12}) = 0, \\ f_2(x_1, x_3, y_{13}) = 0, \\ f_3(x_2, x_3, y_{23}) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Если $u = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_{12}^0, y_{13}^0, y_{23}^0)$ — произвольное решение (8), то по лемме 2 найдутся матрицы $A_1, A_2, A_3 \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A_i = x_i^0$, $\operatorname{tr} A_i A_j = y_{ij}^0$. Пусть $H(u)$ — подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$, порожденная элементами $[A_i]$. Если $H(u)$ неприводима, то она определена однозначно с точностью до сопряжения. С учетом леммы 1, отображение

$$\rho : G \to H(u), \qquad \rho(a_i) = [A_i],$$

задает представление G в $PSL_2(\mathbb{C})$ и $\rho(G) = H(u)$. Поэтому для доказательства теорем нам достаточно найти такое решение u системы (8), что $H(u)$ — неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$R_1(a_1, a_2) = a_1^{u_1} a_2 \ldots a_1^{u_s} a_2, \quad R_2(a_1, a_3) = a_1^{v_1} a_3 \ldots a_1^{v_r} a_3, \quad R_3(a_2, a_3) = a_2 a_3. \tag{9}$$

Вначале рассмотрим случай $s = r = 1$. Без ограничения общности можно считать, что $u_1, v_1 > 0$ (при необходимости мы можем перейти от соотношения $R_i^2 = 1$ к соотношению $(R_i^{-1})^2 = 1$). Предположим, что одно из чисел u_1, v_1 больше 2, пусть, например, $u_1 > 2$. Тогда мы имеем $x_2^0 = x_3^0 = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$ и система (8) имеет вид

$$P_{u_1 - 1}(x_1) y_{12} = 0, \quad P_{v_1 - 1}(x_1) y_{13} = 0, \quad y_{23} = 0. \tag{10}$$

Поскольку в силу (5) $x_1^0 = 2\cos\frac{\pi}{u_1}$ — корень $P_{u_1-1}(x_1)$, то набор $u = (2\cos\frac{\pi}{u_1}, 0, 0, 3, 0, 0)$ является решением (10). Рассмотрим группу $H(u)$ и подгруппу F в ней, порожденную элементами $[A_1]$, $[A_2]$. Группа F бесконечна, поскольку по построению $\operatorname{tr} A_1 A_2 = 3$ и поэтому $[A_1 A_2]$ имеет бесконечный порядок в $PSL_2(\mathbb{C})$. Поскольку $(2\cos\frac{\pi}{u_1})^2 + 5 \neq 0$, то в силу (7) группа F неприводима. Далее, группа F не может быть бесконечной группой диэдра, поскольку она содержит элемент $[A_1]$ порядка $u_1 \geq 3$. Значит, F, а вместе с ней и $H(u)$ — неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$, что нам и требуется.

Предположим теперь, что $0 < u_1, v_1 \leq 2$. Нам нужно рассмотреть 3 группы — G_1 и G_2 из условия теоремы 1, а также группу

$$G_3 = \langle a_1, a_2, a_3;\ a_2^2 = a_3^2 = (a_1^2 a_2)^2 = (a_1^2 a_3)^2 = (a_2 a_3)^2 = 1 \rangle.$$

Заметим, что в группе G_1 циклическая подгруппа $\langle a_1\rangle$ является нормальной, а факторгруппа $G_1/\langle a_1\rangle$ изоморфна группе диэдра $D_2 = \langle a_2, a_3;\ a_2^2 = a_3^2 = (a_2a_3)^2 = 1\rangle$. Так как группы $\langle a_1\rangle$ и $G_1/\langle a_1\rangle$ разрешимы, то группа G_1 также разрешима.

Рассмотрим группу G_2. Циклическая подгруппа $\langle a_1^2\rangle$ является нормальной в G_2, а факторгруппа $G_2/\langle a_1^2\rangle$ изоморфна группе $H = \langle a_1, a_2, a_3;\ a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = (a_1a_3)^2 = (a_2a_3)^2 = 1\rangle$. Далее, циклическая подгруппа $\langle a_3\rangle$ является нормальной в H, а факторгруппа $H/\langle a_3\rangle$ изоморфна бесконечной группе диэдра $D_\infty = \langle a_1, a_2;\ a_1^2 = a_2^2 = 1\rangle$. Так как группы $\langle a_3\rangle$ и $H/\langle a_3\rangle$ разрешимы, то группа H также разрешима. Поскольку группы $\langle a_1^2\rangle$ и $G_2/\langle a_1^2\rangle \cong H$ разрешимы, то группа G_2 разрешима.

