НАУЧНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КАФЕДРЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

В.В Беняш-Кривец, О.В. Мельников, О.И. Тавгень

Кафедра высшей алгебры основана 1 сентября 1938 г. Первым заведующим кафедрой был В.Л. Нисневич (с 01.09.38 по 26.06.41). В дальнейшем кафедру возглавляли: Д.А. Супруненко (с 8.12.47 по 14.8.63), и.о. зав. кафедрой П.Т. Козел (с 14.08.63 по 05.05.67), В.П. Платонов (с 30.06.67 по 06.07.71), М.С. Гаращук (с 06.07.71 по 24.01.79), А.А. Бондаренко (с 25.01.79 по 16.01.85), и.о. зав. кафедрой А.А. Шаромет (с 17.01.85 по 29.05.89), Ю.В. Тишин (с 1989 г. по 1990 г., трагически погиб в 1990 г.), О.В. Мельников (с 1990 г. по 1998 г.), О.И. Тавгень (с 09.04.98 г. по настоящее время).

Первая работа по алгебре в Беларуси была выполнена В.Л. Нисневичем [49]. Она посвящена представлению свободных произведений групп матрицами и не утратила своего значения и поныне. Систематические исследования в теории линейных групп были начаты Д.А. Супруненко в 1946 г.

Супруненко Дмитрий Алексеевич (8.11.1915 – 1.08.1990) родился в г. Майкопе. Окончил Ростовский государственный университет в 1938 г. В 1941 г. защитил кандидатскую диссертацию. С 1 сентября 1945 г. зачислен доцентом кафедры математики БГУ. 8 декабря 1947 г. утвержден заведующим кафедрой высшей алгебры. 15 декабря 1955 г. Д.А. Супруненко защитил докторскую диссертацию «Разрешимые и нильпотентные группы». Это была первая докторская диссертация по математике, защищенная ученым БГУ. С 1956 г. — профессор. В 1959 г. избран член-корреспондентом АН БССР, а в 1966 г. — академиком АН БССР. Лауреат Государственной премии БССР (1974). В 1945-1963 работал в БГУ заведующим кафедрой высшей алгебры, деканом физико-математического факультета (1957-1958), деканом математического факультета (1958-1961). С 1963 года работал в Институте математики АН БССР.

С именем Д.А. Супруненко связано построение теории разрешимых и нильпотентных линейных групп, что составило содержание его монографии [8]. В дальнейшем Д.А. Супруненко и его ученики продолжали интенсивную разработку этого направления. Итоги развития теории разрешимых и нильпотентных линейных групп за период до 1970 г. подведены монографией [9]. Этот труд удостоен Государственной премии БССР за 1974 г.

Новый этап алгебраических исследований в Беларуси связан с приходом на кафедру алгебры в 1963 г. В.П. Платонова.

Платонов Владимир Петрович родился 1 декабря 1939 г. в п. Стайки Оршанского района Витебской области. Окончил математический факультет БГУ (1961), где и работал в 1963-1971 гг.: старший преподаватель, доцент, профессор, заведующий кафедрой алгебры. В 1963 г. защитил кандидатскую диссертацию, а в 1967 г. — докторскую диссертацию «Топологические и алгебраические линейные группы», с 1968 г. — профессор. С 1971 г. работал в АН БССР: заведующий лабораторией алгебраической геометрии и топологии (1971-1977), директор Института математики АН БССР (1977-1992), президент АН БССР (1987-1992). С 1992 г. работает за границей (США, Канада, Россия). Академик АН БССР (1972), академик АН СССР (1987), академик РАН (1993). Заслуженный деятель науки БССР (1982). Лауреат премии Ленинского комсомола (1968), Ленинской премии (1978), премии Гумбольдта (1993, ФРГ).

В.П. Платонов и его ученики внесли огромный вклад в теорию топологических групп, структурную и арифметическую теорию алгебраических групп, приведенную K-теорию, теорию проконечных групп и комбинаторную теорию групп. За цикл работ по топологическим группам В.П. Платонов в 1968 г. удостоен премии Ленинского комсомола, а в 1978 г. за цикл работ «Арифметика алгебраических групп и приведенная K-теория» — Ленинской премии. Большую роль в развитии научных исследований по алгебре играл семинар «Алгебра и топология», организованный В.П. Платоновым в 1967 г. На этом семинаре выступали не только белорусские математики, но и регулярно делали доклады многие ведущие алгебраисты СССР.

Далее приведен краткий обзор полученных в разные годы сотрудниками кафедры научных результатов.

1. Линейные группы.

1.1. Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Наиболее важным итогом исследований Д.А. Супруненко было создание основ теории максимальных разрешимых и максимальных локально нильпотентных линейных групп. Д.А. Супруненко получил полную классификацию максимальных разрешимых линейных групп в случае, когда степень матриц — простое число, а основное поле алгебраически замкнуто или конечно. Отметим здесь теорему Супруненко о мономиальности вещественной разрешимой линейной группы нечетной степени, а также критерий полной приводимости разрешимой линейной группы над полем нулевой характеристики, заключающийся в полной приводимости каждой циклической подгруппы. Одним из основных результатов о разрешимых линейных группах является теорема Супруненко о том, что над алгебраически замкнутым полем максимальные разрешимые подгруппы полной линейной группы разбиваются на конечное число классов сопряженных подгрупп. В конце 60-х годов Д.А. Супруненко получил полную классификацию минимальных неприводимых разрешимых подгрупп полной линейной группы простой степени над алгебраически замкнутым полем. В частности, он установил, что такая подгруппа конечна. В связи с последним результатом Д.А. Супруненко поставил вопрос: существуют ли бесконечные минимальные неприводимые линейные группы? Отрицательный ответ на этот вопрос получен В.П. Платоновым.

Д.А. Супруненко разработал теорию максимальных нильпотентных и локально нильпотентных линейных групп. Одним из основных результатов здесь является полная классификация максимальных неприводимых локально нильпотентных линейных групп над алгебраически замкнутым полем, в том числе теорема о конечности классов сопряженности этих групп. Д.А. Супруненко получил ряд соотношении арифметического характера, описывающих свойства неприводимых нильпотентных линейных групп. В случае произвольного поля основным результатом является теорема о конечности индекса центра такой группы.

В рамках исследований локально нильпотентных линейных групп Д.А. Супруненко и Р.И. Тышкевич [106] исследовали нильпотентные линейные группы, максимальные среди групп заданного класса нильпотентности. Как оказалось, число таких подгрупп в случае алгебраически замкнутого поля конечно (с точностью до сопряженности).

Д.А. Супруненко и М.С. Гаращук [104-105] рассмотрели вопрос об эквивалентности в классе линейных групп некоторых теоретико-групповых свойств, обобщающих свойство нильпотентности в конечных группах. В частности, они показали, что свойство локальной нильпотентности эквивалентно для линейных групп условию Энгеля, нормализаторному условию, наличию верхнего центрального ряда.

1.2. Группы подстановок. Изучение разрешимых и нильпотентных групп подстановок занимало значительное место в исследованиях Д.А. Супруненко. Жордан и О.Ю. Шмидт получили описание разрешимых групп подстановок степени p^2, где p — простое число. Бухтом изучены разрешимые группы подстановок степени p^4. Наиболее полные результаты в этом направлении получены Д.А. Супруненко [103]. Им классифицированы с точностью до сопряженности разрешимые группы подстановок степени pq, где p и q — произвольные простые числа. В 1954 г. Д.А. Супруненко получил полное описание максимальных нильпотентных подгрупп симметрической группы S_n произвольной конечной степени n.

Д.А. Супруненко изучал также разрешимые и локально нильпотентные подгруппы бесконечной симметрической группы. Основные результаты о группах подстановок отражены в [13, гл. 1].

1.3. Максимальные системы перестановочных матриц. Проблема классификации максимальных систем попарно перестановочных матриц возникает не только в алгебре; к ней приводят также задачи дифференциальных уравнений, геометрии и др. Начало исследований этой проблемы относится к концу XIX — началу XX века (Фробениус, Шур), хотя некоторые факты были, несомненно, известны и раньше. Теория максимальных коммутативных матричных колец разрабатывалась в Беларуси Д.А. Супруненко и его учениками. В [14] изложено общее состояние теории коммутирующих матриц, а также отражены результаты Д.А. Супруненко и его учеников. В полном объеме проблема характеризуется исключительной комбинаторной трудностью. По этой причине результаты классификационного характера удается получить лишь при значительном сужении класса рассматриваемых систем.

Полная классификация получена для матриц степеней, меньших 7 (Д.А. Супруненко, З.М. Дымент). В этом случае число максимальных коммутативных подалгебр оказалось конечным (с точностью до сопряженности). Как показал Д.А. Супруненко, для матриц степени 7 число таких алгебр уже становится бесконечным.

1.4. Бесконечные неразрешимые линейные группы. Новые методы исследования неразрешимых бесконечных линейных групп были созданы в 60-х годах XX в. в работах В.П. Платонова. В первую очередь это метод алгебраических групп. Основные идеи этого метода были изложены в работе [89], где этот метод в основном был применен к исследованию периодических линейных групп. Сущность метода алгебраических групп заключается в погружении бесконечной линейной группы в минимальную алгебраическую группу с последующим применением топологических и геометрических соображений, присущих теории алгебраических групп. Следующий общий результат, продемонстрировавший силу нового метода, принадлежит В.П. Платонову [89]: доказана сопряженность p-подгрупп Силова в алгебраических линейных группах над алгебраически замкнутым полем и в периодических линейных группах, и серией примеров продемонстрировал невозможность распространения теоремы Силова на произвольные линейные группы. В той же работе В.П. Платонов перенес в периодические разрешимые линейные группы известные теоремы Холла. Эти результаты дали стимул развитию теории локально конечных абстрактных групп. Многочисленные применения находит теорема Платонова о линейных группах с тождественным соотношением. Оказалось, что такая группа является конечным расширением разрешимой группы.

Другим новым методом, предложенным В.П. Платоновым, был метод аппроксимации. А.И. Мальцев в 1940 г. доказал теорему об аппроксимации конечнопорожденных матричных групп группами матриц над конечными полями, в частности, конечными группами. В [90] В.П. Платонов предложил новый подход к процессу финитной аппроксимации и обогатил его идеями теоретико-числового характера. Была доказана нильпотентность подгруппы Фраттини конечнопорожденных линейных групп, а также решена проблема Мальцева о линейных группах конечного ранга.

