БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.925.51+519.216.73

КАЧАН
Илья Вадимович

Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Минск, 2020

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель — **Васьковский Максим Михайлович**,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики факультета
прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Егоров Александр Дмитриевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник
отдела нелинейного и стохастического анализа
ГНУ «Институт математики НАН Беларуси»;

Яблонский Олег Леонидович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры функционального анализа и
аналитической экономики
механико-математического факультета
Белорусского государственного университета.

Оппонирующая организация — Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины».

Защита состоится 13 марта 2020 г. в 10.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407.

Телефон ученого секретаря: (+375-17) 209-55-58, e-mail: yauhen.radyna@gmail.com.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан «10» февраля 2020 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Д 02.01.07,
кандидат физико-математических наук,
доцент Е.М. Радыно

ВВЕДЕНИЕ

Под стохастическим дифференциальным уравнением понимают выражение следующего вида

$$dX(t,\omega) = f(t,\omega, X(t,\omega))dt + g(t,\omega, X(t,\omega))dB(t,\omega),$$

в котором $B(t,\omega)$ — стандартное или дробное броуновское движение. Формализм приведенной записи заключается в том, что ввиду недифференцируемости траекторий процесса $B(t)$ выражение $dB(t)$ лишено смысла. Поэтому данное уравнение понимают в интегральном смысле, где интеграл по dt является интегралом Бохнера при каждом фиксированном ω, а способ определения интеграла по dB зависит от свойств процесса $B(t)$. Можно выделить три основных подхода к определению интегралов по дробному броуновскому движению: потраекторные интегралы (Янга (1936), Губинелли (2004)), стохастические интегралы (Ито (1944), Стратоновича[1], θ- и μ-интегралы[2]) для стандартного броуновского движения и интегралы Вика-Ито-Скорохода[3], основанные на дифференцировании процесса $B(t)$ в пространствах обобщенных функций специального вида.

Первый подход осуществляет построение детерминированной теории интегрирования, игнорирующей вероятностную структуру процесса $B(t,\omega)$. Наиболее естественно определять интеграл по $dB(t,\omega)$ как потраекторный предел интегральных сумм Римана-Стилтьеса при каждом фиксированном ω. Из работ Л. Янга (1936) и М. Сале (1998) следует, что такое определение корректно лишь в случае, когда показатель Харста H больше $1/2$.

Для того, чтобы охватить случай $H \leq 1/2$, обеспечив потраекторную сходимость интегральных сумм Римана-Стилтьеса, оказывается необходимым привлечение дополнительных слагаемых в указанные суммы. Такая идея приводит нас к подходу, впервые примененному Т. Лайонсом (1998) и развившемуся в так называемую теорию грубых траекторий в 90-х гг. прошлого века. В настоящее время теория грубых траекторий и ее приложения к дробному броуновскому движению является молодой и активно развивающейся областью математики. Различным ее аспектам, в частности, посвящены ра-

[1]Оксендаль, Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. — М. : Мир, 000 «Издательство АСТ», 2003. — 408 с.

[2]Лазакович, Н.В. Предельное поведение итовских конечных сумм с осреднением / Н.В. Лазакович, О.Л. Яблонский // Теория вероятностей и ее применения. — 2005. — Т. 50, Вып. 4. — С. 711–732.

[3]Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications / F. Biagini [et al.]. — London : Springer-Verlag, 2008. — 330 p.

боты М. Губинелли (2004, 2010), П. Фрица, Н. Виктуа (2010), А. Ноенкирха (2009), Ф. Бадуэна (2007), М. Хайрера (2014).

Теория стохастических дифференциальных уравнений со стандартным броуновским движением, в том числе в бесконечномерных пространствах, является глубоко развитой, ей посвящены монографии И.И. Гихмана, А.В. Скорохода (1968, 1977), Б. Оксендаля (2003), А.А. Левакова, М.М. Васьковского (2009, 2019), Р. Хасьминского (2012), Дж. Да Прато (1992), Л. Гаварецкого, В. Мандрэкара (2011).

Наряду с уравнениями, содержащими исключительно дробные броуновские движения $B^{(H)}(t)$, и уравнениями, содержащими только стандартное броуновское движение $W(t)$, активно развивается теория для уравнений смешанного типа, в которой сочетаются теория интегрирования Ито для процессов $W(t)$ и теория потраекторного интегрирования Янга для процессов $B^{(H)}(t)$, $H > 1/2$. Впервые такие уравнения были рассмотрены К. Кубилюсом (2002), и далее получили свое развитие в работах Д. Нуаларта и Ж. Гуэрры (2008), Г. Шевченко и Ю. Мишуры (2011, 2014) и др. Интерес к данным уравнениям вызван их многочисленными приложениями в финансовой сфере, где их использование позволяет получить более гибкие модели, позволяющие учитывать долговременную память исследуемых процессов.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Исследования проводились в рамках следующих госбюджетных тем:

— Анализ структуры решений стохастических, дифференциальных и дифференциально-алгебраических систем (в рамках проекта «Асимптотические спектры дифференциальных систем», 2011 — 2015 гг., номер госрегистрации 20111922);

— Асимптотические свойства решений обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах (2014 — 2016 гг., договор с БРФФИ № Ф14М-020, номер госрегистрации 20142883);

— Анализ асимптотических свойств решений дифференциальных и алгебраических систем (2016 — 2020 гг., номер госрегистрации 20162496).

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является исследование общих и асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными

броуновскими движениями. *Задачи диссертации* — доказательство теоремы существования, теоремы о непрерывной зависимости от начальных данных, теорем об устойчивости и притяжении решений, а также разработка методов интегрирования и получение асимптотических разложений для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями.

Объектом исследования являются стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями, имеющими различные показатели Харста. *Предмет исследования* — общая и асимптотическая теория стохастических дифференциальных уравнений.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми в теории стохастических дифференциальных уравнений.

