Численный анализ распределения температуры в нелинейном двумерном периодическом композиционном материале.

Г. Мишуриц (Аберистуит, Великобритания), Е. В. Песецкая (Тбилиси, Грузия) и С. В. Рогозин (Минск, Беларусь)

Решается задача отыскания и анализа распределения температуры T в двумерном периодическом композиционном материале, проводимости компонент $\lambda(T)$, $\lambda_k(T)$ которого зависят от температуры. Задача сводится к решению системы нелинейных уравнений на границах компонент следующего вида:

$$\varphi(t) = f\left(f_k^{-1}\left(\frac{\varphi_k(t)+\overline{\varphi_k(t)}}{2}\right)\right) + \frac{\varphi_k(t)-\overline{\varphi_k(t)}}{2} - \alpha t + \beta_{(k,m_1,m_2)}, \qquad (1)$$

$$\beta_{(k,m_1,m_2)} := \mathrm{Re}\,(\alpha z_0) - \imath \mathrm{Im}\,(\varphi_k(a_k + m_1 + \imath m_2)),$$

где $f(T(z)) = \int\limits_0^{T(z)} \lambda(\xi)\,d\xi$, $f_k(T(z)) = \int\limits_0^{T(z)} \lambda_k(\xi)\,d\xi$, k - номер включения, φ, φ_k - комплексные потенциалы такие, что $\mathrm{Re}\,\varphi(z) = f(z)$, $\mathrm{Re}\,\varphi_k(z) = f_k(z)$, a_k - центр k-го включения, $\alpha = -Ae^{-\imath\theta}$, A - интенсивность потока, θ - угол потока, z_0 - точка нулевой изотермы, m_1, m_2 - точки решетки композита.

Используя теорему Ньютона-Канторовича, доказывается, что система уравнений (**??**) имеет единственное решение в Банаховом пространстве двояко-периодических аналитических функций со стандартной нормой при малом изменении проводимостей $\lambda(T)$ и $\lambda_k(T)$. Решение системы уравнений (**??**) осуществляется методом итераций, где сходимость обеспечивается теоремой Ньютона-Канторовича. Для каждого уравнения системы вводятся неизвестные константы $\tau_k = T_k(a_k)$(температура в центре включения), являющиеся целью отыскания. На каждом шаге алгоритма уравнения системы разбиваются на два $\mathbb{R}$- линейных уравнений сопряжения, решение которых описано в [1]. На основе решения этих уравнений отыскивается новое приближенное значение $\tau_k^{(i)}$. Алгоритм реализован с помощью вычислительного пакета Maple 14. Температура найдена с заданной точностью $\varepsilon = 0.0001$ для четырех круговых включений с центрами $a_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\imath$, $a_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\imath$, $a_3 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\imath$, $a_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\imath$, проводимостями компонент вида $\lambda(T) = \begin{cases} y_1, & T < x_1, T > x_2 \\ y_2 + \frac{y_1-y_2}{x_1}T, & x_1 \le T \le 0, \\ y_2 + \frac{y_1-y_2}{x_2}T, & 0 \le T \le x_2. \end{cases}$ Найдено, что температура нелинейно уменьшается в направлении потока и постоянна в направлении, ортогональном потоку.

Литература.

1. *Mityushev V., Rogosin S., Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions. Theory and Applications, Chapman & Hall / CRC, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 108 (1999).*