Рассмотрим теперь группу G_3. Как и выше, циклическая подгруппа $\langle a_1^2\rangle$ является нормальной в G_3, а факторгруппа $G_3/\langle a_1^2\rangle$ изоморфна группе $H = \langle a_1, a_2, a_3;\ a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = (a_2a_3)^2 = 1\rangle$. Так как $H = H_1 * D_2$, где $H_1 = \langle a_1;\ a_1^2 = 1\rangle$ — циклическая группа порядка 2, а $D_2 = \langle a_2, a_3;\ a_2^2 = a_3^2 = (a_2a_3)^2 = 1\rangle$ — группа диэдра порядка 4, то H (а поэтому и G_3) содержит неабелеву свободную подгруппу. Таким образом, случай $r = s = 1$ полностью рассмотрен.

Будем теперь предполагать, что хотя бы одно из чисел r, s больше 1. Пусть, например, $s > 1$. Дальнейшее рассмотрение разбивается на 2 случая: 1) в слове $R_1(a, b) = a^{u_1}b \dots a^{u_s}b$ число s нечетно и сумма показателей $U = \sum_{i=1}^{s} u_i = 0$; 2) s четно, либо s нечетно и $U \neq 0$.

Случай 1. Предположим вначале, что слово $R_2(a_1, a_3)$ не принадлежит множеству слов $\{a_1a_3, a_1^{-1}a_3, a_1^2a_3, a_1^{-2}a_3\}$. Рассмотрим факторгруппу $\overline{G}$ группы G, добавляя соотношение $a_2 = 1$. Тогда $\overline{G}$ имеет копредставление $\overline{G} = \langle a_1, a_3;\ a_3^2 = R_2^2(a_1, a_3) = 1\rangle$. Таким образом, $\overline{G}$ является обобщенной треугольной группой, которая в силу [3, гл. 7.3.3] содержит неабелеву свободную подгруппу.

Предположим теперь, что $R_2(a_1, a_3) \in \{a_1a_3, a_1^{-1}a_3, a_1^2a_3, a_1^{-2}a_3\}$. Тогда с точностью до изоморфизма нам нужно рассмотреть следующие группы:

$$G_4 = \langle a_1, a_2, a_3; a_2^2 = a_3^2 = R_1^2(a_1, a_2) = (a_1a_3)^2 = (a_2a_3)^2 = 1\rangle,$$
$$G_5 = \langle a_1, a_2, a_3; a_2^2 = a_3^2 = R_1^2(a_1, a_2) = (a_1^2a_3)^2 = (a_2a_3)^2 = 1\rangle.$$

Пусть $H = \ker\varphi$, где $\varphi : G_4 \to \langle c; c^2 = 1\rangle$ — гомоморфизм, задаваемый условиями $a_1 \mapsto 1$, $a_2 \mapsto 1$, $a_3 \mapsto c$. Применяя метод Райдемайстера-Шрайера, находим, что H имеет копредставление

$$H = \langle a, b; b^2 = R_1^2(a, b) = R_1^2(a^{-1}, b) = 1\rangle.$$

Введем элементы $x_i = a^iba^{-i}$. По предположению, $U = \sum_{i=1}^{s} u_i = 0$, поэтому $R_1(a, b)$ можно записать как слово от x_i. Пусть m — наибольшее целое число такое, что x_m, либо x_{-m} входит в $R_1(a, b)$. Тогда группу H можно записать в виде

$$H = \langle x_{-m}, \dots, x_m, a; S_1^2(x_{-m}, \dots, x_m) = S_1^2(x_m, \dots, x_{-m}) = x_{-m}^2 = \dots = x_m^2 = 1,$$
$$ax_ia^{-1} = x_{i+1}, i = -m, \dots, m-1\rangle.$$