1.5. Другие линейные группы и полугруппы. В работах [52-54] П.Т. Козел изучал строение элементов ортогональной группы O_n над алгебраически замкнутым полем характеристики 2. Им доказано, что если $n=2m$ — четно, то тогда O_n состоит из всех элементов $\mathrm{diag}(A,B,C,D)$ ассоциированной симплектической группы со свойством $d(A^tC)=d(B^tD)=0$, где A,B,C,D — матрицы порядка m и $d(X)$ обозначает вектор диагональных элементов матрицы X.

Г.Л. Петрова [84-85] изучала пересечение выпуклого многогранника с целочисленной решеткой. Помимо самостоятельного интереса, такого рода задачи находят многочисленнве применения в дискретной и многокритериальной оптимизации, в теории графов. Был получен критерий конечной порожденности подполугрупп полугруппы $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Также получено несколько результатов, касающихся построения порождающих множеств указанных полугрупп и условий их неприводимости. Исследовалось цепное разбиение многомерного дискретного параллелепипеда. В этой связи было предложено разбиение на плоские обобщенные антицепи, которые впоследствии привели к построению кодов, близких к равновесным, но обладающим большей мощностью.

В 1976 г. Р.И. Тышкевич и А. С. Феденко издали первый белорусский учебник по линейной алгебре и аналитической геометрии [16]. Позже, в 80-х годах XX в., коллективом авторов, в котором участвовали сотрудники кафедры высшей алгебры Р.И. Тышкевич и М.М. Толкачев, был написан новый учебник «Алгебра и аналитическая геометрия» в 2 томах, который охватывал весь материал, предусмотренный программами для математических факультетов университетов по курсам алгебры и аналитической геометрии. Этот учебник был переиздан в 2001 г. [8], [9]. Кроме того, при участии М.М. Толкачева издан «Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии» [4]. Эти книги до настоящего времени являются основными учебниками по алгебре для студентов математических специальностей.

2. Топологические группы.

Начало исследований по топологическим группам в Беларуси относится к 60-м годам XX в. и связано с именем В.П. Платонова. Ему удалось найти наиболее общую и эффективную для применений формулировку свойств компактных подгрупп топологических групп; этот результат был назван им общей теоремой Картана — Мальцева — Ивасава [86].

Еще в тридцатые годы возникла проблема исследования аналогов подгрупп Силова в топологических группах. Первые результаты принадлежат Данцигу (1936) и А.Г. Курошу (1945). В.П. Платонову в 1965 г. удалось положительно решить проблему сопряженности топологических p-подгрупп Силова для широкого класса топологических групп. Им доказано, что если группа G/G_0 компактна, то топологические p-подгруппы Силова в G сопряжены. Как было показано на примерах, содержательного усиления эта теорема не допускает. Соответствующий аналог был найден и для теоремы Холла: в проективно разрешимой топологической группе G с компактной факторгруппой G/G_0 топологические силовские π-подгруппы сопряжены.

Теория локально нильпотентных локально компактных групп была построена В.М. Глушковым. При этом обнаружилось, что аналогия между топологическим и абстрактным случаем неполная. Причина этого заключается в том, что понятие локальной нильпотентности не является топологическим. В.П. Платонов предложил более естественное топологические обобщение локально нильпотентных групп. Он ввел класс локально проективно нильпотентных групп [88]. Этот класс значительно шире локально нильпотентных, в частности, он замкнут относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и топологических прямых произведений. В результате были получены наиболее полные и законченные результаты в этом направлении. В частности, В.П. Платоновым было показано, что множество топологических π-элементов G_π локально проективно нильпотентной группы G является инвариантной топологической подгруппой. Группа G_π тогда и только тогда замкнута в G, если G_0 — чистая группа. Аналогию между абстрактным и топологическим случаями иллюстрирует в наиболее полной форме теорема о том, что компактнопорожденная локально проективно нильпотентная группа проективно нильпотентна. В.П. Платонов также доказал, что всякая локально компактная группа обладает замкнутым локально проективно нильпотентным радикалом.

Были исследованы локально компактные группы, удовлетворяющие условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп. В.П. Платонов показал, что топологическая группа G тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности для замкнутых абелевых подгрупп, когда связная компонента единицы G_0 — компактная группа Ли, а G/G_0 — периодическая в абстрактном смысле группа, удовлетворяющая условию минимальности для любых абелевых подгрупп.

Результаты В.П. Платонова о строении топологических групп подвели определенный итог исследованиям классов топологических групп, аналогичным соответствующим классам абстрактных групп, и знаменовали собой в значительной степени завершение развития этого направления. За цикл работ по топологическим группам В.П. Платонову в 1968 г. присуждена премия Ленинского комсомола.

3. Структурная теория алгебраических групп.

3.1. Теоремы инвариантности и сопряженности. Первые исследования в Беларуси в теории алгебраических групп связаны с разрешимыми алгебраическими группами. В работах 1962— 1964 гг. В.П. Платоновым были описаны общие свойства разрешимых и нильпотентных алгебраических групп, в том числе несвязных. Он показал, что нильпотентная алгебраическая группа является прямым произведением своего унипотентного радикала и подгруппы, состоящей из всех полупростых элементов. В.П. Платоновым было установлено, что разрешимая алгебраическая группа разлагается в полупрямое произведение унипотентного радикала и максимального обобщенного тора, причем все такие обобщенные торы сопряжены (для упрощения мы ограничились случаем нулевой характеристики). Эти и некоторые другие результаты представляют собой далеко идущее обобщение результатов Д.А. Супруненко, полученных им для максимальных разрешимых линейных групп либо для максимальных нильпотентных линейных групп фиксированного класса нильпотентности.

Наиболее существенные результаты 1962–1967 гг. связаны с анализом строения неразрешимых алгебраических групп и их автоморфизмов. Определенный итог этому периоду работы подведен статьей [89]. Центральное место в этой работе принадлежит «теоремам инвариантности». Первая теорема инвариантности утверждает существование максимального инвариантного тора для всякой конечной сверхразрешимой группы рациональных полупростых автоморфизмов связной алгебраической группы, что представляет собой глобальный аналог известной теоремы Бореля–Мостова–Серра об автоморфизмах алгебр Ли. Вторая теорема инвариантности устанавливает существование инвариантной унипотентной борелевской подгруппы для каждой конечной группы унипотентных автоморфизмов связной алгебраической группы. Несколько позже В.П. Платонов исследовал возникающие здесь вопросы рациональности и существенно уточнил теоремы инвариантности. В результате им была доказана важная теорема о разрешимости связной алгебраической группы с почти регулярным автоморфизмом, т. е. автоморфизмом с конечным числом неподвижных точек.

3.2. Проблема Кнезера–Титса. Постановка проблемы относится к 60-м годам; в ее основе лежат исследования французского математика Титса о строении подгрупп k-точек простых алгебраических групп, порожденных унипотентными элементами. В частности, Титс доказал, что такие подгруппы центрально-просты как абстрактные группы (т. е. просты их факторгруппы по центру). Гипотеза Кнезера–Титса в точной формулировке гласит: если G_k — группа k-точек простой алгебраической группы G, определенной над полем k, и если G_k содержит унипотентные элементы, то фактор-группа группы G_k по ее центру проста как абстрактная группа.

В 1969 г. В.П. Платонову удалось получить полное решение задачи в случае, когда поле k локально, т. е. гипотеза Кнезера–Титса в этом случае полностью подтвердилась [92]. Этот результат нашел неожиданные применения в арифметической теории алгебраических групп, о чем будет сказано позднее.

Спустя некоторое время В.П. Платонову удалось дать доказательство гипотезы Кнезера–Титса также для функциональных полей и для глобальных полей характеристики 0 для всех групп, исключая некоторые формы групп типа E_6 и D_4. В своей наиболее общей форме гипотеза Кнезера–Титса зависит от проблемы Таннака–Артина, которая была решена В.П. Платоновым отрицательно. Поэтому и гипотеза Кнезера–Титса для произвольных полей несправедлива.

3.3. Гипотезы Дьедонне и Хардера. Пусть G — алгебраическая группа, определенная над полем k. Что можно сказать о строении групп G_k, не содержащих унипотентных элементов? Такие группы называются анизотропными. Анизотропные группы особенно трудно поддаются исследованию. В то же время это важнейший класс алгебраических групп. В качестве типичного примера анизотропной группы можно указать алгебраические группы, у которых G_k — мультипликативная группа тела (а k — центр этого тела).

Интересный результат о строении групп G_k связан со старой гипотезой французского математика Дьедонне, выдвинутой им в 1952 г. Пусть D — тело размерности m^2 над центром k характеристики, отличной от 2, и обладающее инволюцией τ, тривиальной на k, и пусть D^* — мультипликативная группа тела и Σ — подгруппа группы D^*, порожденная ненулевыми симметричными относительно τ элементами. Известно, что группа Σ является нормальным делителем группы D^*. Дьедонне в 1962 г. обнаружил, что если размерность пространства симметричных элементов тела равна $\frac{m(m+1)}{2}$, то $D^* = \Sigma$. Опираясь на этот результат, он и выдвинул гипотезу, что, за исключением тел кватернионов, такое равенство имеет место в общем случае. В. П. Платонов заметил, что гипотеза Дьедонне является частным случаем следующей общей задачи: если $f: G \to G'$ — k-изогения связных k-определенных алгебраических групп над произвольным полем k, то верно ли соотношение $f(G_k) = G'_k$? В.П. Платонов доказал, что если k — бесконечное конечнопорожденное поле, $f: G \to G'$ — нетривиальная k-изогения, то $f(G_k) \neq G'_k$ [94]. В частности, это опровергает гипотезу Дьедонне.

Для важного класса полей — полных дискретно-нормированных полей с совершенным полем вычетов $\bar{k}$ когомологической размерности ≤ 1 — немецким математиком Хардером была выдвинута гипотеза, что нормальный делитель группы $SL(1, D)$ конечномерного тела D над k, содержащий максимальный тор, соответствующий неразветвленному максимальному подполю, совпадает с $SL(1,D)$. В. П. Платонов и В. И. Янчевский [102] доказали справедливость гипотезы Хардера, получив, таким образом, первый достаточно общий результат о строении анизотропных групп. Гипотеза Хардера имеет не только самостоятельное значение — она находит применения в вопросах слабой аппроксимации в алгебраических группах.