Построена теория стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие $1/3$. Для нелинейных уравнений, со сносом и дробными броуновскими движениями с различными индексами Харста, большими $1/3$, получены следующие результаты:

— доказана формула замены переменных,

— доказана теорема о непрерывной зависимости в среднем от начальных условий и правых частей решений указанных уравнений,

— получены асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий функционалов от решений указанных уравнений,

— получено обобщение обратного уравнения Колмогорова для математических ожиданий функционалов от решений указанных уравнений в коммутативном случае.

В диссертации построены некоторые методы интегрирования уравнений смешанного типа, содержащих стандартное и дробное броуновское движение с индексом Харста, большим $1/2$.

Получены новые результаты об устойчивости нелинейных стохастических уравнений в гильбертовых пространствах. Для неавтономных нелинейных уравнений с разрывными коэффициентами в конечномерных пространствах доказана теорема об асимптотической устойчивости по вероятности слабого нулевого решения по линейному приближению. Для нелинейных стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах с

коэффициентами, удовлетворяющими локальному условию Липшица, доказана теорема о притяжении слабых решений к нулю.

Положения, выносимые на защиту

Формула замены переменных и теорема о непрерывной зависимости от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста.

Асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста.

Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа, основанные на приведении к простейшим уравнениям, линейным неоднородным уравнениям и переходе к уравнению Стратоновича.

Теорема об асимптотической устойчивости системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито с разрывными коэффициентами по нестационарному линейному приближению. Достаточные условия притяжения к нулю слабых решений нелинейного стохастического дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве с нелипшициевыми коэффициентами.

Личный вклад соискателя ученой степени

Результаты, включенные в диссертацию и выносимые на защиту, получены лично автором диссертации. Научному руководителю принадлежат постановка задачи, выбор методов исследования и обсуждение результатов. Кроме того, научному руководителю принадлежит общая идея построения потраекторного интеграла для уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста [5], в то время как диссертантом были реализованы формулировки и доказательства соответствующих утверждений. Также в работе приводятся формулировки теорем 5.1, 5.2, авторство которых принадлежит Я.Б. Задворному [1]. Утверждения указанных теорем используются при доказательстве теоремы 5.3 в качестве ссылок на известные результаты.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты работы докладывались и обсуждались на 8-м международном научном семинаре (воркшопе) «Аналитические методы анализа и

дифференциальных уравнений» (АМАДЕ–2015) (Минск, 2015), на шестых Богдановских чтениях по обыкновенным дифференциальным уравнениям (Минск, 2015), на XII Белорусской математической конференции (Минск, 2016), на XII международной научно-технической конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» (Пенза, Россия, 2017), на XVII, XVIII, XIX международных научных конференциях по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2017, 2018, 2019» (Минск, 2017; Гродно, 2018; Могилев, 2019), на международной научной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», посвященной 100-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина (Минск, 2018), на 74-й и 75-й научных конференциях студентов и аспирантов БГУ (Минск, 2017, 2018).

Опубликование результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 15 научных работах, из которых: 6 статей в научных изданиях в соответствии с п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 5,3 авторского листа), среди которых 3 статьи в журналах, входящих в наукометрические базы данных Scopus и Web of Science, 1 статья в других научных изданиях, 6 статей в сборниках материалов научных конференций, 2 тезисов докладов на международных научных конференциях.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня сокращений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, пяти глав, заключения и библиографического списка. Полный объем диссертации составляет 124 страницы. Библиографический список содержит 91 наименование, включая собственные публикации соискателя ученой степени.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В первой главе приводится обзор литературных источников по теме диссертации.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию общих свойств стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста, большими 1/3.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, на котором

определены независимые одномерные дробные броуновские движения $B_t^{(1)},\dots,B_t^{(d)}$ с индексами Харста $H_1,\dots,H_d \in (1/3,1)$. Введем обозначение $B_t = (B_t^{(0)},\dots,B_t^{(d)})^\top$ для $(d+1)$-мерного дробного броуновского движения, в котором $B_t^{(0)} = t$. Пусть также $H_0 = 1$. Пусть $H_{\min}$ — значение наименьшего из индексов Харста H_i, $i = 0,\dots,d$. Выберем и зафиксируем некоторое $H \in (1/3, 1/2]$ такое, что $H < H_{\min}$.

Объектом изучения второй главы является следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = f(X_t)dB_t,\ t \in [0,T], \tag{1}$$

в котором f — $(n \times (d+1))$-матрица, столбцами которой являются векторы $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0,\dots,d$. Через X_t^x будем обозначать решение уравнения (1) с начальным условием $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$.

Для определения решения уравнения (1) потребуются некоторые понятия теории грубых траекторий[4]. Пусть U, V, W — конечномерные банаховы пространства над полем $\mathbb{R}$. Множество функций $Z\colon [0,T] \to W$, непрерывных по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0,1]$, будем обозначать через $C^\alpha([0,T],W)$, а их коэффициент непрерывности — через $\|Z\|_\alpha = \sup\limits_{s,t\in[0,T]:s\neq t} \frac{|Z_t - Z_s|_W}{|t-s|^\alpha}$.

Через $C_2^\alpha([0,T]^2,U)$ будем обозначать множество функций двух переменных $R(s,t) = R_{s,t}$, для каждой из которых существует константа C такая, что $|R_{s,t}| \le C|t-s|^\alpha$ для всех $(s,t) \in [0,T]^2$. Наименьшую такую константу для функции R будем обозначать через $\|R\|_\alpha = \sup_{s,t\in[0,T]:s\neq t} \frac{|R_{s,t}|_U}{|t-s|^\alpha}$. Отметим также, что если $Z \in C^\alpha([0,T],W)$ — непрерывная по Гельдеру функция одной переменной, то ее приращения $(s,t) \mapsto Z_t - Z_s$ принадлежат множеству $C_2^\alpha([0,T]^2,W)$. Поэтому обозначение $Z_{s,t} = Z_t - Z_s$ будет также использоваться для приращений функции одной переменной Z_t, $t \in [0,T]$.