Рассмотрим группы $K = \langle x_{-m}, \dots, x_m; S_1^2(x_{-m}, \dots, x_m) = S_1^2(x_m, \dots, x_{-m}) = x_{-m}^2 = \dots = x_m^2 = 1\rangle$, $K_1 = \langle x_{-m}, \dots, x_{m-1}\rangle$, $K_2 = \langle x_{-m+1}, \dots, x_m\rangle$. Тогда H является HNN-расширением группы K при помощи проходной буквы a и ассоциированных подгрупп K_1 и K_2. Поскольку факторгруппа по коммутанту $K/[K, K]$ изоморфна $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2m+1}$, то ее порядок равен 2^{2m+1}. С другой стороны, факторгруппы $K_1/[K_1, K_1]$ и $K_2/[K_2, K_2]$ имеют порядок не более 2^{2m}. Значит, $K_1 \neq K$ и $K_2 \neq K$. Поскольку H содержит амальгамированное произведение $S = K *_{K_1} *K *_{K_1} *K$ (см. [8, предложение 5]) и группа S содержит неабелеву свободную подгруппу (см. [9]), то таким же свойством обладает H (а поэтому и G_4).

Рассмотрим теперь группу G_5. Пусть $T = \ker\varphi$, где $\varphi : G_5 \to \langle c; c^2 = 1\rangle$ — гомоморфизм, задаваемый условиями $a_1 \mapsto 1$, $a_2 \mapsto 1$, $a_3 \mapsto c$. Применяя метод Райдемайстера-Шрайера, находим, что T имеет копредставление

$$T = \langle b_1, b_2, b_3; b_3^2 = R_1^2(b_1, b_3) = R_1^2(b_2, b_3) = 1, b_1^2b_2^2 = 1\rangle.$$

Если к соотношениям группы T добавить соотношение $b_2 = b_1^{-1}$, то получим факторгруппу

$$H = \langle b_1, b_3; b_3^2 = R_1^2(b_1, b_3) = R_1^2(b_1^{-1}, b_3) = 1\rangle.$$

Выше мы уже доказали, что H (а поэтому и G_5) содержит неабелеву свободную подгруппу.

Случай 2. Система (8) имеет вид

$$g_1(x_1, y_{12}) = f_1(x_1, 0, y_{12}) = 0, \quad g_2(x_1, y_{13}) = f_2(x_1, 0, y_{13}) = 0, \quad y_{23} = 0. \tag{11}$$

При этом многочлены g_1 и g_2 имеют целые коэффициенты и в силу (6) имеют вид

$$g_1(x_1, y_{12}) = M_0(x_1)y_{12}^s + \cdots + M_s(x_1), \qquad g_2(x_1, y_{13}) = N_0(x_1)y_{13}^r + \cdots + N_r(x_1), \tag{12}$$

где $M_0(x_1) = \prod_{i=1}^s P_{u_i-1}(x_1)$, $N_0(x_1) = \prod_{i=1}^r P_{v_i-1}(x_1)$.

Предположим вначале, что в разложение $g_1(x_1, y_{12})$ на неприводимые множители входит неприводимый многочлен $h(x_1, y_{12})$, содержащий обе переменные x_1, y_{12} и не делящийся на $x_1^2+y_{12}^2-4$. Тогда h имеет целые коэффициенты и найдутся такие трансцендентные $x_1^0, y_{12}^0 \in \mathbb{C}$, что $h(x_1^0, y_{12}^0) = 0$ и

$$(x_1^0)^2 + (y_{12}^0)^2 - 4 \neq 0. \tag{13}$$

Поскольку при этом старший коэффициент $N_0(x_1^0)$ многочлена g_2 отличен от нуля, то $g_2(x_1^0, y_{13})$ — многочлен положительной степени от y_{13} и пусть y_{13}^0 — его корень. Набор $u = (x_1^0, 0, 0, y_{12}^0, y_{13}^0, 0)$ является решением (11). Рассмотрим группу $H(u)$ и подгруппу F в ней, порожденную элементами $[A_1]$, $[A_2]$. Как и выше, группа F бесконечна, отлична от бесконечной группы диэдра и в силу (13) неприводима. Значит, F (а также $H(u)$) — неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$, что нам и требуется.