3.4. Тела, проблема Таннака-Артина и приведенная K-теория.

Проблема Таннака–Артина (1943 г.) относится к строению полной линейной группы над телом T, размерность которого над своим центром конечна, и заключается в следующем: совпадает ли группа $SL(n,T)$ с коммутантом $\overline{GL(n,T)}$ полной линейной группы $GL(n,T)$? Из результатов Дьедонне непосредственно следует, что группы $SL(n,T)/\overline{GL(n,T)}$ при $n=1,2,\ldots$ все изоморфны и, следовательно, проблему Таннака–Артина достаточно решить для случая $n=1$. В течение ряда лет были получены результаты, дающие положительное этой проблемы для ряда классов полей. Тем более нежиданным для специалистов оказалось отрицательное решение этой проблемы, данное В.П. Платоновым [95]: группа $SL(n,T)/\overline{GL(n,T)}$ в общем случае нетривиальна. Контрпример был найден для случая, когда поле является полем формальных степенных рядов от двух переменных. Группа $SL(n,T)/\overline{GL(n,T)}$ аналогична группе Уайтхеда в алгебраической K-теории и В.П. Платонов назвал открытую им группу приведенной группой Уайтхеда, сохранив для нее обозначение Басса $SK_1(T)$. Естественным является вопрос о том, какие группы могут быть реализованы в качестве $SK_1(T)$ для подходящего тела T. Известно, что группа $SK_1(T)$ абелева и имеет конечную экспоненту. Эта проблема была исследована В.П. Платоновым и получила полное решение: любая конечная или счетная абелева группа конечной экспоненты может быть реализована в качестве группы $SK_1(T)$ для соответствующего тела T.

Приведенная *K*-теория тесно связана с проблемой рациональности групповых алгебраических многообразий. В.П. Платонов в 1977 г. доказал, что если многообразие, определяемое группой $SL(n,T)$, является рациональным над k (здесь k — центр тела T), то существует такое число m, что элементы группы $SL(n,T)$ представимы в виде произведения не более чем m коммутаторов группы $GL(n,T)$. В частности, в этом случае $SK_1(T)=1$. Основные результаты приведенной K-теории показывают, таким образом, что для произвольного поля k

рациональность многообразия $SL(n,T)$ — сравнительно редкое явление. С другой стороны, группа $SK_1(T)$ в значительной степени характеризует меру отклонения соответствующего многообразия от рационального. Работы В.П. Платонова по построению приведенной K-теории составляют важную часть цикла работ, за который ему присуждена Ленинская премия 1978 г.

В работах В.В. Курсова [55-56] изучен вопрос о представимости произвольного элемента коммутанта мультипликативной группы тела в виде коммутатора, а также вычислена коммутаторная длина для групп Шевалле над произвольным бесконечным полем.

В [57], [58] В.В. Курсовым и В.И. Янчевским исследована структура обобщенного скрещенного произведения конечномерного центрального тела и конечной группы его автоморфизмов.

В.И. Каскевич исследовал структуру унитарных и ортогональных групп над гензелевыми дискретно нормированными алгебрами Адзумая [50]. В [51] изучались нормальные подгруппы группы $SL(1,D)$, где D — конечномерное тело, центральное над гензелевым дискретно нормированным полем K. Главный результат состоит в следующем. Предположим, что кольцо O_K целых элементов K совершенно. Тогда каждая нецентральная нормальная подгруппа $SL(1,D)$ содержит некоторую конгруэнц-подгруппу конгруэнц-уровня r. Все нецентральные нормальные подгруппы классифицированы по конгруэнц-уровням.

В [36] И.И. Воронович и В.И. Янчевский исследовали проблему существования рационального поля разложения у центральных простых алгебр. Если A — центральная простая алгебра над полем рациональных функций $k(x)$, где k — бесконечное расширение конечного поля $\mathbb{F}_q$, индекс A равен $p_1^{a_1}\dots p_t^{a_t}p_m$, где $a_1,\dots,a_t>0$, $m\geq 0$, и k содержит примитивный корень из 1 степени $p_1\dots p_t$, то A имеет поле разложения. В качестве следствия мы получаем, что если $\operatorname{char} k\neq 2$, то каждое k-определенное расслоение на коники над любой k-рациональной кривой является k-унирациональным.

В [37] И.И. Вороновичем исследовался локально-глобальный принцип для алгебр над полями рациональных функций. Известный результат Фаддеева, Ауслэндера, Брумера, Нимана и Уэплза утверждает, что конечномерная центральная простая алгебра A над полем рациональных функций $k(x)$ тривиальна тогда и только тогда, когда алгебра $A\otimes_{k(x)}k(x)_v$, где $k(x)_v$ — пополнение поля $k(x)$ относительно нормирования v, тривиальна для всех нормирований v. В [37] доказано, что если k — поле алгебраических чисел, то в этой теореме можно ограничиться нормированиями v, задаваемыми линейными многочленами $x-a$, где a пробегает некоторую арифметическую прогрессию из k. В качестве следствия получен следующий результат. Если V — k-определенное расслоение на коники над k-рациональной кривой C и для каждой k-точки $t \in C$ слой V_t является k-рациональным, то тогда общий слой V_τ рационален над полем вычетов общей точки. В частности, V является k-рациональным.

4. Арифметическая теория алгебраических групп.

4.1. Проблема сильной аппроксимации. Пусть G — связная линейная алгебраическая группа, определенная над глобальным полем k, G_A — группа аделей группы G, S — конечное множество неэквивалентных нормирований поля k, G_S — подгруппа группы G, у которой все v-компоненты ($v \notin S$) равны 1. Далее, пусть $\pi_S : G_A \to G_S$ — каноническая проекция и G_k — подгруппа k-точек группы G. Проблема сильной аппроксимации состоит в следующем: когда имеет место соотношение $\overline{G_S G_k} = G_A$? (Здесь черта означает замыкание в адельной топологии.)

Первые исследования проблемы сильной аппроксимации принадлежат известному немецкому математику Эйхлеру, который в 1937 г. установил свойство сильной аппроксимации у группы $SL(n,T)$, где T — конечномерное тело. В 1966 г. Кнезером удалось найти полное решение задачи для классических групп над числовыми полями. В 1969 г. В.П. Платоновым была предложена принципиально новая идея, позволившая доказать сильную аппроксимацию для всех типов групп как в числовом, так и в функциональном случае. В подходе Платонова проблема сильной аппроксимации редуцировалась к проблеме Кнезера — Титса для локальных (p-адических) полей. В. П. Платоновым [92] доказано, что если G — простая односвязная алгебраическая группа, для которой группа G_S некомпактна, то группа G обладает свойством сильной аппроксимации относительно S. В этой же статье была доказана справедливость гипотезы Кнезера—Титса для локальных полей. Эта работа В.П. Платонова явилась одним из наиболее значительных достижений в теории алгебраических групп в конце 60-х годов.

4.2. Проблема слабой аппроксимации. Пусть k — произвольное поле, S — произвольное конечное множество его неэквивалентных нормирований и k_v — пополнение поля k относительно нормирования v. Группа G_k естественным образом («диагонально») вкладывается в группу $G_S = \prod_{v \in S} G_{k_v}$. Проблема слабой аппроксимации заключается в следующем: когда замыкание группы G_k плотно в G_S относительно адельной топологии?

Первоначально проблема слабой аппроксимации ставилась только для глобальных полей. В 1962 г. Кнезер доказал свойство слабой аппроксимации для односвязных классических групп над глобальным полем. Из работы [92] следовало положительное решение проблемы слабой аппроксимации для любых односвязных групп над глобальным полем. Однако понятие слабой аппроксимации не зависит от типа основного поля. В связи с этим Кнезер распространил постановку проблемы на произвольное поле. На основе созданной В.П. Платоновым приведенной K-теории общая проблема слабой аппроксимации получила отрицательное решение уже для случая, когда S состоит из одного элемента. Фактически для группы $SL(n,T)$, где T — тело с центром k, приведенная группа Уайтхеда $SK_1(T)$ позволяет вычислять отклонение от слабой аппроксимации.

Пусть k_v — пополнение поля k по его нормированию v. Алгебра $T \otimes_k k_v$ есть полная матричная алгебра над некоторым телом, которое мы обозначим через T_v. Пусть $\varphi_v : SK_1(T) \to SK_1(T_v)$ — канонический гомоморфизм, индуцированный вложением $T \to T \otimes_k k_v$. Отклонение от слабой аппроксимации при $S = \{v\}$, очевидно, описывается фактор-группой $SL(n,T \otimes_k k_v)/\overline{SL(n,T)}$, где черта обозначает замыкание в топологии, индуцированной нормированием v. В. П. Платоновым доказано,что имеет место изоморфизм групп $SL(n,T \otimes_k k_v)/\overline{SL(n,T)} \cong SK_1(T_v)/\varphi_v(SK_1(T))$. Приведенная K-теория позволяет точно вычислять приведенные группы Уайтхеда, входящие в формулу выше. На этом пути В.П. Платонов показал, что существуют поле k и тело T с центром k такие, что отклонение от слабой аппроксимации при подходящем выборе нормирования v может быть сколь угодно велико, т. е. порядки групп $SK_1(T_v)/\varphi_v(SK_1(T))$ не ограничены в совокупности.

