

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.И. Чуприс
«12» ~~декабрь~~ 2019 г.

Регистрационный № УД-10587/уч.



Теория операторов

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 80 03 Математика и компьютерные науки

Профилизация: Математика

Профилизация: Математика и дидактика математики

2019 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1- 31 80 03-2019 и учебных планов рег. №G31-017/уч. , рег. № G31з-018/уч. от 11.04.2019; рег. №G31-088/уч., рег. № G31з-089/уч. от 11.04.2019.

СОСТАВИТЕЛИ:

Чесалин Владимир Иванович, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Пыжкова Ольга Николаевна, заведующий кафедрой высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент;

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики
(протокол № 12 от 18.06.2019);

Научно-методическим Советом БГУ
(протокол № 5 от 28.06.2019)

Зав. кафедрой ФАиАЭ, профессор  А.В. Лебедев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В дисциплине «Теория операторов» изучаются функционалы и операторы в функциональных пространствах, а также методы, с помощью которых сведения об этих объектах применяются к конкретным задачам.

Среди областей применения теории операторов можно указать математическую физику, теорию функций, теорию дифференциальных и интегральных уравнений, методы вычислений, квантовую механику, математическую экономику и ряд других направлений.

Цели и задачи учебной дисциплины.

Цели учебной дисциплины:

- ознакомление с основными понятиями теории линейных операторов;
- выработка мировоззренческих представлений о современных приложениях функционального анализа и теории линейных операторов;
- подготовка специалистов, способных использовать фундаментальные математические знания в качестве основы при проведении прикладных исследований;
- подготовка к самостоятельному изучению тех разделов современных научных знаний, которые могут потребоваться дополнительно в практической и научно-исследовательской работе.

Задачи учебной дисциплины:

- углубленное ознакомление магистрантов с основными принципами теории линейных операторов и примерами ее приложений;
- дальнейшее формирование у магистрантов навыков абстрактного математического мышления и умения применять его в конкретных задачах;
- повышение их математической культуры.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием (магистра).

Учебная дисциплина относится к модулю «Функциональный анализ и теория вероятностей» компонент учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Математическая и прикладная статистика», «Функциональный анализ и интегральные уравнения», «Уравнения с частными производными», «Вариационное исчисление», «Методы численного анализа», «Дифференциальные уравнения в приложениях».

Требования к компетенциям.

Освоение учебной дисциплины «Теория операторов» должно обеспечить формирование следующих **специализированных компетенций**:

СК-3. Быть способным применять методы функционального анализа при решении задач естественных наук и экономики

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные свойства линейных ограниченных операторов;
- сходимость последовательностей операторов;
- свойства компактных операторов и их приложения к интегральным уравнениям;
- классификацию точек спектра линейного оператора;
- основные понятия теории обобщенных функций.

уметь:

- вычислять норму линейного ограниченного оператора;
- исследовать сходимость последовательностей линейных ограниченных операторов;
- находить резольвентное множество и спектр линейных ограниченных операторов;
- строить фундаментальные решения для простейших дифференциальных уравнений.

владеть:

- терминологией дисциплины «Теория операторов»;
- основными методами и приемами исследования свойств линейных ограниченных операторов;
- навыками использования теории линейных операторов в учебной и научной деятельности.
-

Структура учебной дисциплины.

Дисциплина изучается во 2 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Теория операторов» отведено 108 часов, в том числе:

- для очной формы получения высшего образования – 54 аудиторных часа, из них: лекции – 18 часов, лабораторные занятия – 20 часов, управляемая самостоятельная работа 16 часов;

- для заочной формы получения высшего образования – 12 аудиторных часов, из них: лекции – 8 часов, лабораторные занятия – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Введение. Линейные операторы

Пространства линейных операторов. Непрерывность и ограниченность. Сильная сходимость последовательности операторов. Теорема Банаха-Штейгауза.

Обратные операторы. График оператора. Замкнутые операторы. Замыкание оператора. Теорема о замкнутом графике. Приложения к интегральным уравнениям.

Преобразование Фурье функций из пространства $L_1(\mathbb{R})$. Преобразование Фурье функций в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

Тема 2. Сопряженные пространства и операторы

Линейные ограниченные функционалы. Теорема Хана-Банаха. Общий вид линейных ограниченных функционалов в конкретных пространствах.

Сопряженные пространства и сопряженные операторы, примеры. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.

Слабая сходимость. Рефлексивность.

Тема 3. Компактные операторы

Компактные множества в нормированных пространствах. Компактные операторы и их свойства. Компактность интегральных операторов.

Теория Рисса-Шаудера уравнений с компактными операторами. Фредгольмовы операторы.

Тема 4. Элементы спектральной теории линейных операторов

Резольвентное множество и спектр оператора. Классификация точек спектра.

Спектральное разложение компактного самосопряженного оператора.

Тема 5. Обобщенные функции

Пространства основных и обобщенных функций. Действия с обобщенными функциями.