Аналогичное рассуждение показывает, что G содержит неабелеву свободную подгруппу в случае, когда в разложение $g_2(x_1, y_{13})$ на неприводимые множители входит неприводимый многочлен $h(x_1, y_{13})$, содержащий обе переменные x_1 и y_{13} и не делящийся на $x_1^2 + y_{13}^2 - 4$. Поэтому нам остается рассмотреть случай, когда

$$g_1(x_1, y_{12}) = A(x_1)B(y_{12})(x_1^2 + y_{12}^2 - 4)^p, \qquad g_2(x_1, y_{13}) = A_1(x_1)B_1(y_{13})(x_1^2 + y_{13}^2 - 4)^q.$$

Предположим, что один из многочленов A, B, A_1, B_1 имеет ненулевой корень. Пусть, например, $A(x_1^0) = 0$ для некоторого $x_1^0 \neq 0$. Возьмем y_{12}^0 — произвольный трансцендентный элемент из $\mathbb{C}$ и y_{13}^0 — произвольный корень многочлена $g_2(x_1^0, y_{13})$. Тогда набор $u = (x_1^0, 0, 0, y_{12}^0, y_{13}^0, 0)$ является решением (11). В точности как и выше получаем, что группа $H(u)$ — неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$ (неприводимость соответствующей подгруппы $F = \langle [A_1], [A_2]\rangle$ следует из того, что $(x_1^0)^2 + (y_{12}^0)^2 - 4 \neq 0$ в силу алгебраичности x_1^0 и трансцендентности y_{12}^0). Если же $B(y_{12})$ имеет ненулевой корень, то берем $y_{12}^0 \neq 0$ такое, что $B(y_{12}^0) = 0$, а x_1^0 — произвольный трансцендентный элемент из $\mathbb{C}$.

Таким образом, мы можем считать, что

$$g_1(x_1, y_{12}) = ax_1^m y_{12}^l (x_1^2 + y_{12}^2 - 4)^p, \qquad g_2(x_1, y_{13}) = ax_1^k y_{13}^e (x_1^2 + y_{13}^2 - 4)^q,$$

где $a \in \mathbb{C}^*$. Завершает доказательство теоремы 1 следующая лемма.

Лемма 3. *Если* $R_1(a_1, a_2) = a_1^{u_1}a_2 \ldots a_1^{u_s}a_2$, *где* $s > 1$ *и либо* s *четно, либо* s *нечетно и* $U = \sum_{i=1}^s u_i \neq 0$, *то многочлен Фрике* $g_1(x_1, y_{12})$ *не равен* $ax_1^m y_{12}^l (x_1^2 + y_{12}^2 - 4)^p$.

Доказательство. Предположим, что $g_1(x_1, y_{12}) = ax_1^m y_{12}^l (x_1^2+y_{12}^2-4)^p$. Последнее равенство означает, что для любой пары матриц $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ такой, что $\operatorname{tr} A = x_1$, $\operatorname{tr} B = 0$, $\operatorname{tr} AB = y_{12}$ мы должны иметь равенство

$$\operatorname{tr} R_1(A, B) = ax_1^m y_{12}^l (x_1^2 + y_{12}^2 - 4)^p. \tag{14}$$

Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ z & -i \end{pmatrix},$$

где t и z — произвольные переменные. Тогда $\operatorname{tr} A = t + t^{-1}$, $\operatorname{tr} AB = z + it - it^{-1}$. Подставляя в (14), получаем

$$\operatorname{tr} R_1(A, B) = a(t + t^{-1})^m (z + it - it^{-1})^l z^p (z + 2it - 2it^{-1})^p. \tag{15}$$

С другой стороны, непосредственное вычисление показывает, что след матрицы $R_1(A, B)$ имеет вид

$$\operatorname{tr} R_1(A, B) = H_0(t) z^s + \cdots + H_{s-1}(t) z + i^s t^U + (-i)^s t^{-U}, \tag{16}$$

где $H_i(t)$ — некоторые рациональные функции от t. В силу условий леммы мы имеем, что $i^s t^U + (-i)^s t^{-U} \neq 0$. Следовательно, в (15) мы должны иметь $p = 0$, и поэтому $l = s$. Теперь, сравнивая в (15) и (16) слагаемые, не содержащие z, мы получаем, сокращая на i^s, равенство

$$t^U + (-1)^s t^{-U} = a(t + t^{-1})^m (t - t^{-1})^s. \tag{17}$$

Нетрудно показать, что при $s > 1$ равенство (17) невозможно. Лемма 3, а вместе с ней и теорема 1, доказаны.

