

Решение задачи сопряжения двух гиперболических уравнений второго порядка методом характеристик

В. И. Корзюк, И. С. Козловская и Е. С. Чеб (Минск, Беларусь)

Рассматривается область $Q = (0, \infty) \times (0, l)$, разделенная прямой $x = \gamma$ на две полуполосы $Q^{(1)} = (0, \infty) \times (0, \gamma) \subset \mathbb{R}^2$ и $Q^{(2)} = (0, \infty) \times (\gamma, l) \subset \mathbb{R}^2$. В каждой $Q^{(i)}$ ($i = 1, 2$) задано гиперболическое уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\mathcal{L}^{(i)}u = (\partial_t - a^{(i)}\partial_x + b^{(i)}) (\partial_t - c^{(i)}\partial_x + d^{(i)}) u^{(i)}(t, x) = p^{(i)}(t, x), \quad (1)$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$; $a^{(i)}, b^{(i)}, c^{(i)}, d^{(i)}$ – из $\mathbb{R}$ действительные числа, причем $a^{(i)} \neq c^{(i)}$, $b^{(i)}, d^{(i)} > 0$, $p^{(i)}$ – заданные в $Q^{(i)}$ функции. К уравнению (1) добавляются условия Коши

$$u^{(i)}(0, x) = \varphi^{(i)}(x), \quad \partial_t u^{(i)} \Big|_{t=0} = \psi^{(i)'}(x), \quad (2)$$

и граничные условия

$$u^{(1)}(t, 0) = \mu^{(1)}(t), \quad u^{(2)}(t, l) = \mu^{(2)}(t), \quad t > 0. \quad (3)$$

На границе раздела двух областей задаются условия сопряжения

$$u^{(1)}(t, \gamma) = k^{(1)}u^{(2)}(t, \gamma), \quad \partial_x u^{(1)}(t, \gamma) = k^{(2)}\partial_x u^{(2)}(t, \gamma), \quad t > 0. \quad (4)$$

Строится классическое решение задачи (1)–(4) в аналитическом виде методом характеристик предварительно в предположении, что $p^{(i)}(t, x) = 0$.

Теорема. Пусть $\varphi^{(1)} \in C^{(2)}[0, \gamma]$, $\varphi^{(2)} \in C^{(2)}[\gamma, l]$, $\psi^{(1)} \in C^{(2)}[0, \gamma]$, $\psi^{(2)} \in C^{(2)}[\gamma, l]$, $\mu^{(i)} \in C^{(2)}[0, \infty)$ ($i = 1, 2$) и

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(0) &= \mu^{(1)}(0), \quad \varphi^{(2)}(l) = \mu^{(2)}(0), \quad \varphi^{(1)}(\gamma) = k^{(1)}\varphi^{(2)}(\gamma), \\ \psi^{(1)'}(0) &= \mu^{(1)'}(0), \quad \psi^{(2)'}(l) = \mu^{(2)'}(0), \quad \psi^{(1)'}(\gamma) = k^{(1)}\psi^{(2)'}(\gamma), \quad \varphi^{(1)'}(\gamma) = k^{(2)}\varphi^{(2)'}(\gamma), \\ (a^{(1)} + c^{(1)})\psi^{(1)''}(0) - a^{(1)}c^{(1)}\varphi^{(1)''}(0) &= \mu^{(1)''}(0), \\ (a^{(2)} + c^{(2)})\psi^{(2)''}(l) - a^{(2)}c^{(2)}\varphi^{(2)''}(l) &= \mu^{(2)''}(0), \\ \psi^{(1)''}(\gamma) &= k^{(2)}\psi^{(2)''}(\gamma), \quad (a^{(1)} + c^{(1)})\psi^{(1)''}(\gamma) - a^{(1)}c^{(1)}\varphi^{(1)''}(\gamma) = \\ &= k^{(1)} \left((a^{(2)} + c^{(2)})\psi^{(2)''}(\gamma) - a^{(2)}c^{(2)}\varphi^{(2)''}(\gamma) \right). \end{aligned}$$

Тогда в классах функций $C^{(2)}(\overline{Q^{(1)}})$ и $C^{(2)}(\overline{Q^{(2)}})$ существует единственное классическое решение задачи (1)–(4).