Пусть далее $\alpha \in (1/3,1/2]$.

Говорят, что для функции $Z\colon [0,T] \to W$ функция $\mathbb{Z}\colon [0,T]^2 \to W \otimes W$ является процессом второго порядка над Z, если она удовлетворяет тождеству Чена $\mathbb{Z}_{s,t} - \mathbb{Z}_{s,u} - \mathbb{Z}_{u,t} = Z_{s,u} \otimes Z_{u,t}$ для любой тройки $(s,u,t) \in [0,T]^3$.

Под множеством α-непрерывных по Гельдеру грубых траекторий над W (обозначаемым $\mathscr{C}^\alpha([0,T],W)$) понимают множество всех пар $(Z,\mathbb{Z})$ таких, что функция $Z \in C^\alpha([0,T],W)$ и $\mathbb{Z}$ является процессом второго порядка над Z, удовлетворяющим условию $\|\mathbb{Z}\|_{2\alpha} < \infty$.

[4]Friz, P. A Course on Rough Paths with an introduction to regularity structures / P. Friz, M. Hairer. — Cham : Springer International Publishing AG, 2014. — 262 p.

Говорят, что функция $Y \in C^\alpha([0,T],\mathcal{L}(W,V))$ управляется функцией $Z \in C^\alpha([0,T],W)$, если существует $Y' \in C^\alpha\big([0,T],\mathcal{L}(W,\mathcal{L}(W,V))\big)$ (называемое производной Губинелли Y), такое, что остаток $R^Y_{s,t} = Y_{s,t} - Y'_s Z_{s,t}$ удовлетворяет неравенству $\|R^Y\|_{2\alpha} < +\infty$. Множество всех (Y,Y') таких, что Y управляется Z, будем обозначать $\mathcal{D}^{2\alpha}_Z([0,T],\mathcal{L}(W,V))$.

Пусть $(Z,\mathbb{Z}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],W)$, а также $(Y,Y') \in \mathcal{D}^{2\alpha}_Z([0,T],\mathcal{L}(W,V))$. Потраекторным интегралом Губинелли Y по Z называют предел интегральных сумм

$$\int_0^T Y_t\,dZ_t = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i,t_{i+1}\in\mathcal{P}} (Y_{t_i} Z_{t_i,t_{i+1}} + Y'_{t_i}\mathbb{Z}_{t_i,t_{i+1}}),$$

где $|\mathcal{P}| = \max|t_{i+1}-t_i|$ — диаметр разбиения $\mathcal{P} = \{0=t_0<t_1<\ldots<t_l=T\}$, а предел понимается не зависящим от последовательности разбиений $\mathcal{P}$.

Приведем конструктивное определение процесса второго порядка над дробным броуновским движением B.

Определение 2.1. Процессом второго порядка над дробным броуновским движением B будем называть процесс $\mathbb{B}\colon [0,T]^2\times\Omega \to \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$, определенный следующими равенствами:

$$\mathbb{B}_{s,t} = \left(\mathbb{B}^{(i,j)}_{s,t}\right)^d_{i,j=0},$$

$$\mathbb{B}^{(i,j)}_{s,t} \overset{L^2}{=} \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\int_{\mathcal{P}} B^{(i)}_{s,r}dB^{(j)}_r, \quad \int_{\mathcal{P}} B^{(i)}_{s,r}dB^{(j)}_r = \sum_{t_k,t_{k+1}\in\mathcal{P}} B^{(i)}_{s,t_k}B^{(j)}_{t_k,t_{k+1}}, \quad 1\le i<j\le d,$$

$$\mathbb{B}^{(0,j)}_{s,t} = \int_s^t B^{(j)}_{s,r}dr \overset{\text{п.н.}}{=} \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{t_k,t_{k+1}\in\mathcal{P}} B^{(j)}_{s,t_k}(t_{k+1}-t_k), \quad 1\le j\le d,$$

$$\mathbb{B}^{(i,i)}_{s,t} = \frac{1}{2}\left(B^{(i)}_{s,t}\right)^2, \quad 0\le i\le d,$$

$$\mathbb{B}^{(i,j)}_{s,t} = -\mathbb{B}^{(j,i)}_{s,t} + B^{(i)}_{s,t}B^{(j)}_{s,t}, \quad 0\le j<i\le d$$

для любой пары $(s,t)\in[0,T]^2$, где $\mathcal{P} = \{s = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = t\}$ — произвольное разбиение отрезка $[s,t]$, $|\mathcal{P}| = \max|t_{k+1}-t_k|$, а все пределы понимаются не зависящими от последовательности разбиений $\mathcal{P}$. Здесь обозначения $\overset{L^2}{=}$, $\overset{\text{п.н.}}{=}$ применяются для того, чтобы показать, что соответствующие пределы понимаются в смысле $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ и $\mathbb{P}=1$ соответственно.

Определение 2.2. Случайный процесс X_t такой, что $(X,X')\in$ $\in \mathcal{D}^{2H}_B([0,T],\mathbb{R}^n)$ п.н., будем называть решением уравнения (1), если он п.н.

удовлетворяет равенству

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)dB_s, \quad t \in [0,T],$$

где интеграл понимается как потраекторный интеграл Губинелли. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Решение уравнения (1) с начальным условием $X_0 = x$ будем называть п.н. единственным, если для любого другого решения Y_t уравнения (1) с начальным условием $Y_0 = x$ выполняется равенство $\mathbb{P}(X_t = Y_t \ \forall t \in [0,T]) = 1$.

Через $C_b^k(V,U)$ будем обозначать пространство функций $\varphi\colon V \to U$, имеющих непрерывные и ограниченные производные до порядка k включительно с нормой $\|\varphi\|_{C_b^k} = \sum_{j=0}^k \|D^j\varphi\|_\infty$, где $\|D^j\varphi\|_\infty = \sup_{x\in V}|D^j\varphi(x)|$. Следующая теорема дает достаточное условие существования и единственности решения уравнения (1).

