

**Об одной особенности фундаментальной системы
решений дифференциального уравнения класса Фукса.
Л. А. Хвощинская, Т. Н. Жоровина (Минск, Республика Беларусь)**

Рассмотрим д.у. класса Фукса с четырьмя особыми точками a_1, a_2, a_3, ∞ :

$$y'' + \sum_{k=1}^3 \frac{c_k}{z - a_k} y' + \frac{abz + q}{\prod_{k=1}^3 (z - a_k)} y = 0, \quad (1)$$

$c_1 + c_2 + c_3 = 1 + a + b$ - соотношение Фукса. Известно, что в окрестности каждой точки уравнение (1) имеет 2 л.н.з. решения, причем в окрестности любой точки $z_0 \neq a_k (k = 1, 2, 3)$ ф.с.р. задается в виде степенных рядов вида

$$y_1 = A_0 + A_1(z - z_0) + \dots + A_n(z - z_0)^n + \dots, y_2 = B_1(z - z_0) + \dots + B_n(z - z_0)^n + \dots \quad (2)$$

Если в д.у. (1) $ab \neq 0$, то производная y' решения этого уравнения также удовлетворяет д.у. класса Фукса

$$y''' + \left(\sum_{k=1}^3 \frac{c_k + 1}{z - a_k} - \frac{1}{z + \frac{q}{ab}} \right) y'' + \frac{(a + 1)(b + 1)z^2 + q_1z + q_2}{\prod_{k=1}^3 (z - a_k)(z + \frac{q}{ab})} y' = 0, \quad (3)$$

где $q_1 = 2 \frac{(a+1)(b+1)}{ab} q$, $q_2 = \frac{q^2}{ab} - \frac{q}{ab} (c_1(a_2 + a_3) + c_2(a_1 + a_3) + c_3(a_1 + a_2)) - (c_1a_2a_3 + c_2a_1a_3 + c_3a_1a_2)$. Коэффициенты этого уравнения имеют полюс 1-го порядка в точке $z = -\frac{q}{ab}$. Само же решение в этой точке регулярно, но в первом решении (2) д.у. (1) коэффициенты $A_1 = A_2 = 0$. Если $ab = 0$, то для производной y' получаем уравнение вида (1), в котором коэффициенты уравнения не имеют дополнительных особых точек.

Показано, что при $a, b \neq -1$ вторая производная y'' также удовлетворяет д.у. класса Фукса

$$y^{IV} + \left(\sum_{k=1}^3 \frac{c_k + 2}{z - a_k} - \frac{1}{z - b_1} - \frac{1}{z - b_2} \right) y''' + \frac{(a + 2)(b + 2)z^3 + \dots + q_3}{\prod_{k=1}^3 (z - a_k)(z - b_1)(z - b_2)} y'' = 0, \quad (4)$$

в котором точка $z = -\frac{q}{ab}$ перестала быть особой, но появились 2 новые особые точки b_1 и b_2 , которые являются корнями числителя коэффициента при y' в уравнении (3). В этих точках в первом решении (2) д.у. (1) коэффициенты $A_0 = A_3 = 0$. При $a = -1$ или $b = -1$ дополнительные особые точки не появляются.

Таким образом доказывается, что при $a, b \neq 0, -1, -2, \dots$ для любого номера m можно указать m регулярных точек д.у. (1), для которых в рядах (2) коэффициенты $A_m = A_{m+1} = 0$. Аналогично доказывается, что для д.у. класса Фукса с $(n + 1)$ особыми точками $a_1, a_2, \dots, a_n, \infty$ существует $(n - 2)$ при $ab \neq 0$ или $(n - 3)$ при $ab = 0$ точек, для которых в рядах (2) коэффициенты $A_1 = A_2 = 0$ и т.д.