4.3. Арифметические подгруппы алгебраических групп. Одним из основных объектов исследования в арифметической теории алгебраических групп являются арифметические подгруппы. Пусть G —

алгебраическая группа, определенная над полем k алгебраических чисел, O — кольцо целых элементов поля k, G_O — группа O-единиц группы G. Подгруппа $H \leq G$ называется арифметической, если она соизмерима с G_O (соизмеримость подгрупп означает, что их пересечение имеет конечный индекс в каждой из них). Исследование общих свойств арифметических групп было проведено Борелем и Хариш-Чандрой в первой половине 60-х годов. По существу ими были заложены основы теории арифметических групп. В дальнейшем на первый план выдвинулась проблема классификации максимальных арифметических подгрупп. В результате анализа частных случаев этой проблемы наметился подход, в основе которого лежала редукция к классификации максимальных компактных подгрупп в группах G_{k_v} — проблеме, уже решенной Брюа и Титсом. Решающее значение после этого имели результаты В.П. Платонова по проблеме сильной аппроксимации. Опираясь на них, в 1971 г. В.П. Платонов получил в принципе полное решение проблемы классификации максимальных арифметических подгрупп [93]. Конструкция Платонова достаточно сложна, чтобы можно было привести ее здесь. Отметим лишь, что была указана полная система инвариантов в терминах максимальных компактных подгрупп соответствующих p-адических групп, факторизованных по своим центрам, и доказано, что совпадение соответствующих систем инвариантов максимальных арифметических подгрупп влечет сопряженность этих групп в G.

Для конкретных групп в некоторых случаях оказалось возможным выписать в явной форме представители классов сопряженных максимальных арифметических подгрупп. Для разложимых ортогональных групп это было проделано А.А. Бондаренко [27–28]. Это, с учетом результатов полученных ранее, завершает явную классификацию максимальных арифметических подгрупп для простых классических групп над одноклассным глобальным полем. В [29-30] получена явная классификация максимальных арифметических подгрупп ортогональных групп ранга ≥ 1.

В [101] В.П. Платоновым и А.А. Шарометом решена конгруэнц-проблема для линейных групп над арифметическими кольцами, а в [120] А.А. Шарометом решена конгруэнц-проблема для арифметических подгрупп разрешимых алгебраических групп над глобальными полями положительной характеристики.

Хохшильд и Мостов в 1969 г. нашли необходимые и достаточные условия для того, чтобы все бирациональные автоморфизмы алгебраической группы образовывали алгебраическую группу преобразований. А.А. Шарометом [117-119] найдены аналогичные условия для незамкнутого поля нулевой характеристики, а также указаны достаточные условия для того, чтобы группа всех бирациональных K-автоморфизмов алгебраической K-группы G была алгебраической группой преобразований. Для разрешимых групп найдены необходимые и достаточные условия.

4.4. Проблема рода в арифметических группах. Важной арифметической характеристикой алгебраической группы является число двойных классов группы аделей. Проблема оценки числа классов алгебраических групп содержит в качестве частных случаев классические проблемы о числе классов в роде квадратичных форм, восходящей к Лагранжу и Гауссу, и о числе классов идеалов числовых полей. Работы [32, 97, 98], посвящены изучению чисел и групп классов алгебраических групп.

Пусть G — связная линейная алгебраическая группа степени n, определенная над полем алгебраических чисел K. Для произвольной матричной реализации $\varphi: G \to GL_r(\Omega)$ над K обозначим через $\varphi(G)_{A(\infty)}$, $\varphi(G)_A$, $\varphi(G)_K$ соответственно группы аделей, целых аделей, главных аделей группы $\varphi(G)$, и пусть $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ — число двойных классов $\varphi(G)_{A(\infty)} \backslash \varphi(G)_A / \varphi(G)_K$. Конечность числа $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ установлена А.Борелем.

В работе [35] изучается зависимость между числом $\mathrm{cl}(G)$ и числом классов наиболее важных подгрупп группы G. Для произвольной параболической K-подгруппы P редуктивной алгебраической K-группы G доказано неравенство $\mathrm{cl}(G) \le \mathrm{cl}(P)$. Аналогичное соотношение имеет место для K-разложимых торов. В случае максимальных торов изучается зависимость между $\mathrm{cl}(G)$ и $\min \mathrm{cl}(T)$, где T — максимальный K-тор группы G. Подробно исследуется случай ортогональной группы G. В работе [97] обобщаются результаты исследования зависимости между $\mathrm{cl}(G)$ и $\min \mathrm{cl}(T)$ для неопределенных полупростых групп, доказан ряд интересных утверждений для числа классов торов.

Вычисление $\mathrm{cl}(\varphi(T))$ для алгебраического тора T представляется малореальной задачей. Для полупростых неопределенных групп ситуация оказывается иной. Пусть $\pi: \widetilde{G} \to G$ универсальное накрытие и $m = |\ker \pi|$ — порядок фундаментальной группы полупростой неопределенной группы G. Тогда $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ является делителем числа вида m^d, $d \ge 0$. Основным результатом статьи [97] является доказательство того, что для полупростой неопределенной группы G и для всякого числа m^d, $d \geq 0$, существует такая K-реализация φ_d степени $2n$ группы G, что $\mathrm{cl}(\varphi_d(G)) = m^d$. Сформулирован вопрос: если f — показатель ядра F накрытия π, то всякая ли конечная абелева группа экспоненты f реализуется в качестве группы классов $G\mathrm{cl}(\varphi(G))$? Для циклической группы положительный ответ на этот вопрос получен в [97]. Центральным результатом статьи [98] является теорема реализации, согласно которой для полупростой неопределенной K-группы G в качестве группы классов $G\mathrm{cl}(\varphi(G))$ реализуется произвольная конечная абелева группа экспоненты f. Доказывается также, что если G полупростая группа компактного типа степени n, то для всякого натурального r существует реализация φ_r группы G степени $2n$, такая что $\mathrm{cl}(\varphi(G))$ делится на r.

Вопрос о реализации возможных чисел и групп классов на решетках степени n для любой неопределенной группы G остается пока открытым, ответы даны лишь в ряде специиальных случаев. Важный факт о существовании одноклассных решеток любой размерности для произвольной полупростой неопределенной группы доказан в [97]. В [32] завершено описание чисел и групп классов простых классических неопределенных групп в канонических реализациях. Доказан критерий одноклассности односвязной полупростой алгебраической группы в некоторой заданной K-реализации. Получен критерий существования одноклассной квадратичной формы среди форм, $\mathbb{Q}$-эквивалентных определенной квадратичной форме от $n \geq 3$ переменных над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

В [33] получены необходимые и достаточные условия, при которых множество $\varphi(G)_{A(\infty)} \backslash \varphi(G)_A / \varphi(G)_K$ обладает естественной структурой группы. Из этих условий следует обобщение результата Кнезера на произвольную связную группу, у которой односвязная накрывающая ее полупростой части обладает свойством абсолютной сильной аппроксимации.

В [34] получены первые общие теоремы о бирациональной композиции квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над полем K. Доказано, что бирациональная композиция $h(Z)$ над K форм $f(X)$ и $g(Y)$ всегда существует, если одна из квадратичных форм изотропна над K, и описано множество квадратичных форм, которые подходят в качестве $h(Z)$ в этом случае. Приведены серии примеров существования бирациональной композиции и ее отсутствие, когда обе квадратичные формы K-анизотропны. Установлено, что если бирациональная композиция $h(Z)$ для анизотропных квадратичных форм существует, то $h(Z)$ определена однозначно с точностью до K-эквивалентности и невырожденная часть $h(Z)$ анизотропна над K.

5. Проконечные группы.

Исследования О.В. Мельникова по комбинаторной теории проконечных групп в последнее время сосредоточились на вопросах, связанных с заданием про-p-групп образующими и определяющими соотношениями. Это ограничение не является случайным, так как по целому ряду причин трудно ожидать каких-либо содержательных результатов подобного типа вне класса про-p-групп.

В качестве основного объекта исследования О.В. Мельниковым введен класс про-p-групп, названных асферическими. По определению, про-p-группа G является асферической, если она обладает таким копредставлением $G = F/N$, где F — свободная про-p-группа, что соответствующий модуль соотношений $\overline{N} = N/N^p[N,N]$ является пермутационным $\mathbb{F}_p[[G]]$-модулем, определяемым некоторым проконечным пунктированным G-пространством (T,t_0).

Введенное здесь понятие асферичности является довольно точным аналогом одноименного понятия абстрактной комбинаторной теории групп. Внешне различие состоит в том, что в про-p-теории асферичность определяется как свойство про-p-группы, а не ее конкретного копредставления.

Это, однако, находит оправдание в том, что для про-p-группы G асферичность одного из копредставлений $G = F/N$ влечет асферичность любого другого ее копредставления. Это факт, а также понятия и методы, разработанные для его получения, являются фундаментом теории асферических про-p-групп, представленной в статьях [78-79].

К числу наиболее важных из полученных в них результатов относится утверждение, которое можно назвать теоремой о тождествах. Оно утверждает, что если модуль соотношений $\overline{N}$ асферической про-p-группы G является пермутационным над G-пространством (T,t_0), то N является прямой суммой непрерывного семейства $\{U_i \mid i \in I\}$ подмодулей, индексированного точками пунктированного пространства G-орбит $I = G \backslash T$, причем модуль $U_{i_0} = \{0\}$ для $i_0 = \{t_0\}$, а остальные модули U_i

изоморфны стандартному модулю $\mathbb{F}_p[\![G/S_i]\!]$, где S_i — конечные циклические подгруппы G, $i \in I \setminus \{i_0\}$.

Этот результат вполне аналогичен теореме Линдона о тождествах для абстрактных групп с одним определяющим соотношением. Ряд других результатов об асферических про-p-группах также имеет прототипы в теории абстрактных групп с одним определяющим соотношением. Таковы результаты о конечных подгруппах, о подгруппах без кручения (они имеют когомологическую размерность ≤ 2), аналог теоремы Мурасуги о неабелевой группе с нетривиальным центром.

Стоит, однако, отметить, что теоремы абстрактной теории групп с одним соотношением используют, как правило, теорему Магнуса о свободе, никакого аналога которой в про-p-теории не существует. Доказательства в последней основаны на методах гомологической алгебры и ряде фактов о группах когомологий проконечных групп, часть из которых получена в статье [72].

Специфика про-p-групп проявилась еще и в том, что утверждение, почти совпадающее по формулировке с аналогом теоремы Мурасуги, справедливо для неразрешимой асферической про-p-группы G, имеющей нетривиальные разрешимые нормальные делители. В этом утверждении вместо центра участвует разрешимый радикал $R(G)$ группы G.

Абелевы асферические про-p-группы легко описываются. Описание разрешимых асферических про-p-групп оказалось более сложной задачей. Было, однако, установлено, что разрешимая асферическая про-p-группа является в трудных случаях конечным расширением группы Демушкина $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$ ранга 2.

