ПРИМЕНЕНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ТИПА МАРШО В ФОРМЛЕ ТЕЙЛОРА.

А. П. ГРИНЬКО (Минск, Беларусь)

Появился большой круг задач, в котором возникает проблема исследования функций непрерывных, но нигде не дифференцируемых (Perrin, Poincare и другими см. [2] и [3]). Вместо оператора дифференцирования предлагается использовать оператор, который в каком-то смысле сравнивает скорость изменения приращения функции с дробной степенью приращения аргумента. В качестве такого оператора рассмотрим правостороннюю усечённую локальную дробную производную типа Маршо, в некотором функциональном пространстве H:

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon} f\right)(x)=\frac{\varphi^{[\alpha]}(x)-\varphi^{[\alpha]}(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\{\alpha\})\varepsilon^{\alpha}}+\frac{\{\alpha\}}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\lim_{\substack{\delta\to 0\\ H}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x-\delta}\frac{\varphi(x)-\varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1+\{\alpha\}}}d\tau.$$

$$0<\alpha, 0<\delta<\varepsilon,\ -\infty<a\le x\le b<\infty \quad (1)$$

где предельный переход определяется функциональным пространством H. Введем также оператор локального дробного интегрирования:

$$\left(I^{\alpha,-\varepsilon}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x}(x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt, 0<\alpha<1, -\infty<a\le x\le b<\infty. \quad (2)$$

Операторы (1) обладают свойствами аналогичными свойствам обычных производных, например, $\left(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\varphi\right)(x)=\left(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon}\varphi(\varphi+const)\right)(x)$.

Рассмотрим пространства гёльдера $H^{\lambda}(a;b)$ и пространства суммируемых функций $L_p(a;b)$, см. [1]. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x)=I^{\alpha,-\varepsilon}\varphi(x)$, где $\varphi(x)\in H^{\lambda}(a;b)\left(L_p(a;b), 1<p<\infty\right)$, $\varepsilon>0, 0<\alpha<\lambda<1$, $-\infty<a<c<b\le\infty$, тогда для любого $x\in[a+2\varepsilon, b]$ имеем место равенство:

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha,-\varepsilon} f\right)(x)=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ (L_p(a,b))}}\left(\mathcal{D}_{\delta}^{\alpha,-\varepsilon} f\right)(x)=\varphi(x)-\varphi(x-\varepsilon).$$

Теорема 2. Пусть $0<\{\alpha\}<\sigma<1, 0<\varepsilon_1\le\varepsilon, f(x)\in H^{\lambda}(a;b), \lambda=[\alpha]+\sigma,$ тогда справедливы следующие аналоги формулы Тейлора:

$$\text{а)}\ f(x+\varepsilon_1)=f(x)+\sum_{n=1}^{[\alpha]}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\varepsilon_1^n+\frac{\mathcal{D}^{\{\alpha\},-\varepsilon}f^{([\alpha])}(x)}{\Gamma(\alpha+1)}\varepsilon_1^{\alpha}+R(x,\varepsilon,\varepsilon_1), \quad (3)$$

если 1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{D}^{\{\alpha\},-\varepsilon}f^{([\alpha])}(x)=\lim\limits_{\varepsilon_1\to 0}\mathcal{D}^{\{\alpha\},-\varepsilon_1}f^{([\alpha])}(x+\varepsilon_1)$, то $R(x,\varepsilon,\varepsilon_1)=o\left(\varepsilon_1^{\alpha}\varepsilon^{\sigma-\{\alpha\}}\right)$;

2) $\lim\limits_{\varepsilon_1\to 0}\mathcal{D}^{\{\alpha\},-\varepsilon_1}f^{([\alpha])}(x+\varepsilon_1)=\mathcal{D}^{\{\alpha\},-\varepsilon}f^{([\alpha])}(x)$, то $R(x,\varepsilon,\varepsilon_1)=o\left(\varepsilon_1^{\alpha}\right)$.

Литература.

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. - Минск. - 1987. - 687 с.

2. Korner T. W., Fourier Analysis (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).

3. Mandelbrot B. B., The Fractal Geometry of Nature (Freeman, New York, 1977).

УДК 517.968

Гринько А.П.

Применение локальной дробной производной типа Маршо в формуле Тейлора. Введена локальная дробная производная типа Маршо. Получены аналоги полугруппового свойства и доказана формула Тейлора с оценкой остаточного члена в гёльдеровских пространствах.

КАРТОЧКА

участника конференции

АМАДЕ-2012

Фамилия: Гринько.

Имя: Александр.

Отчество: Петрович.

Учёная степень, звание: кандидат физико-математических наук.

Место работы: Белорусский государственный университет, кафедра теории функций.

Почтовый адрес места работы: 220030, г. Минск, пр. Независимости, 4.

Должность: докторант.

Почтовый адрес места жительства: Беларусь, Брест, ул. Столичная д. 54.

Телефон: (8-016-2)97-79-56

Факс: -

Электронная почта: agrinko@yahoo.com

Необходимость размещения в гостинице: гостиница, двухместный номер.

Название доклада: Применение локальной дробной производной типа Маршо в формуле Тейлора.