Теорема 2.1.[5] [5, 15]. *Если $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, то для любого $x \in \mathbb{R}^n$ уравнение (1) имеет единственное решение с начальным условием $X_0 = x$, причем $X' = f(X)$, $(f(X),(f(X))') \in \mathcal{D}_B^{2H}([0,T],\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$ п.н. Более того, если $H_i > H^* \geq 1/2$ для всех $i = 0,\dots,d$, то справедливо включение $X \in C^{H^*}([0,T],\mathbb{R}^n)$ п.н. и интеграл в определении решения уравнения (1) является потраекторным интегралом Янга.*

Следующие две теоремы являются основными результатами второй главы.

Теорема 2.2. [5, 10]. *Пусть $f \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $g \in C_b^3(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Тогда для любых s, $t \in [0,T]$ п.н. справедлива следующая формула замены переменных:*

$$g(X_t) = g(X_s) + \int_s^t Dg(X_r)f(X_r)dB_r, \qquad s,t \in [0,T], \tag{2}$$

где X_t — решение уравнения (1).

Наряду с уравнением (1) рассмотрим аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\widetilde{X}_t = \widetilde{f}(\widetilde{X}_t)dB_t, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

в котором $\widetilde{f}$ — $(n \times (d+1))$-матрица, столбцами которой являются векторы $\widetilde{f}_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0,\dots,d$.

[5] Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations / A. Neuenkirch [et al.] // Annales de I Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. — 2009. — Vol. 45, № 1. — P. 157–174.

Теорема 2.3. [2, 7, 12]. *Пусть* $f, \widetilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, *причем функция* $\widetilde{f}$ *такова, что* $\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \le 1$. *Обозначим через* X_t, $\widetilde{X}_t$ *решения уравнений* (1), (3) *с начальными условиями* $X_0 = \xi$, $\widetilde{X}_0 = \widetilde{\xi}$ *соответственно. Тогда:*

1) *почти наверное справедлива следующая оценка*

$$\|X - \widetilde{X}\|_H \le C\left(|\xi - \widetilde{\xi}| + \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\right) \tag{4}$$

для некоторой случайной величины $C = C(H, T, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$. *Причем* C *может быть выбрана не зависящей от* T, *если* $T \in (0,1]$;

2) *имеет место следующее неравенство*

$$\mathbb{E}\big(\ln \|X - \widetilde{X}\|_H\big) \le C + \ln\big(\mathbb{E}|\xi - \widetilde{\xi}| + \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\big), \tag{5}$$

где $C = C(H, H_1, \ldots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}) \in \mathbb{R}$ — *константа, вообще говоря, зависящая от* H, $H_1, \ldots, H_d$, T, $\|f\|_{C_b^3}$.

Третья глава диссертации посвящена исследованию асимптотических разложений математических ожиданий функционалов от решений уравнения (1). Будем придерживаться следующих компактных записей:

$$\Delta^k[0,t] = \{(t_1, \ldots, t_k) \in [0,t]^k : \ 0 \le t_1 < \ldots < t_k \le t\}, \tag{6}$$

$$\int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} = \int_0^t \int_0^{t_k} \ldots \int_0^{t_2} dB_{t_1}^{(i_1)} \ldots dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} dB_{t_k}^{(i_k)}, \tag{7}$$

$$I_k = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}_d^k := \{0, \ldots, d\}^k, \tag{8}$$

$$D_f^{(i)} = \sum_{j=1}^n f_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \ i \in \{0, \ldots, d\}, \qquad D_f^{(I_k)} = D_f^{(i_1)} \ldots D_f^{(i_k)}, \tag{9}$$

$$\mathbf{P}_t g(x) = \mathbb{E}\, g(X_t^x), \quad t \ge 0. \tag{10}$$

Основной результат третьей главы представлен следующей теоремой.

Теорема 3.1. [4, 5]. *Пусть* $f \in C_b^{N+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $g \in C_b^{N+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого фиксированного* $H \in (1/3, 1/2]$ *такого, что* $H < H_{\min} = \min\limits_{i=0,\ldots d} H_i$ *справедливо следующее асимптотическое разложение:*

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{I_k \in \{0,\ldots,d\}^k} t^{|H_{I_k}|} \cdot (D_f^{(I_k)} g)(x)\, \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)}\right) + O(t^{(N+1)H}), \tag{11}$$

при $t \to 0$, *где* $|H_{I_k}| = H_{i_1} + H_{i_2} + \ldots + H_{i_k}$ — *сумма индексов Харста дробных броуновских движений* $B^{(i_1)}, B^{(i_2)}, \ldots, B^{(i_k)}$.

Четвертая глава диссертации посвящена получению методов интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ заданы d-мерное стандартное броуновское движение $W(t)$ и d-мерное дробное броуновское движение $B(t)$ с показателем Харста $H \in (1/2,1)$.

Объектом изучения четвертой главы является стохастическое дифференциальное уравнение смешанного типа

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dW(t) + \sigma(t,x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{12}$$

где $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\sigma\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — детерминированные функции.

Определение 4.1. Под решением уравнения (12) понимаем процесс $x(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, согласованный с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, порожденным процессами $W(t)$ и $B(t)$, такой, что существует $\alpha > 1 - H$ такое, что процесс $x(t)$ имеет п.н. непрерывные по Гельдеру с показателем α траектории, и для любого $t \in \mathbb{R}^+$ п.н. выполняется равенство

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s,x(s))ds + \int_0^t g(s,x(s))dW(s) + \int_0^t \sigma(s,x(s))dB(s),$$

где интеграл по процессу $W(t)$ – стохастический интеграл Ито, а интеграл по процессу $B(t)$ – потраекторный интеграл Янга[6].

Далее будем считать, что коэффициенты рассматриваемых уравнений (12) удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование и единственность решений[7], а также возможность применения формулы замены переменных (Ю.С. Мишура[8], с. 184).