Это обстоятельство позволило включить задачу описания разрешимых асферических про-p-групп в более общую задачу классификации про-p-групп, названных в [82] планарными. Хотя там принято другое определение, но планарные группы можно определить как асферические про-p-группы, являющиеся конечными расширениями групп Демушкина. Основным результатом является совпадение классов планарных про-p-групп и класса про-p-групп, имеющих задание образующими и определяющими соотношениями специального вида, подобного на задание фуксовых групп в абстрактной теории.

Возвращаясь к большему классу асферических про-p-групп, стоит все же отметить, что теорема о тождествах означает, в сущности, отсутствие нетривиальных (точнее, не необходимых) сотношений между их определяющими соотношениями. Поэтому можно считать полученные в [78-79] и [82] результаты фрагментом комбинаторной теории про-p-групп размерности 2. Содержащиеся в работах [47-48] и [71] исследования применительно к про-p-группам в определенном смысле завершили построение в размерности 1 достаточно полного аналога теории Басса-Серра.

Полученные в комбинаторной теории проконечных групп результаты и методы их доказательств естественным образом применимы в теории Галуа полей. В совместной статье [81] О.В. Мельникова и А.А. Шаромета описана абсолютная группа Галуа $G(K)$ поля K характеристики $p>0$, гензелева относительно дискретного нормирования v конечного ранга n с полем вычетов k в виде явно заданного полупрямого произведения $W \rtimes H$, где W является подгруппой $G^1(K)$ ветвления нормирования v и изоморфна свободному про-p-произведению свободных операторных про-p-групп определенных рангов над конкретными факторгруппами $H_1, H_2, \ldots, H_n$ группы $H \cong A \rtimes G(k)$ со свободной абелевой про-p'-группой A ранга n.

Отметим, что среди полей такого типа содержатся активно изучавшиеся многомерные локальные поля, но для них была исследована лишь факторгруппа $G(K)$ по коммутанту. Близкий по форме, но менее явный результат о группе Галуа $G(K)$ произвольного гензелева поля был получен ранее в работе О.В. Мельникова и О.И. Тавгеня [80]. Его использование позволило О.В. Мельникову [77] дать ответ на одну проблему, сформулированнуюЯрденом в его обзоре 1996 г. по группам Галуа, установив реализуемость в виде абсолютной группы Галуа некоторого поля свободного проконечного произведения двух сепарабельных групп, изоморфных $G(K_i)$, $i=1,2$. При этом, если $\operatorname{char} K_1 = \operatorname{char} K_2 = p \geq 0$, то нужное поле можно построить той же характеристики $p \geq 0$.

Отвечая на другой вопрос Ярдена, О.В. Мельников [76] среди прочего доказал, что конечно порожденная подгруппа H абсолютной группы Галуа $G(K)$ произвольного гильбертова поля K не может содержать нетривиальную достижимую (т.е. равную пересечению членов трансфинитного нормального ряда) подгруппу $G(K)$. Доказательство организовано таким образом, что одновременно оно дает точно такое же утверждение для конечно порожденной подгруппы H бесконечного индекса в свободной проконечной группе $F(n)$ произвольного ранга $n \neq 1$.

Таким образом, эту статью можно считать пополнением цикла работ 70-х годов XX в., последовавшим за решением в [63] проблемы И.Р. Шафаревича о всободе конгруэнц-ядра группы $SL(2,\mathbb{Z})$ из «Коуровской тетради». Этот цикл работ О.В. Мельникова имел целью получить как можно более подробную информацию о достижимых, нормальных и характеристических подгруппах свободных проконечных групп.

В одной из статей этого цикла (см. [66]) в качестве вспомогательного результата было доказано следующее утверждение. Произвольная характеристическая подгруппа K свободной проконечной группы $F(\infty)$ бесконечного ранга является C-резидуалом $C(F(\infty))$ для некоторой формации C конечных групп. Здесь $C(G)$ определена как пересечение всех нормальных делителей U проконечной группы G, факторгруппы G/U по которым принадлежат C. Полученная таким образом биекция $C \to C(F(\infty))$ позволяет рассматривать C-резидуалы проконечных групп как аналоги вербальных подгрупп теории многообразий абстрактных групп, а фактогруппы $F(r)/C(F(r))$ как свободные группы рангов r формации C. При этом возникает возможность использовать результаты упоминавшегося выше цикла работ для решения задач теории формаций. Плодотворность этого метода была подтверждена О.В. Мельниковым, получившим практически непосредственно из одного результата статьи [65] решение проблемы Л.А. Шеметкова о минимальных идемпотентах полугруппы формаций (см. [73]).

Одним из распространенных приемов для применения теории проконечных групп в теории абстрактных групп является переход к проконечному пополнению $\widehat{G}$ исследуемой финитно аппроксимируемой группы G. Значительное число работ было посвящено естественному вопросу о том, насколько свойства группы G восстанавливаются по ее проконечному пополнению $\widehat{G}$. Одним из вариантов этого вопроса является следующая проблема Гротендика 1970 г. Будет ли изоморфизмом такой гомоморфизм $\varphi : H \to G$ конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп, что индуцированный им гомоморфизм $\widehat{\varphi} : \widehat{H} \to \widehat{G}$ проконечных пополнений является изоморфизмом? Легко видеть, что без ограничения общности можно считать H подгруппой G, а гомоморфизм φ — ее вложением в G.

Первые контрпримеры к этой гипотезе были построены В.П. Платоновым и О.И. Тавгенем [99-100]. В этих примерах $G = \Phi \times \Phi$, где Φ — абстрактная свободная группа ранга $4m$ при некотором $m \geq 1$.

Было построено m таких попарно не изоморфных подгрупп H_i, что $\widehat{\varphi_i}$ являются изоморфизмами для вложений $\varphi_i : H_i \to G, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$ Некоторое время оставался открытым вопрос о существовании разрешимых групп G, дающих контрпримеры. Это было важно выяснить, так как метабелевы группы приводят к положительному ответу на гипотезу Гротендика. Все же оказалось, что существуют разрешимые ступени 3 группы G, для которых инъективный гомоморфизм $\varphi : H \to G$ с группой $H \cong G$ дает контрпример к гипотезе Гротендика (см. статью [107] О.И. Тавгеня).

6. Комбинаторная теория групп. Теория представлений бесконечных групп.

Линейные группы образуют один из наиболее важных и изученных классов групп. Немногое известно о линейности свободных конструкций линейных групп: свободного произведения с объединённой подгруппой, HNN-расширения, древесного произведения и фундаментальной группы графа групп. Вопрос о линейности свободного произведения линейных групп полностью решен В.Л. Нисневичем [83]. Эта работа не утратила значения и поныне. Основной результат В.Л. Нисневича утверждает, что если $G_i \subset GL_n(K)$, $i \in I$, — конечное множество линейных групп, где K — поле, то их свободное произведение изоморфно подгруппе $GL_{n+1}(K)$. В.Л. Нисневичем также доказано, что если каждая конечно порожденная подгруппа группы G может быть точно представлена матрицами n-го порядка над полем K, то и группа G может быть точно представлена матрицами n-го порядка над некоторым полем. Для других свободных конструкций ситуация значительно сложнее. Не всегда группа, полученная с помощью свободных конструкций из линейных групп, является линейной, и не существует каких-либо общих методов в решении вопроса о линейности для свободных конструкций.

Продолжением работы Нисневича [83] стала работа О.И. Тавгеня [112], где исследуется линейность амальгамированного свободного произведения $G = G_1 *_H G_2$. Найти критерий линейной представимости таких групп — старая проблема, не получившая пока окончательного решения. Ею занимались такие известные специалисты по теории линейных групп, как Басс, Шален, Верфриц и др. Однако, сведения, и.меющиеся по этой проблеме, немногочисленны.

Верфриц выдвинул гипотезу, что если G_1 и G_2 — полициклические, а H нормальна в каждой G_i, то $G = G_1 *_H G_2$ — линейна. В [112] это доказано в случае, когда G_i — конечно порожденные нильпотентные группы. Важно, что основным методом доказательства этого результата явилось использование проконечных аналитических групп. К [112] примыкает работа [49], где установлено, что в случае полициклических G_i группа G финитно аппроксимируема относительно сопряженности.

С другой стороны, иногда важно установить нелинейность или неарифметичность известной абстрактной группы.

Так в работе [111] установлена неарифметичность групп $\mathrm{Aut}\,F_n$, $n \geq 2$ и $\mathrm{Out}\,F_n$, $n \geq 3$, где F_n — свободная группа ранга n, чем дан ответ на вопрос Герстена. А в работе [59] установлена нелинейность группы автоморфизмов свободной метабелевой группы, чем дан ответ на вопрос Мочизуки.

Титс доказал, что всякая подгруппа линейной группы над полем либо содержит свободную подгруппу ранга 2, либо удовлетворяет нетривиальному тождеству. Этот результат носит название альтернативы Титса. Представляет интерес отыскание других классов групп, удовлетворяющих альтернативе Титса. В работах Ю.В. Тишина [115–116] исследовалась проблема описания в том или ином классе абстрактных групп всех подгрупп, которые не содержат свободных подгрупп ранга 2. Рассматривался класс групп $\mathfrak{F}$ состоящий из групп, которые получены из циклических групп с помощью операций амальгамированного произведения и HNN-расширения при условии, что амальгамируемые и ассоциированные подгруппы являются циклическими или свободными. Известно, что группы с одним определяющим соотношением, группы узлов, а также большая часть фуксовых групп могут быть получены из циклических групп с помощью амальгамированного произведения и HNN-расширения. Используя технику Басса–Серра действия групп на деревьях и разработанную автором технику стягивания подгрфов в графе групп, для групп из класса $\mathfrak{F}$ получено описание всех подгрупп, которые не содержат неабелевых свободных подгрупп. Этот результат влечет, что группы из класса $\mathfrak{F}$ удовлетворяют альтернативе Титса. Другое важное применение полученных результатов — новые критерии линейности свободных конструкций, полученных из абелевых групп. Доказано, что если G_i, $i \in I$, — семейство абелевых групп, представимых матрицами степени n, то группа $G = *_A G_i$, где $i \in I$, линейна тогда и только тогда, когда каждая из групп G_i / A представима матрицами степени n. Ю.В. Тишиным изучены необходимые и достаточные условия линейности группы G, действующей на некотором дереве, при условии, что стационарные подгруппы всех вершин являются почти абелевыми группами.

