Дискретные уравнения класса Фукса.
И. Л. Васильев и Д. А. Новичкова (Минск, Беларусь)

Рассматриваются кольцо последовательностей $K = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} | a_n \in \mathbf{C}\ \forall n \in \mathbf{N}_0\}$ и поле гиперпоследовательностей
$K' = \left\{\left\{\ldots, 0, \ldots, 0, a_{-n}, a_{-n+1}, \ldots, \underline{a_0}, a_1, \ldots\right\} | a_k \in \mathbf{C}\ \forall k = \overline{-n, \infty};\ n \in \mathbf{N}_0\right\}$ с обычными поэлементными сложением, умножением на скаляр и умножением в виде свёртки [1]. Умножение на последовательность $h = \{0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots\}$ и гиперпоследовательность $s = \{\ldots, 0, \ldots, 0, 1, \underline{0}, \ldots, 0, \ldots\}$ задают сдвиги вправо и влево соответственно. Элементы s и h являются взаимно обратными в K'. Поле K' изоморфно полю отношений $K/K = \left\{\frac{a}{b} | a, b \in K, b \neq 0\right\}$. Каждую гиперпоследовательность можно представить в виде $a = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k h^k$ и рассматривать как аналитическую функцию последовательности h. На K' задаётся операция алгебраического дифференцирования $D : K' \longrightarrow K',\ Da = \{na_n\}_{n=-\infty}^{\infty} * s$.

Будем говорить, что гиперпоследовательность a имеет в точке λI полюс порядка N, если её можно представить в виде $a = \frac{I}{(h-\lambda I)^N} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (h - \lambda I)^k$, $a_0 \neq 0$.

Рассмотрим разностное уравнение

$$(n^2 + \alpha n + (\alpha - 1))a_{n+1} + (\gamma n^2 + \delta n + \beta)a_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{C}$, $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ – неизвестная последовательность.

Уравнение (1) преобразуется в следующее уравнение в алгебре

$$D^2 a + \frac{(\alpha - 1)I + (\gamma + \delta)h}{h(I + \gamma h)} Da + \frac{\beta I}{h(I + \gamma h)} a = 0. \tag{2}$$

Будем говорить, что алгебраическое дифференциальное уравнение

$$D^2 a + p(h)Da + q(h) = 0 \tag{3}$$

и соответствующее ему разностное уравнение являются уравнениями класса Фукса, если их решения являются последовательностями вида $a = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k h^k$ или $a = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \widetilde{a_k} (h - \lambda I)^k$.

Получено следующее необходимое условие того, что уравнение (3) является уравнением класса Фукса: гиперпоследовательности $p(h)$ и $q(h)$ имеют полюса не выше первого и второго порядка соответственно.

Таким образом, уравнение (1) является дискретным уравнением класса Фукса.

Литература.

1. *Васільеў І.Л., Навічкова Д.А.* Рашэнне дыскрэтнага раўнання Лапласа ў кольцы паслядоўнасцей *Веснік БГУ* Сер.1. №3.2010. С.114-119