Будем рассматривать одномерное уравнение (12), считая, что $d = 1$. Вместе с ним рассмотрим простейшее уравнение

$$dy(t) = u(t)dt + v(t)dW(t) + b(t)dB(t), \quad t \geq 0. \tag{13}$$

---

[6]Guerra, J. Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion / J. Guerra, D. Nualart // Stochastic Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 26, № 5. — P. 1053–1075.

[7]Mishura, Y.S. Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index H > 1/2 / Y.S. Mishura, G.M. Shevchenko // Communications in Statistics — Theory and Methods. — 2011. — Vol. 40, № 19—20. — P. 3492—3508.

[8]Mishura, Y.S. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes / Y.S. Mishura. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2008. — 398 p.

Решение уравнения (13) определяется следующим соотношением:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t u(\tau)d\tau + \int_0^t v(\tau)dW(\tau) + \int_0^t b(\tau)dB(\tau), \quad t \geq 0.$$

Теорема 4.1. [6, 13]. *Пусть функции f, g, σ непрерывны вместе с производными f'_x, g'_t, g'_x, g''_{x^2} и $g(t,x) \neq 0$. Уравнение (12) приводимо к уравнению (13) с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно x преобразования $y = F(t,x)$ тогда и только тогда, когда функции $r(t,x), q(t,x)$, определенные соотношениями*

$$r(t,x) := g(t,x)\left(\frac{g'_t(t,x)}{g^2(t,x)} + \left(\frac{f(t,x)}{g(t,x)}\right)'_x + \frac{1}{2}g''_{x^2}(t,x)\right), \tag{14}$$

$$q(t,x) := \frac{\sigma(t,x)}{g(t,x)}, \tag{15}$$

не зависят от x.

Далее рассмотрим одномерное автономное уравнение

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) + \sigma(x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{16}$$

и будем исследовать наличие автономной замены $y = F(x)$, приводящей указанное уравнение к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = (\alpha_1 y(t) + \alpha_2)dt + (\beta_1 y(t) + \beta_2)dW(t) + (\gamma_1 y(t) + \gamma_2)dB(t), \; t \geq 0 \tag{17}$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.2. [6, 13]. *Пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^3(\mathbb{R})$, $\sigma \in C(\mathbb{R})$ и $g(x) \neq 0$. Пусть также функция $A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}$ такова, что $A'(x) \neq 0$. Уравнение (16) приводимо к уравнению (17) с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно x преобразования $y = F(x)$ тогда и только тогда, когда функции $c_1(x), c_2(x)$, определенные соотношениями*

$$c_1(x) := \frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)}, \tag{18}$$

$$c_2(x) := \frac{\sigma(x)}{g(x)}, \tag{19}$$

не зависят от x.

Вернемся к уравнению (12) в пространстве $\mathbb{R}^d$ и вместе с ним рассмотрим соответствующее уравнение Стратоновича

$$dx(t) = (f(t,x(t)) - c(t,x(t)))dt + g(t,x(t)) \circ dW(t) + \sigma(t,x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{20}$$

в котором $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\sigma\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $c\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ и

$$c_i(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial g_{ij}(t,x)}{\partial x_k} g_{kj}(t,x), \quad i = 1,\dots,d.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. [6, 13]. *Пусть функции f и g непрерывны вместе с производными $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, а функция σ удовлетворяет (α,β)-условию Гельдера по (t,x) для некоторых $\alpha > 1 - H$, $\beta > 2 - 2H$. Процесс $x(t)$ является решением уравнения (12) тогда и только тогда, когда процесс $x(t)$ является решением уравнения Стратоновича (20).*

Пятая глава диссертации посвящена исследованию устойчивости и притяжения решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным броуновским движением в гильбертовых пространствах.

В первой части пятой главы рассматриваются стохастические дифференциальные уравнения в пространстве $\mathbb{R}^d$:

$$dX(t) = f(t,X(t))dt + g(t,X(t))dW(t), \tag{21}$$

где $W(t)$ — стандартное d-мерное броуновское движение, $f\colon \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — измеримые по Борелю функции такие, что $f(t,0) = 0$ и $g(t,0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$ и выполнено условие линейного порядка роста по x, то есть существует постоянная C такая, что для любых $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^d$, выполняется неравенство $|f(t,x)| + |g(t,x)| \leq C(1 + |x|)$.

Пусть $\sigma(t,x) = g(t,x)g(t,x)^\top$. Для каждого $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ построим наименьшие выпуклые замкнутые множества $A(t,x)$, $F(t,x)$, содержащие соответственно матрицу $\sigma(t,x)$, вектор $f(t,x)$ и все предельные точки $\sigma(t,x')$ и $f(t,x')$ при $x' \to x$. Будем использовать обозначение $C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d)$ для пространства непрерывных функций $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$, а символ $\mathcal{B}$ — для борелевской σ-алгебры.

Определение 5.1. Если:

1) существуют вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с потоком $\mathcal{F}_t$ и отображение $X\colon \Omega \to C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ такие, что функция $(t,\omega) \to X(t,\omega) \in \mathbb{R}^d$ — $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$-измерима и $\mathcal{F}_t$-согласована;

2) существует $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$, $W(0) = 0$ п.н.;

3) существуют измеримые $(\mathcal{F}_t)$-согласованные процессы $v\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ и $u\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$, удовлетворяющие для $(\mu \times \mathbb{P})$-почти всех $(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$ включениям $v(t) \in F(t, X(t,\omega))$, $u(t)u^\top(t) \in A(t, X(t,\omega))$, и такие, что для любого $T \in \mathbb{R}^+$ п.н. выполняется неравенство $\int_0^T (|v(s)| + |u(s)|^2) ds < \infty$;

4) с вероятностью 1 для всех $t \in \mathbb{R}^+$ выполняется равенство

$$X(t) = X(0) + \int_0^t v(\tau) d\tau + \int_0^t u(\tau) dW(\tau),$$

то набор $(X, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, W(t), v(t), u(t))$ (или короче X) называем β-слабым решением уравнения (21).