Исследования линейных и алгебраических групп были продолжены О. И. Тавгенем. Его интересовала связь между линейностью группы и ее комбинаторными свойствами.

Говорят, что группа G имеет конечную ширину, если она представляется в виде конечного произведения циклических групп, т. е. существуют элементы $g_1,\ldots,g_n \in G$ такие, что для любого $g \in G$ имеем $g = g_1^{k_1}, ..., g_n^{k_n}$, $k_i \in \mathbb{Z}$. В работе [109] была дана абстрактная характеризация линейных групп. Пусть G — группа. Тогда G линейна тогда и только тогда, когда для некоторого p существует ряд $G > G_1 > G_2 > ...$ такой, что G/G_1 — конечна, $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \{1\}$ и G_i/G_{i+1} — конечные p–группы для всех $i \geq 1$, конечной ширины n, не зависящей от i.

Основой докторской диссертации О. И. Тавгеня явились результаты работ [109], [110] и [113], в которых установлена конечная ширина широкого класса арифметических групп. Вначале Картер и Келлер установили конечную ширину группы $SL_n(O)$, $n \geq 3$, (относительно трансвекций), где O — кольцо целых алгебраических чисел. Рассмотрим кольцо S–целых алгебраических чисел O_S некоторого поля алгебраических чисел. Пусть ${}^{\sigma}G(\Phi, O_S)$ — группа Шевалле нормального либо скрученного типа, построенная по автоморфизму σ неприводимой приведенной системы корней Φ и кольцу O_S. О.И. Тавгенем доказано, что ${}^{\sigma}G(\Phi, O_S)$ имеет конечную ширину относительно множества корневых элементов $x_A(t)$, $A \in {}^{\sigma}\Phi$. Помимо прочего, важность этого результата состоит в его связи со знаменитой конгруэнц–гипотезой.

И.К. Жуком в работах [42-46] систематически изучались обобщенные группы Кокстера $G = \left\langle x_1,\ldots,x_n \,\middle|\, x_1^{k_1} = \cdots x_n^{k_n} = (x_i x_j)^{m_{ij}} = 1 \right\rangle$, где $k_i \in \{2,3,\ldots,\infty\}$, $m_{ij} < \infty$. Основные факты комбинаторной теории групп Кокстера, построенной Титсом, перенесены на обобщенные группы Кокстера. В частности, классифицированы конечные обобщенные группы Кокстера и их автоморфизмы, описаны коммутанты и центры произвольных обобщенных групп Кокстера. Указан алгоритм, решающий для таких групп проблему тождества. Эти результаты были получены И. К. Жуком на основе нового метода, который нашел и другие полезные применения.

Например, были построены новые серии конечных групп, у которых минимальное число образующих и соотношений равно 3.

Беняш-Кривец В.В. исследовал проблему разложимости конечно порожденных групп в нетривиальное свободное произведение с объединенной подгруппой (группу, обладающую таким разложением, будем называть разложимой). Уолл поставил вопрос о том, какие группы с одним соотношением являются разложимыми. Баумслаг и Шален доказали разложимость группы G с $m \geq 3$ образующими и одним соотношением. Не все группы с двумя образующими и одним соотношением разложимы. Файн, Левин и Розенбергер выдвинули гипотезу о том, что произвольная группа с двумя образующими и одним соотношением с кручением разложима. Проблема разложимости для вполне разрывных групп преобразований плоскости исследовалась Цишангом. Он дал полный ответ на вопрос, когда такая группа разложима во всех случаях, за исключением групп $H_1 = \left\langle a,b \,\middle|\, [a,b]^n = 1 \right\rangle$ и $H_2 = \left\langle a,b \,\middle|\, a^2 = [a,b]^n = 1 \right\rangle$, $n \geq 2$. В [17] доказано, что обобщенные треугольные группы вида $G = \left\langle a,b \,\middle|\, a^n = R^m(a,b) = 1 \right\rangle$ являются разложимыми. В качестве немедленного следствия этого результата получается разложимость групп H_1 и H_2, а также разложимость групп с двумя образующими и одним соотношением с кручением. Другой результат, полученный в [17], устанавливает связь между свойством разложимости группы и свойствами ее неприводимых представлений в $SL_2(\mathbb{C})$. Доказано, что если многообразие характеров $X_{irr}(G, SL_2(\mathbb{C}))$ неприводимых представлений группы G в $SL_2(\mathbb{C})$ имеет размерность не менее 2, то группа G разложима.

Работы [18-20] посвящены исследованию альтернативы Титса для обобщенных треугольных групп $T(k,n,m) = \left\langle a,b \,\middle|\, a^k = b^n = R^m(a,b) = 1 \right\rangle$. В 1989 г. Розенбергер выдвинул гипотезу, что обобщенные треугольные группы $T(k,n,m)$ удовлетворяют альтернативе Титса. В работах Баумслага, Моргана, Шалена, Розенбергера, Хови эта гипотеза доказана для всех типов обобщенных треугольных групп, за исключением $(2,n,2)$, $(3,3,2)$, $(3,4,2)$, $(3,5,2)$. В.В. Беняш-Кривцом [18-20] доказано, что обобщенные треугольные группы типа $(2,n,2)$ при $n \geq 6$ удовлетворяют альтернативе Титса.

Другое направление исследований В.В. Беняш-Кривца — геометрическая теория представлений конечно порожденных групп. Основные объекты исследований — многообразие n-мерных представлений $R_n(G)$ и соответствующее многообразие характеров $X_n(G)$ конечно порожденной группы G. Точки этих многообразий параметризуют представления и характеры вполне приводимых представлений группы G в $GL_n(K)$. Об этих многообразиях в общем случае известно очень мало. Детально изучен лишь класс конечных групп и частично — классы нильпотентных и разрешимых групп. Для топологических применений важно знать описание многообразий n-мерных представлений тех групп G, которые возникают как фундаментальные группы некоторых естественных классов многообразий. В работах [23-26] исследованы многообразия представлений и характеров фундаментальных групп компактных поверхностей. Если $\Gamma_g = \left\langle x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g \,\middle|\, \prod_{i=1}^{g} [x_i, y_i] = 1 \right\rangle$ — фундаментальная группа компактной ориентируемой поверхности рода g, то многообразие представлений $R_n(\Gamma_g)$ является неприводимым $\mathbb{Q}$-рациональным многообразием размерности $(2g-1)n^2+1$, если $g>1$, и размерности n^2+n, если $g=1$. Соответствующее многообразие характеров является неприводимым $\mathbb{Q}$-унирациональным многообразием размерности $(2g-2)n^2+2$, если $g>1$, и размерности $2n$, если $g=1$ [23-24]. В работах [25-26] изучаются многообразия представлений фундаментальной группы $\Delta_g = \left\langle x_1, \ldots, x_g \,\middle|\, x_1^2 \cdots x_g^2 = 1 \right\rangle$ компактной неориентируемой поверхности рода g. Если $g \geq 3$ и пара (n, g) отлична от $(2,3)$, то $R_n(\Delta_g)$ состоит из двух $\mathbb{Q}$-рациональных неприводимых компонент, каждая из которых имеет размерность $(g-1)n^2$. Многообразие $R_2(\Delta_3)$ состоит из трех $\mathbb{Q}$-рациональных неприводимых компонент размерности 8. Многообразие представлений $R_n(\Delta_2)$ фундаментальной группы бутылки Клейна состоит из $\frac{(n+2)^2}{4}$ $\mathbb{Q}$-рациональных неприводимых компонент, если n — четно, и из $\frac{(n+1)(n+3)}{4}$ $\mathbb{Q}$-рациональных неприводимых компонент, если n — нечетно. Эти результаты завершают описание многообразий представлений фундаментальных групп поверхностей.

Работы [21-22] посвящены исследованию групп S-единиц в гиперэллиптических полях. Найден эффективный алгоритм, позволяющий находить систему фундаментальных S-единиц.

7. Работа со школьниками.

О. И. Тавгень возглавляет группу математиков–разработчиков стандартов и учебных программ по математике для 12–летней общеобразовательной школы. Он также является автором учебников и учебных пособий по математике для классов с углубленным изучением математике в школе [1], [11].

Большой вклад вносят члены кафедры в работу с одаренной молодежью. И.И. Воронович и В.И. Каскевич много лет являются членами жюри Белорусской математической олимпиады школьников, членами предметных комиссий по математике при Министерстве образования по составлению олимпиадных заданий. Ими разработано более 900 оригинальных задач для олимпиад разного уровня: Минских районных, Минских городских, областных, Республиканских, Минских олимпиад младших школьников. В течение 4 лет с1997 г. по 2000 г. задачи И.И. Вороновича выбирались для Международных математических олимпиад.

И.И. Воронович являлся членом жюри Всесоюзных математических олимпиад, а с 1993 г. является членом жюри Международных математических олимпиад школьников, а также руководителем и тренером сборной команды школьников Беларуси по математике. За это время белорусскими школьниками на Международных математических олимпиадах завоевано 11 золотых, 29 серебряных и 39 бронзовых медалей, а также 4 похвальных отзыва.

С 1994 г. Беларусь участвует в международный математическом конкурсе «Кенгуру», который в настоящее время является самым массовым конкурсом в мире. В 2007 году в нем участвовало более 4,5 миллионов школьников из 40 стран, в том числе более 116 000 белорусских школьников. Большую методическую работу по подготовке заданий конкурса «Кенгуру» и составлению задач для него выполняют сотрудники кафедры алгебры И.И. Воронович и В.И. Каскевич. Эта работа особенно активизировалась в последние годы, когда конкурс в Беларуси стал подлинно массовым и весьма востребованным белорусскими школьниками. За период с 2002 г. по 2007 г. для международного математического конкурса «Кенгуру» было отобрано 115 белорусских задач. С 2003 г. белорусские задачи – самые популярные задачи конкурса: их ежегодно отбиралось больше, чем задач любой другой страны, участвующей в «Кенгуру». По материалам конкурса И.И. Воронович и В.И. Каскевич совместно с другими организаторами «кенгуру» в Беларуси опубликовали 9 брошюр, суммарный тираж которых составил более 400 000 экземпляров [3].