Список литературы

[1] Tits J. Free subgroups in linear groups. // *J. Algebra.* 1972. Vol. 20. P. 250–270.

[2] Винберг Э.Б. Группы, задаваемые периодическими попарными соотношениями. // *Матем. сб.* 1997. Т. 188, № 9. С. 3–12.

[3] Fine B., Rosenberger G. Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products. New York: Marcel Dekker, 1999.

[4] Majied A., Masson A.W. Solvable-by-finite subgroups of $GL(2, F)$. // *Glasgov Math. J.* 1978. V. 19. P. 45–48.

[5] Horowitz R. Characters of free groups represented in the two dimensional linear group. // *Comm. Pure. Appl. Math.* 1972. V. 25. P. 635–649.

[6] Culler M., Shalen P. Varieties of group representations and splittings of 3 manifolds. // *Ann. of Math.* 1983. V. 117. P. 109–147.

[7] Traina C. Trace polynomial for two generator subgroups of $SL(2, \mathbb{C})$. // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1980. V. 79. P. 369–372.

[8] Серр Ж.-П. Деревья, амальгамы и SL_2. // Периодический сб. переводов "Математика". 1974. Т. 18, № 1. С. 3–51.

[9] Baumslag G., Shalen P.B. Amalgamated products and finitely presented groups. // *Comment.Math. Helv.* 1990. V. 65. P. 234–254.

BENIASH-KRYVETS V.V., HUA XIUYING. On the Tits alternative for some generalized tetraedron groups.

Summary.

It is proved that generalized tetraedron groups of type $(0, 2, 2, 2, 2, 2)$ contain a non-abelian free subgroup except two groups which are solvable. In particular, the Tits alternative holds for such groups.

УДК 512.543.76. **В.В. Беняш-Кривец, Сюин Хуа. Об альтернативе Титса для некоторых обобщенных тетраэдральных групп.**

Титс доказал, что если G — линейная группа, то либо G содержит неабелеву свободную подгруппу, либо является почти разрешимой. Если для произвольной группы G выполнено одно из указанных условий, то говорят, что G удовлетворяет альтернативе Титса. Обобщенные тетраэдральные группы, введенные Винбергом, имеют копредставление вида

$$G = \langle a_1, a_2, a_3;\ a_1^{e_1} = a_2^{e_2} = a_3^{e_3} = R_1^m(a_1, a_2) = R_2^p(a_1, a_3) = R_3^q(a_2, a_3) = 1 \rangle,$$

где $R_1(a_1, a_2)$, $R_2(a_1, a_3)$, $R_3(a_2, a_3)$ — циклически редуцированные слова в свободной группе, порожденной a_1, a_2, a_3, которые не являются собственной степенью, показатели e_1, e_2, e_3 либо равны 0, либо ≥ 2, а показатели $m, p, q \geq 2$. Будем говорить, что группа G имеет тип (e_1, e_2, e_3, m, p, q). К настоящему времени известен ряд результатов, подтверждающих гипотезу о том, что обобщенные тетраэдральные группы удовлетворяют альтернативе Титса. В данной работе доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — обобщенная тетраэдральная группа типа $(0, 2, 2, 2, 2, 2)$. Тогда G содержит неабелеву свободную подгруппу во всех случаях, за исключением групп*

$$G_1 = \langle a_1, a_2, a_3;\ a_2^2 = a_3^2 = (a_1 a_2)^2 = (a_1 a_3)^2 = (a_2 a_3)^2 = 1 \rangle,$$
$$G_2 = \langle a_1, a_2, a_3;\ a_2^2 = a_3^2 = (a_1^2 a_2)^2 = (a_1 a_3)^2 = (a_2 a_3)^2 = 1 \rangle,$$

которые являются разрешимыми.