Определение 5.2. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (21) устойчиво по вероятности, если для любых ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого β-слабого решения $X(t)$ уравнения (21), удовлетворяющего условию $|X(0)| \le \delta$ п.н., выполняется неравенство $\mathbb{P}\left(\sup_{t\ge 0} |X(t)| > \varepsilon_1\right) < \varepsilon_2$.

Определение 5.3. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (21) асимптотически устойчиво по вероятности, если нулевое решение уравнения (21) устойчиво по вероятности и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого β-слабого решения $X(t)$ уравнения (21), удовлетворяющего условию $|X(0)| \le \delta$ п.н., выполняется неравенство $\mathbb{P}\left(\lim_{t\to\infty} X(t) = 0\right) \ge 1 - \varepsilon$.

Исследуем устойчивость β-слабого нулевого решения стохастического дифференциального уравнения с выделенной линейной частью вида

$$dX(t) = (A(t)X(t) + f(t, X(t)))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \ge 0. \tag{22}$$

Здесь $A\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — кусочно-непрерывная функция, $\sup_{t\ge 0} |A(t)| \le M$, а функции f и g удовлетворяют условиям для уравнения (21).

Наряду с уравнением (22) рассмотрим линейное однородное детерминированное уравнение

$$dX(t) = A(t)X(t)dt, \quad t \ge 0, \tag{23}$$

Через $X^{(s,x)}(t)$ будем обозначать (единственное) решение уравнения (23), удовлетворяющее равенству $X^{(s,x)}(s) = x$.

Определение 5.4. Будем говорить, что уравнение (23) имеет *равномерно экспоненциально устойчивое* нулевое решение, если существуют константы $\Lambda, \lambda > 0$, не зависящие от s, x, такие, что для любых $s \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^d$ и $t \geq s$ выполняется неравенство $|X^{(s,x)}(t)|^2 \leq \Lambda |x|^2 e^{-\lambda(t-s)}$.

Теорема 5.3. [1, 14]. *Предположим, что функции $f(t,x)$ и $g(t,x)$ таковы, что выполнены соотношения*

$$\frac{|f(t,x)|}{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0, \qquad \frac{|g(t,x)|}{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \tag{24}$$

равномерно по $t \in \mathbb{R}^+$, а система (23) имеет равномерно экспоненциально устойчивое нулевое решение. Тогда система (22) имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.

Пусть H и K — сепарабельные гильбертовы пространства, $\mathfrak{L}_2(K,H)$ — пространство операторов Гильберта-Шмидта, действующих из K в H, Q — ядерный симметрический положительно определенный оператор на пространстве K, $W(t,\omega)$ — Q-броуновское движение со значениями в K и ковариационным оператором Q. Во второй части пятой главы рассматриваются эволюционные функциональные уравнения в пространстве H следующего вида:

$$dX(t,\omega) = AX(t,\omega)dt + f(t, X(t,\omega))dt + g(t, X(t,\omega))dW(t,\omega), \quad (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{25}$$

относительно $X \in H$ с начальным условием

$$X(0,\omega) = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \tag{26}$$

где $f\colon \mathbb{R}^+ \times H \to H$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times H \to \mathfrak{L}_2(K,H)$ — измеримые, непрерывные по X (при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$) функции, A — линейный оператор, определенный на всюду плотном в H множестве $\mathcal{D}(A)$ и порождающий C_0-полугруппу $S(t)$ на H, $\xi : \Omega \to \mathcal{D}(A)$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина, имеющая конечный момент $\mathbb{E}\,\|\xi\|^p < \infty$ порядка $p > 2$.

Относительно функций $f(t,X)$ и $g(t,X)$ будем предполагать, что выполнены два условия:

1. *Локальное условие Липшица*. Для любого $a > 0$ существует постоянная q_a такая, что для всех $t \in [0,a]$ и любых $\varphi,\psi \in H$ таких, что

$\|\varphi\| \le a$, $\|\psi\| \le a$, выполняются неравенства $\|f(t,\varphi) - f(t,\psi)\| \le q_a\|\varphi - \psi\|$, $\|g(t,\varphi) - g(t,\psi)\| \le q_a\|\varphi - \psi\|$.

2. *Условие линейного порядка роста*. Существует непрерывная функция $k\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такая, что для всех $t \in \mathbb{R}^+$ и любого $\eta \in H$ выполняются неравенства $\|f(t,\eta)\| \le k(t)(1 + \|\eta\|)$, $\|g(t,\eta)\| \le k(t)(1 + \|\eta\|)$.

Определение 5.5. Случайный процесс $X(t), t \ge 0$ называют слабым решением уравнения (25) с начальным условием (26), если он $\mathcal{F}_t$-согласован, п.н. непрерывен по t и удовлетворяет равенству

$$X(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)f(s,X(s))ds + \int_0^t S(t-s)g(s,X(s))dW(s)$$

для любого $t \ge 0$ п.н.

Определение 5.8. Пусть положительная функция $\lambda(t)$ определена для достаточно больших $t > 0$, скажем, $t \ge T > 0$. Предположим, что $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty$, функция $\ln \lambda(t)$ равномерно непрерывна по $t \ge T$, и существует константа $\tau \ge 0$ такая, что $\lim\limits_{t\to\infty} \sup \frac{\ln\ln t}{\ln \lambda(t)} \le \tau$. Будем говорить, что слабое решение задачи (25), (26) притягивается к нулю со скоростью $\lambda(t)$, если найдется $\gamma > 0$ такое, что п.н. выполняется неравенство $\lim\limits_{t\to\infty} \sup \frac{\ln \|X(t)\|}{\ln \lambda(t)} \le -\gamma$.

