Применение метода эрмитовых форм к исследованию однородного дробно-дифференциального уравнения эйлерова типа.

Н. В. Жуковская (Минск, Беларусь)

На отрезке $[0;1]$ рассматривается однородное дифференциальное уравнение порядка $\alpha+m$

$$A_m x^m \left(D_{0+}^{\alpha+m} y\right)(x) + A_{m-1} x^{m-1} \left(D_{0+}^{\alpha+m-1} y\right)(x) + ... + A_0 \left(D_{0+}^{\alpha} y\right)(x) = 0, \qquad (1)$$

где $0 < \alpha < 1$, $m \in \mathbb{N}$, коэффициенты A_0, A_1, ..., $A_m \in \mathbb{C}$, $(D_{0+}^{\alpha+m} y)(x)$ – дробная производная Римана, определяемая формулой

$$\left(D_{0+}^{\alpha+m} y\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{m+1} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^\alpha} \qquad (0 \le x \le 1).$$

Решение $y(x)$ ищется в классе $L_1[0,1]$. Уравнению (1) ставим в соответствие характеристический многочлен

$$P_m(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + ... + a_1 s + a_0.$$

Рассматривается общий случай, когда среди корней характеристического многочлена $P_m(s)$ имеются кратные.

Теорема 1. Пусть характеристический многочлен $P_m(s)$ имеет κ_1 простых корней s_{j1} $(j = 1, ..., \kappa_1)$, κ_2 корней s_{j2} $(j = 1, ..., \kappa_2)$ кратности 2, ..., κ_l корней s_{jl} $(j = 1, ..., \kappa_l)$ кратности l в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -1$, причем $\kappa_1 + \kappa_2 + ... + \kappa_l = \kappa$, $\kappa \le m$. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y(x) = c_0 x^{\alpha-1} + \sum_{j=1}^{\kappa_1} c_{j1} \frac{\Gamma(s_{j1}+1)}{\Gamma(\alpha+s_{j1}+1)} x^{\alpha+s_{j1}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\kappa_2} c_{j2} \frac{\Gamma(s_{j2}+1)}{\Gamma(\alpha+s_{j2}+1)} x^{\alpha+s_{j2}} \left(1 + \psi(s_{j2}+1) - \psi(\alpha+s_{j2}+1) + \ln x\right) +$$

$$+ ... + \sum_{j=1}^{\kappa_l} c_{jl} x^{\alpha+s_{jl}} \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=0}^{k-1} \begin{pmatrix} k-1 \\ i \end{pmatrix} \frac{d^i}{ds_{jl}^i} \left(\frac{\Gamma(s_{jl}+1)}{\Gamma(\alpha+s_{jl}+1)}\right) \ln^{k-i-1} x,$$

где c_0, c_{ij} – произвольные постоянные.

Представляют интерес методы нахождения числа корней многочлена $P_m(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -1$, не основанные на явном решении характеристического уравнения.

Обозначим $Q_m(t) = P_m(-it-1)$ и пусть $\overline{Q_m}(t)$ – многочлен, коэффициенты которого комплексно сопряжены к коэффициентам $Q_m(t)$. Строим функцию

$$h(Q_m; t, \tau) = -i \frac{Q_m(t)\overline{Q_m}(\tau) - Q_m(\tau)\overline{Q_m}(t)}{t-\tau} = \sum_{k,\, l=0}^{m-1} B_{kl} t^k \tau^l.$$

Этой функции ставим в соответствие эрмитову форму

$$H(Q_m; t_0, ..., t_{m-1}) = \sum_{k,\, l=0}^{m-1} B_{kl} t_k \bar{t}_l.$$

Из теоремы Эрмита [3] вытекает

Теорема 2.

Пусть r и s – ранг и сигнатура эрмитовой формы $H(Q_m; t_0, ..., t_{m-1})$. Тогда уравнение (1) имеет $(r+s)/2+1$ линейно независимое решение. Если эрмитова форма $H(Q_m; t_0, ..., t_{m-1})$ определена положительно, то уравнение (1) имеет $m+1$ линейно независимое решение. Если эрмитова форма $H(Q_m; t_0, ..., t_{m-1})$ определена отрицательно, то уравнение (1) имеет 1 линейно независимое решение $y = c_0\, x^{\alpha-1}$, где c_0 – произвольная постоянная.

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда Фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект Ф10МС-024).

Литература.

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Мн.: Наука и техника. (1987).

2. *Kilbas A. A, Srivastava H. M., and Trujillo J. J.Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Amsterdam: Elsevier. (2006).

3. *Крейн М.Г., Наймарк М.А. Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений.* Харьков: ОНТИ. (1936).

4. *Постников М.М. Устойчивые многочлены.* М: Наука. (1981).