Решение граничных задач для нестрого гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка методом характеристик

В. И. Корзюк и Е. С. Чеб (Минск, Беларусь)

В полуполосе $Q = [0, \infty) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ относительно функции $u : \bar{Q} = [0, \infty) \times \bar{\Omega} \ni (t, x) \rightarrow u(t, x)$, где $\bar{\Omega}$ – замыкание области $\Omega = (0, l)$, рассмотрим гиперболическое уравнение второго порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} + b^{(1)} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} + b^{(2)} u \right) = f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(t, x) \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi'(x), \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

Будем рассматривать случай, когда коэффициенты $a < 0$, $a \neq 0$ и $b^{(1)}, b^{(2)} > 0$.

Общее решение уравнения (1) из класса дважды непрерывно дифференцируемых функций $C^2(\mathbb{R}^2)$ представляется в виде суммы

$$u(t, x) = e^{-b^{(1)}t} g_1(x + a^{(1)}t) + e^{-b^{(2)}t} g_2(x + a^{(2)}t), \quad (3)$$

где g_1 и g_2 – любые функции из $C^2(\mathbb{R}^2)$. Требуется определить общий вид функций g_1 и g_2 в представлении (3) при условии, что будут выполняться начальные (2) и некоторые граничные условия.

Для уравнения (1) рассматриваются граничные условия трех типов.

$$u(t, x) \Big|_{x=0} = \mu^{(1)}(t), \quad t \in (0, \infty), \quad u(t, x) \Big|_{x=l} = \mu^{(2)}(t), \quad t \in \left(-\frac{l}{a}, \infty \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \mu^{(1)}(t), \quad t \in (0, \infty), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \mu^{(2)}(t), \quad t \in \left(-\frac{l}{a}, \infty \right), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} + \sigma^{(1)} u(t, x) \Big|_{x=0} &= \mu^{(1)}(t), \quad t \in (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} + \sigma^{(2)} u(t, x) \Big|_{x=l} &= \mu^{(2)}(t), \quad t \in \left(-\frac{l}{a}, \infty \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Методом характеристик [1] построено классическое решение задач (1), (2), (4), (1), (2), (5) и (1), (2), (6) и получены условия согласования начальных и граничных условий.

Литература.

1. Корзюк В.И. Уравнения математической физики. М.: БГУ, 2011.