Рассмотрим функционал $V(t,x)$ класса $C^{1,2}(\mathbb{R}^+\times H, \mathbb{R}^+)$. Введем операторы L, B, действующие на V следующим образом:

$$LV(t,x) = V_t'(t,x) + \langle V_x'(t,x), Ax + f(t,x)\rangle_H +$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[V_{xx}''(t,x)(g(t,x)Q^{1/2})(g(t,x)Q^{1/2})^\star], \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+\times\mathcal{D}(A), \tag{27}$$
$$BV(t,x) = \mathrm{tr}[V_{xx}''(t,x) \otimes V_{xx}''(t,x)(g(t,x)Q^{1/2})(g(t,x)Q^{1/2})^\star],$$
$$(t,x) \in \mathbb{R}^+\times H. \tag{28}$$

Теорема 5.4. [3, 9]. *Пусть задан функционал $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+\times H, \mathbb{R}^+)$ и две неотрицательные непрерывные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$. Предположим, что существуют постоянные $r > 0$, $m \ge 0$, постоянные $\mu,\nu,\theta \in \mathbb{R}$ и невозрастающая положительная функция $\zeta(t)$ такие, что $\frac{m-(\max\{\nu,\mu+\tau\}+\theta)}{r} > 0$, и выполнены следующие условия:*

1. $\|x\|^r(\lambda(t))^m \le V(t,x)$ для всех $(t,x) \in \mathbb{R}^+\times H$.
2. $LV(t,x)+\zeta(t)BV(t,x) \le \psi_1(t)+\psi_2(t)V(t,x)$ для всех $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathcal{D}(A)$.
3. $\lim\limits_{t\to+\infty} \sup \frac{\ln\left(\int_0^t \psi_1(s)\,ds\right)}{\ln \lambda(t)} \le \nu$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \sup \frac{\int_0^t \psi_2(s)\,ds}{\ln \lambda(t)} \le \theta$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \inf \frac{\ln \zeta(t)}{\ln \lambda(t)} \ge -\mu$.

Тогда слабое решение задачи (25), (26) притягивается к нулю со скоростью $\lambda(t)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Доказана формула замены переменных и теорема о непрерывной зависимости в среднем от начальных условий и правых частей решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста, большими $1/3$, и сносом [2, 5, 7, 10, 12, 15].

2. Доказана теорема об асимптотических разложениях в окрестности нуля для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста, большими $1/3$, и сносом [4, 5, 11].

3. Получены методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа с дробным броуновским движением с показателем Харста, большим $1/2$, стандартным броуновским движением и сносом, основанные на приведении данных уравнений к простейшим уравнениям, линейным неоднородным уравнениям или к уравнениям Стратоновича [6, 13].

4. Доказана теорема об устойчивости по линейному приближению, дающая достаточное условие асимптотической устойчивости по вероятности слабого нулевого решения неавтономной системы стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и стандартными броуновскими движениями, исходя из равномерной экспоненциальной устойчивости слабого нулевого решения соответствующей однородной системы. Доказана теорема о притяжении к нулю слабых решений нелинейных стохастических дифференциально-функциональных уравнений со стандартным броуновским движением в гильбертовых пространствах с коэффициентами, удовлетворяющими локальному условию Липшица [1, 3, 8, 9, 14].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы при проведении исследований по теории устойчивости стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах и общей теории стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями в научных коллективах, занимающихся исследованием дифференциальных уравнений, в Институте математики НАН Беларуси, Белорусском государственном университете, а также при чтении спецкурсов.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных изданиях в соответствии с п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

1. Васьковский, М.М. Исследование устойчивости решений неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами с помощью метода функций Ляпунова / М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный, И.В. Качан // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1 : физ., мат., информ. — 2015. — № 3. — С. 117—125.

2. Качан, И.В. Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И.В. Качан // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 193—209.

3. Васьковский, М.М. Устойчивость решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах с локально липшициевыми коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 7. — С. 866—880.

4. Васьковский, М.М. Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. — 2018. — Т. 62, № 4. — С. 398—405.

5. Vaskouski, M. Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3 / M. Vaskouski, I. Kachan // Stochastic Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 36, № 6. — P. 909—931.

6. Васьковский, М.М. Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями / Васьковский М.М., Качан И.В. // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 135—151.

Статьи в других научных изданиях

7. Качан, И.В. Непрерывная зависимость от начальных условий решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И.В. Качан // Сборник научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь «НИРС 2018» / Редкол. : И.А. Старовойтова [и др.]. — Минск : Изд. центр БГУ, 2019. — С. 24—25.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

8. Качан, И.В. Экспоненциальная устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / И.В. Качан // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : материалы Междунар. матем. конф., Минск, 7—10 декабря 2015 г. / Мин-во образования Республики Беларусь, БГУ, Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси ; редкол. : С.Г. Красовский [и др.]. — Минск, 2015. — Ч. 1. — С. 34.

9. Васьковский, М.М. Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах / М.М. Васьковский, И.В. Качан // XII Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. научн. конф., Минск, 5—10 сентября 2016 г. : в 5 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси, БГУ ; ред. : С.Г. Красовский. — Минск, 2016. — Ч. 2. — С. 14—15.

10. Васьковский, М.М. Аналог формулы Ито для стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие 1/3 / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем (ANM—2017) : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф., Пенза, Россия, 4—6 декабря 2017 г. / Под. ред. И.В. Бойкова. — Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. — С. 12—16.

11. Васьковский, М.М. Аналог уравнений Колмогорова для математических ожиданий решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Еругинские чтения—2018 : материалы XVIII Междунар. научн. конф. по дифференциальным уравнениям, Гродно, 15—18 мая 2018 г. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси, БГУ, ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол. : А.К. Деменчук [и др.]. — Минск, 2018. — Ч. 2. — С. 85—86.

12. Качан, И.В. Непрерывная зависимость от начальных условий решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И.В. Качан, М.М. Васьковский // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация : материалы Междунар. научн. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения академ. Е.А. Барбашина, Минск, 24—29 сентября 2018 г. / Белорус. гос. ун-т; редкол. : Ф.М. Кириллова [и др.]. — Минск, 2018. — С. 117—118.

13. Васьковский, М.М. Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного

типа / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Еругинские чтения—2019 : материалы XIX Междунар. научн. конф. по дифференциальным уравнениям, Могилев, 14—17 мая 2019 г. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси, БГУ, БРУ ; редкол. : А.К. Деменчук [и др.]. — Минск, 2019. — Ч. 2. — С. 66—67.