Основные публикации

1. Ананченко К.О., Воробьев Н.Т., Петровский Т.Н., Тавгень О.И. Алгебра: учебное пособие для 8 кл. с углубленным изучением математики. Минск: Народная асвета, 2005. 310 с.
2. Барабанов Е.А., Воронович И.И., Каскевич В.И., Мазаник С.А. Задачи заключительного тура Минской городской математической олимпиады школьников. Минск: Белорусская ассоциация «Конкурс», 2006.
3. Барабанов Е.А., Воронович И.И., Каскевич В.И. и др. Международный математический конкурс «Кенгуру» в Беларуси: условия и решения задач, 1 ч., 2 ч. Минск: Белорусская ассоциация «Конкурс», 2003, 2004, 2005, 2006, 2007 гг.
4. Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. Минск: Университетское, 1989.
5. Voronovich I., Mazanik S. 56 Belorussian mathematical Olympiad. Minsk: Belorussian association competition, 2006.
6. Воронович И.И., Мазаник С.А. 57-я Белорусская математическая олимпиада. Сборник задач. Минск: Белорусская ассоциация «Конкурс», 2007.
7. Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А., Скорняков Л.А., Шестаков И.П. Общая алгебра. Справ. матем. библ. Т. 1. М.: Наука, 1990.
8. Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Ч.1. Минск: Амалфея, 2001.
9. Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геметрия. Ч. 2. Минск: Амалфея, 2001.
10. Платонов В. П., Рапинчук А.С. Алгебраические группы и теория чисел. М.: Наука, 1991.
11. Рогановский Н.М., Рогановская Е.Н., Тавгень О.И. Геометрия. 8 кл. (2005 г.), 9 кл. (2006 г.), 10 кл. (2007 г.), 11 кл. (2004 г.), 12 кл (2005 г.). Минск: Народная асвета.
12. Супруненко Д.А. Разрешимые и нильпотентные группы. – Минск: БГУ, 1958.
13. Супруненко Д. А. Группы матриц. М.: Наука, 1972.
14. Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Перестановочные матрицы. Минск: Наука и техника, 1966.

15. Тавгень О.И., Тавгень А.И. Математика в задачах. Теория и методы решения. Ч. 1. Уравнения, неравенства, системы. Ч. 2. Планиметрия, стереометрия, текстовые задачи. Минск: Аверсэв, 2005 г.
16. Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Минск: Вышэйшая школа, 1975.
17. Беняш-Кривец В.В. О разложимости конечно порожденных групп в свободное произведение с объединенной подгруппой. // Матем. сборник. 2001. № 2. С. 3–26.
18. Беняш-Кривец В.В. Об альтернативе Титса для некоторых конечно порожденных групп. // Доклады НАН Беларуси. 2003. Т. 47, № 2. С. 29–32.
19. Beniash-Kryvets V.V. On Rosenberger's conjecture for generalized triangle groups of types (2,10,2) and (2,20,2). // Proceedings of the International Conference on Mathematics and its Application (ICMA 2004). Kuwait University. 2004. P. 59–74.
20. Beniash-Kryvets V.V., Barkovich O.A. On the Tits alternative for some generalized triangle groups. // Algebra and Discrete Mathematics. 2004. № 2. P. 15–35.
21. Беняш-Кривец В.В., Платонов В.П. S-единицы в гиперэллиптических полях. // Успехи матем. наук. 2007. Т. 62, вып. 4. С. 149–150.
22. Беняш-Кривец В.В., Платонов В.П.Группы S-единиц в гиперэллиптических полях. // Докл. РАН. 2007. Т. 417, №4. С. 1–5.
23. Беняш-Кривец В.В., Рапинчук А.С. Геометрическая теория представлений для фундаментальных групп компактных ориентируемых поверхностей. // Докл. АН СССР. 1993. Т. 329, № 1. С. 140–143.
24. Benyash-Krivetz V.V., Rapinchuk A.S., Chernousov V.I. Representation varieties of the fundamental groups of compact orientable surfaces. // Israel J. Math. 1996. V. 93. P. 29–71.
25. Беняш-Кривец В.В., Черноусов В.И. О многообразиях представлений фундаментальных групп поверхностей // Докл. РАН. 1997. Т. 355, № 4. С. 439–442.
26. Беняш-Кривец В.В., Черноусов В.И. Многообразия представлений фундаментальных групп компактных

неориентируемых поверхностей. // Матем. сборник. 1997. Т. 188, №7. С. 47–92.

27. Бондаренко А.А. К проблеме максимальности арифметических подгрупп в ортогональных группах типа B_n. // Матем. заметки. 1974. Т. 16, № 1. С. 151–161.
28. Бондаренко А.А. К классификации максимальных арифметических подгрупп в разложимых группах. // Матем. сб. 1977. Т. 102 (144), № 2. С. 155–172.
29. Бондаренко А.А. Классификация максимальных арифметических подгрупп неопределенных ортогональных групп типа B_l. // Матем. сб. 1985. Т. 127 (169). С. 72–91.
30. Бондаренко А.А. О проблеме максимальности арифметических подгрупп неопределенных ортогональных групп типа D_l. // Матем. сб. 1990. Т. 151, № 3. С. 388–401.
31. Бондаренко А.А. Строение группы аделей произведения алгебраических групп. // Матем. заметки. 1991. Т.50, № 2. С. 33-37.
32. Бондаренко А.А. Числа классов классических групп. // Матем. заметки. 2000. Т. 68, № 1. С. 49–56.
33. Бондаренко А.А. Критерий существования групповой структуры на двойных классах группы аделей. // Весці НАН Беларусі, сер. матем. 2001. № 2. С. 40–43.
34. Бондаренко А.А. Бирациональная композиция квадратичных форм. // Весці НАН Беларусі, сер. матем. 2007. № 4. С. 86–91.
35. Бондаренко А.А., Рапинчук А.С. К оценке числа двойных смежных классов групп аделей алгебраических групп. // ДАН БССР. 1978. Т. 22, № 5. С. 397–400.
36. Воронович И.И. Рациональные поля разложения центральных простых алгебр и унирациональность расслоений на коники. // ДАН БССР. 1986. Т. 30. С. 293–296.
37. Воронович И.И. Локально-глобальный принцип для алгебр над рациональными функциональными полями. // ДАН БССР. 1987. Т. 31, № 10. С. 877–880.
38. Гаращук М.С. К теории обобщенных нильпотентных групп. // ДАН БССР. 1960. Т. 4, № 7. С. 276–277.

39. Гаращук М.С. Локально нильпотентные подгруппы периодических линейных групп. // ДАН БССР. 1962. Т. 6, № 9. С. 545–547.
40. Гаращук М.С. Локально квазинильпотентные линейные группы. // Изв. АН БССР, сер.ф-м.наук. 1967. № 4. С. 5–6.
41. Гаращук М.С Метагамильтоновы линейные группы. // Вестник БГУ, сер.1. 1975. № 2. С. 89–90.
42. Жук И.К. О проблеме тождества для одного класса групп. // ДАН БССР. 1973. Т. 17. С. 1081–1084.
43. Жук И.К. Обобщенные системы Кокстера. // ДАН БССР. 1975. Т. 19. С. 485–487.
44. Жук И.К. Метод S-пар в комбинаторной теории групп. // Изв. АН БССР. 1977. № 2. С. 5–10.
45. Жук И.К. К вопросу о финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения. // ДАН БССР. 1979. Т. 23. С. 112–114.
46. Жук И.К. О рациональности некоторых однородных пространств группы $SO(q)$. // ДАН БССР. 1982. Т. 26. С. 773–775.
47. Залесский П.А., Мельников О.В. Подгруппы проконечных групп, действующих на деревьях. // Матем. сб. 1988. Т. 135, № 4. С. 419–439.
48. Залесский П.А., Мельников О.В. Фундаментальные группы графов проконечных групп. // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1, № 4. С. 117–135.
49. Залесский П.А., Тавгень О.И. Замкнутость орбит и финитная аппроксимируемость относительно сопряженности свободных амальгамированных произведений. // Матем. заметки. 1995. Т. 58, № 4. С. 525–535.
50. Каскевич В.И. Строение унитарных и ортогональных групп над гензелевыми дискретно нормированными алгебрами Адзумая. // ДАН БССР. 1987. Т. 31, № 12. С. 1073–1076.
51. Каскевич В.И. Нормальное строение специальной линейной группы над гензелевым телом с дискретным нормированием. // Вопросы алгебры. 1990. Т. 5. С. 17-28.

52. Козел П.Т. О вложении ортогональной группы над полем характеристики 2 в полную линейную группу. // Вестник БГУ, сер I. 1984. № 3. С. 45–47.
53. Козел П.Т. Строение элементов ортогональной группы четной степени над алгебраически замкнутым полем характеристики 2. // Вестник БГУ, сер I. 1991. № 3. С. 68–69.
54. Козел П.Т. Строение элементов ортогональной группы над алгебраически замкнутым полем характеристики 2. // Вестник БГУ, сер I. 1995. № 3. С. 69–71.
55. Курсов В.В. Коммутаторы мультипликативной группы конечномерного центрального тела. // ДАН БССР. 1982. Т. 26, № 2.
56. Курсов В.В. О коммутаторной длине групп Шевалле над полем. // ДАН БССР. 1985. Т. 29, № 1.
57. Курсов В.В. Обобщенные скрещенные произведения алгебр. // Вестник БГУ, сер. I. 1998. № 1. С. 47–49.
58. Курсов В.В., Янчевский В.И. Скрещенные произведения простых алгебр и их групп автоморфизмов. // ДАН БССР. 1988. Т. 32, № 9.
59. Матейко О.М., Тавгень О.И. Линейность групп автоморфизмов относительно свободных групп. // Матем. заметки. 1995. Т. 58, № 3. С. 465–467.
60. Матейко О.М., Тавгень О.И. Линейные представления групп автоморфизмов свободных групп. // Вопросы алгебры. 1997. Т. 11. С. 48–59.
61. Матейко О.М., Тавгень О.И. Свободные произведения циклических подгрупп в группе $SL_2(\mathbb{C})$. // Матем. заметки. 2000. Т. 67, № 6. С. 922–930.
62. Мельников О.В. Условия компактности для групп автоморфизмов топологических групп. // Матем.заметки. 1976. Т. 19, № 5. С. 735–743.
63. Мельников О.В. Конгруэнц-ядро группы $SL_2(\mathbb{Z})$. // ДАН СССР. 1976. Т. 228, № 5. С. 1034–1036.
64. Мельников О.В. Связная компонента группы автоморфизмов локально компактной группы. // Матем. сб. 1977. Т. 102, № 2. С. 248–259.
65. Мельников О.В. Нормальные делители свободных проконечных групп. // Изв.АН СССР. 1978. Т. 42, № 1. С. 3–25.