Тезисы докладов научных конференций

14. Васьковский, М.М. Теорема об устойчивости по линейному приближению решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE—2015) : тез. докл. 8-го Междунар. научн. семинара, Минск, 14—19 сентября 2015. / Ред. : С.В. Рогозин. — Минск, 2015. — С. 24.

15. Качан, И.В. Существование решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные показатели Харста, большие 1/3 / И.В. Качан // Еругинские чтения—2017 : тез. докл. XVII Междунар. научн. конф. по дифференциальным уравнениям, Минск, 16—20 мая 2017 г. / Редкол. : В.И. Корзюк [и др.]. — Минск, 2017. — Ч. 2. — С. 48—49.

РЕЗЮМЕ

Качан Илья Вадимович

Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста

Ключевые слова. Стохастическое дифференциальное уравнение, дробное броуновское движение, потраекторный интеграл Губинелли, асимптотическое разложение, непрерывная зависимость от начальных данных, методы интегрирования, асимптотическая устойчивость, притяжение к нулю.

Цель работы. Исследование общих и асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста.

Методы исследования. Методы теории дифференциальных уравнений, теории случайных процессов и функционального анализа.

Полученные результаты и их новизна. Для стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные показатели Харста, большие 1/3, получена формула замены переменных, доказана теорема о непрерывной зависимости решений от начальных данных, получены асимптотические разложения математических ожиданий функционалов от решений. Для стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа получены новые методы точного интегрирования. Для стохастических дифференциальных уравнений со стандартным броуновским движением доказана теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейного уравнения в пространстве $\mathbb{R}^d$ по линейному приближению, доказана теорема о притяжении к нулю слабых решений нелинейного уравнения в сепарабельном гильбертовом пространстве. Все результаты диссертации являются новыми.

Рекомендации по использованию. Результаты исследования носят теоретический характер и могут быть использованы при проведении исследований по общей и асимптотической теории стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, теории устойчивости стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах.

Область применения. Результаты исследования могут быть применены в теории дифференциальных уравнений, а также в математическом моделировании случайных процессов.

РЭЗЮМЭ

Качан Ілья Вадзімавіч

Уласцівасці рашэнняў стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў, якія кіруюцца шматмернымі дробавымі броўнаўскімі рухамі с рознымі паказчыкамі Харста

Ключавыя словы. Стахастычнае дыферэнцыяльнае раўнанне, дробавы броўнаўскі рух, патраекторны інтэграл Губінэллі, асімптатычнае раскладанне, непарыўная залежнасць ад пачатковых дадзеных, метады інтэгравання, асімптатычная ўстойлівасць, прыцягненне да нуля.

Мэта работы. Даследаванне агульных і асімптатычных уласцівасцяў рашэнняў стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў, якія кіруюцца шматмернымі дробавымі броўнаўскімі рухамі з рознымі паказчыкамі Харста.

Метады даследавання. Метады тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, тэорыі выпадковых працэсаў і функцыянальнага аналізу.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Для стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў з дробавымі броўнаўскімі рухамі, якія маюць розныя паказчыкі Харста, большыя за 1/3, атрымана формула замены пераменных, даказана тэарэма аб непырыўнай залежнасці рашэнняў ад пачатковых дадзеных, атрыманы асімптатычныя раскладанні матэматычных чаканняў функцыяналаў ад рашэнняў. Для стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў змешанага тыпу атрыманы новыя метады дакладнага інтэгравання. Для стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў са стандартным броўнаўскім рухам даказана тэарэма аб асімптатычнай устойлівасці нулявога рашэння нелінейнага раўнання ў прасторы $\mathbb{R}^d$ па лінейным набліжэнні, даказана тэарэма аб прыцягненні да нуля слабых рашэнняў нелінейнага раўнання ў сепарабельнай гільбертавай прасторы. Усе вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Вынікі даследавання носяць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны пры правядзенні даследаванняў па агульнай і асімптатычнай тэорыі стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў з дробавымі броўнаўскімі рухамі, тэорыі ўстойлівасці стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў у гільбертавых прасторах.

Галіна прымянення. Вынікі даследавання могуць быць ужыты ў тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, а таксама ў матэматычным мадэляванні выпадковых працэсаў.

SUMMARY

Kachan Ilya Vadimovich

The properties of the solutions of the stochastic differential equations controlled by multidimensional fractional Brownian motions with different Hurst exponents

Keywords. Stochastic differential equation, fractional Brownian motion, Gubinelli piecewise integral, asymptotic expansion, continuous dependence on the initial data, integration methods, asymptotic stability, attraction to zero.

The purpose of the research. Investigation of the general and asymptotic properties of the solutions of the stochastic differential equations controlled by multidimensional fractional Brownian motions with different Hurst exponents.

Methods of the research. Methods of the theory of differential equations, theory of random processes and functional analysis.

The obtained results and their novelty. For the stochastic differential equations with fractional Brownian motions having different Hurst exponents greater than 1/3, a change of variables formula variables has been obtained, a theorem on the continuous dependence of the solutions on the initial data has been proved, asymptotic expansions of the mathematical expectations of functionals on the solutions have been obtained. For stochastic differential equations of mixed type, new methods of exact integration have been obtained. For stochastic differential equations with standard Brownian motion, a theorem on the asymptotic stability of the zero solution of the nonlinear equation in the space $\mathbb{R}^d$ in a linear approximation has been proved, and a theorem on the attraction to zero of weak solutions of the nonlinear equation in a separable Hilbert space has been proved. All the results of the thesis are new.

Recommendations for use. The results of the study are theoretical in nature and can be used in research on the general and asymptotic theory of stochastic differential equations with fractional Brownian motions, the theory of stability of stochastic differential equations in Hilbert spaces.

Field of applications. The research results can be applied in the theory of differential equations, as well as in mathematical modeling of random processes.