66. Мельников О.В. Характеризация достижимых подгрупп свободных проконечных групп. // // ДАН БССР. 1978. Т. 22, № 8. С. 677–680.
67. Мельников О.В. Прективные пределы свободных проконечных групп. // ДАН БССР. 1980. Т. 24, № 11. С. 968–970.
68. Мельников О.В. Характеристические подгруппы и автоморфизмы свободных проконечных групп. // Матем.заметки. 1982. Т. 31, № 3. С. 339-348.
69. Мельников О.В. Про-*p*-группы конечной когомологической размерности. // ДАН БССР. 1985. Т. 29, № 12. С. 1076–1078.
70. Мельников О.В. Произведение степеней и коммутаторов в свободных про-р-группах. // Матем.заметки. 1986. Т. 40, № 3. С. 433-441.
71. Мельников О.В. Подгруппы и гомологии свободных произведений проконечных групп. // Изв.АН СССР. 1989. Т. 53, № 1. С. 97-120.
72. Мельников О.В. Факторгруппы проконечных групп с двойственностью Пуанкаре. // Вести НАН Беларуси, сер. физ.-мат. наук. 1996. № 3. С. 54–58.
73. Мельников О.В. Неразложимость минимальных идемпотентов полугруппы формаций. // Вопросы алгебры. 1996. № 9. С. 42–47.
74. Мельников О.В. Проконечные группы с конечно порожденными силовскими подгруппами. // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 6. С. 34–37.
75. Мельников О.В., Нестерович Т.В. Некоторые свойства полугруппы формаций как топологической полугруппы. // Вопросы алгебры. 1997. № 11. С. 68–75.
76. Мельников О.В. Конечно порожденные подгруппы свободных проконечных групп и некоторых групп Галуа. // Матем. заметки. 1998. Т. 64, № 1. С. 95–106.
77. Мельников О.В. О свободном произведении абсолютных групп Галуа. // Сибирский мат. журн. 1999. Т. 40, №1. С. 113–118.
78. Мельников О.В. Про-р-группы, почти свободно действующие на двумерных асферических комплексах. // Докл.НАН Беларуси. 2002. Т. 45, №5. С. 48–50.
79. Мельников О.В. Асферические про-*p*-группы. // Матем. сб. 2002. Т. 193, № 11. С. 71–104.
80. Мельников О.В., Тавгень О.И. Абсолютная группа Галуа launch гензелева поля. // ДАН БССР. 1985. Т. 29, № 7. С. 581–583.

81. Мельников О.В., Шаромет А.А. Группа Галуа многомерного локального поля положительной характеристики. // Матем. сб. 1989. Т. 180, № 8. С. 1132–1147.
82. Мельников О.В., Шишкевич А.А. Про-p-группы с виртуальной двойственностью Пуанкаре размерности 2. // Докл.НАН Беларуси. 2002. Т. 46, №1. С. 13–15.
83. Нисневич В. Л. О группах, изоморфно представимых матрицами над коммутативным полем. // Матем. сб. 1940. Т. 8. С. 395–404.
84. Петрова Г.Л. О неприводимости порождающих множеств полиэдральных полугрупп. // Вестник БГУ, сер. I. 1987. № 3. С. 58-61.
85. Петрова Г.Л. Нижняя граница мощности кодов, близких к равновесным. // Вестник БГУ, сер. I. 1989. № 1. С. 32-34.
86. Платонов В. П. Периодические и компактные подгруппы топологических групп. // Сибирский матем. ж. 1966. Т. 7. С. 854–877.
87. Платонов В. П. О некоторых классах топологических групп. // Сибирский матем. ж. 1966. Т. 7. С. 1095–1105.
88. Платонов В. П. Локально проективно нильпотентные подгруппы и нильэлементы в топологических группах. // Изв. АН СССР. 1966. Т. 30. С. 1257–1274.
89. Платонов В.П. Теория алгебраических линейных групп и периодические группы. // Изв. АН СССР, сер. матем. 1966. Т. 30, № 3. С. 573–620.
90. Платонов В.П. Подгруппа Фраттини линейных групп и финитная аппроксимируемость. // ДАН СССР. 1966. Т. 171. С. 798–801.
91. Платонов В.П. Доказательство гипотезы конечности для разрешимых подгрупп алгебраических групп. // Сиб. матем. журн. 1969. Т. 10. № 5. С. 1084–1098.
92. Платонов В.П. Проблема сильной аппроксимации и гипотеза Кнезера — Титса для алгебраических групп. // Изв. АН СССР, сер. матем. 1969. Т. 33. С. 1211–1219.
93. Платонов В. П. К проблеме максимальности арифметических групп. // ДАН СССР. 1971. Т. 200. С. 530–533.

94. Платонов В. П. Гипотеза Дьедонне и несюръективность накрытий алгебраических групп на k-точках. // ДАН СССР. 1974. Т. 216, № 5. С. 986–989.

95. Платонов В. П. Проблема Таннака—Артина и приведенная K-теория. // Изв. АН СССР, сер. матем. 1976. Т. 40. С. 227–261.

96. Платонов В.П., Беняш-Кривец В.В. Кольца характеров представлений конечно-порожденных групп. // Труды МИАН СССР им. В.А.Стеклова. 1990. Т.183. С. 169–178.

97. Платонов В. П., Бондаренко А.А., Рапинчук А.С. Числа и группы классов алгебраических групп. I. // Изв. АН СССР. 1979. Т. 43, № 3. С. 603–627.

98. Платонов В. П., Бондаренко А.А., Рапинчук А.С. Числа и группы классов алгебраических групп. I. // Изв. АН СССР. 1980. Т. 44, № 2. С. 395–414.

99. Платонов В.П., Тавгень О.И. О проблеме Гротендика о проконечных пополнениях групп. // ДАН СССР. 1986. Т. 288. С. 1054–1058.

100. Платонов В.П., Тавгень О.И. Grothendiek's problem on profinite completions and representations of groups. // K-Theory. 1990. V. 4, No. 1. P. 89–101.

101. Платонов В.П., Шаромет А.А. О конгруэнц-проблеме для линейных групп над арифметическими кольцами. // ДАН БССР. 1972.Т. 16, № 5. С. 393–396.

102. Платонов В.П., Янчевскнй В.И. О гипотезе Хардера. // ДАН СССР. 1975. Т. 221, № 4. С. 784–787.

103. Супруненко Д. А. Примитивные разрешимые группы подстановок. // Матем. сб. 1947. Т. 20. С. 331–350.

104. Супруненко Д. А., Гаращук М.С. Линейные группы с категорией. // ДАН БССР. 1962. Т. 6. С. 411–414.

105. Супруненко Д. А., Гаращук М.С. Линейные группы с условием Энгеля. // ДАН БССР. 1962. Т. 6. С. 277–280.

106. Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Приводимые локально нильпотентные линейные группы. // Изв. АН СССР, сер. матем. 1960. Т. 24. С. 787–806.

107. Тавгень О.И. Проблема Гротендика в классе разрешимых групп. // ДАН БССР. Т. 31, № 10. С. 873–876.

108. Тавгень О.И. О гипотезах Гротендика и Платонова. // ДАН БССР. 1988. Т. 32, № 6. С. 489–492.

109. Тавгень О.И. Конечная ширина арифметических подгрупп групп Шевалле ранга ≥ 2. // ДАН СССР. 1990. Т. 310, № 4. С. 802–806.

110. Тавгень О.И. Ограниченная порождаемость групп Шевалле над кольцами S-целых алгебраических чисел. // Изв. АН СССР, сер. матем. 1990. Т. 54, № 1. С. 97–122.

111. Тавгень О.И. Неарифметичность групп $\mathrm{Aut}\, F_n$ и $\mathrm{Out}\, F_n$. // ДАН БССР. 1991. Т. 35, № 1. С. 5–8.

112. Тавгень О.И. Амальгамы линейных групп и свойство Артина-Риса. // Докл. РАН. 1993. Т. 328, № 2. С. 153-156.

113. Тавгень О.И. Ограниченная порождаемость конгруэнц-подгрупп групп Шевалле над кольцами целых алгебраических чисел. // Докл. НАН Беларуси. 1993. Т. 37, № 5. С. 12–15.

114. Тавгень О.И., Самсонов Ю.Б. Унипотентность образа представления $F_2(x, y)$ матрицами из $GL(n, C)$, $n = 2, 3, 4$, при условии отображения образующих и примитивных элементов в унипотентные матрицы. // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45, № 6. С. 29–32.

115. Тишин Ю.В. Нормальные подгруппы свободных конструкций. // Матем. сб. 1985. Т. 126(168), № 3. С. 377–396.

116. Тишин Ю.В. Подгруппы, удовлетворяющие тождеству в одном классе абстрактных групп. // Матем. сб. 1990. Т. 181, № 11. С. 1525–1542.

117. Шаромет А.А. Абстрактные изоморфизмы разрешимых алгебраических групп. // ДАН СССР. 1975. Т. 223. С. 53–55.

118. Шаромет А.А. Группы автоморфизмов алгебраических групп. // Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук. 1976. № 3. С. 5–11.

119. Шаромет А.А. Абстрактные изоморфизмы разрешимых алгебраических групп. // Вестник БГУ, сер. I. 1984. № 1. С. 63–65.

120. Шаромет А.А. Конгруэнц-проблема для разрешимых алгебраических групп над глобальными полями положительной характеристики. // ДАН БССР. 1987. Т. 31. С. 201–204.

121. Шаромет А.А. Об абсолютной группе Галуа гензелева поля. // Вопросы алгебры. 1995. Т. 8. С. 164–169.