Пространство обобщенных функций медленного роста. Преобразование Фурье.

Решение дифференциальных уравнений в пространствах обобщенных функций.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов						Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	Количество часов УСР	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Введение. Линейные операторы.	2			4			Отчет по самостоятельной работе с устной защитой
2	Сопряженные пространства и операторы.	4			4			Отчет по самостоятельной работе с устной защитой
3	Компактные операторы.	4			4		4	Отчет по лабораторной работе с устной защитой
4	Элементы спектральной теории операторов.	4			4		6	Отчет по лабораторной работе с устной защитой
5	Обобщенные функции.	4			4		6	Отчет по лабораторной работе с устной защитой
ВСЕГО		18			20		16	

Заочная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Введение. Линейные операторы.	2			1		Отчет по самостоятельной работе с устной защитой
2	Компактные операторы.	2			1		Отчет по самостоятельной работе с устной защитой
3	Элементы спектральной теории операторов.	4			2		Отчет по самостоятельной работе с устной защитой
	Всего	8			4		

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. *Антоневич, А.Б.* Функциональный анализ и интегральные уравнения : учебник / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно. 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : БГУ, 2006. – 430 с. <http://elib.bsu.by/handle/123456789/28955>
2. *Антоневич, А.Б.* Функциональный анализ и интегральные уравнения : учеб. пособие / А.Б. Антоневич, М.Х. Мазель, Я.В. Радыно. – Минск : БГУ, 2011. – 319 с. <http://elib.bsu.by/handle/123456789/14907>
3. Дерр, В.Я. Функциональный анализ: лекции и упражнения : учебное пособие / В.Я. Дерр. – М., : КНОРУС, 2013. – 464 с. – (Бакалавриат).
4. Босс, В. Функциональный анализ. Лекции по математике т.5. / В. Босс. – М., : Книжный дом Либроком, 2018. – 216 с.
5. *Лебедев, В.И.* Функциональный анализ и вычислительная математика / В.И. Лебедев. 4-е изд – М., : Физматлит, 2017. – 296 с.

Перечень дополнительной литературы

1. Березанский, Ю.М. Функциональный анализ. Курс лекций : учеб. пособие / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель – К., : Выща шк., 1990. – 600 с.; ил.
2. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики : учебник / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов – М., : Физ-мат. литература, 2000. – 400 с.
3. Треногин, В.А. Функциональный анализ : учеб. пособие / В.А. Треногин. – М., : Наука, 1980. – 449 с.
4. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. 4-е изд., перераб. – М., : Наука, 1976. – 544 с.
5. Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. 3-е изд., перераб. – М., : Наука, 1984. – 752 с.
6. Антоневич, А.Б. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учеб. пособие для мат. спец. вузов / А.Б. Антоневич, П.Н. Князев, Я.В. Радыно; Под ред. С.Г. Крейна. – Минск : Выш. школа, 1978. – 208 с.
7. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике : учеб. пособие / В.С. Владимиров. 2-е изд., перераб. и доп. – М., : Физ-мат. литература, 1979. – 320 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Формой текущей аттестации по дисциплине «Теория операторов» учебным планом предусмотрен экзамен.

Контроль работы магистранта проходит в форме собеседования, контрольной работы в аудитории или выполнения самостоятельных работ и практических упражнений в аудитории, а также самостоятельной работы вне аудитории с предоставлением отчета с его устной защитой. Задания к контрольным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Экзамен по дисциплине проходит в устной или письменной форме.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, предусматривающая использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Формирование оценки за текущую успеваемость:

- отчеты по самостоятельной работе с устной защитой – 50 %;
- отчеты по лабораторным работам с устной защитой – 50%.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценка по текущей успеваемости составляет 30 %, экзаменационная оценка – 70 %.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования (Постановление Министерства образования Республики Беларусь №53 от 29.05.2012 г.).

2. ПОЛОЖЕНИЕ о рейтинговой системе оценки знаний студентов по дисциплине в Белорусском государственном университете (Приказ ректора БГУ № 382-ОД от 18.08.2015 г. (с изменениями, согласно приказу 491-ОД от 29.08.2018г.)).

3. Критерии оценки знаний и компетенций студентов по 10-балльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 22.12.2003 г. № 21-04-1/105).

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 3. Компактные операторы

Лабораторная работа 1.

Задание 1. Является ли оператор $Ax = x(t^2)$ компактным в пространствах

$$L_2[0,1] \text{ и } C[0,1].$$

Задание 2. При каждом значении λ выяснить с помощью сопряженного уравнения, для каких значений параметров α, β, γ существует решение данного интегрального уравнения

$$x(t) = \lambda \int_0^\pi \sin(t - 2s)x(s)ds + (\alpha - \gamma)t + \alpha + 2\gamma$$

в пространствах $L_2[0, \pi]$ и $C[0, \pi]$.

Тема 4. Элементы спектральной теории операторов

Лабораторная работа 2.

Задание 1. Найти спектр и резольвенту интегрального оператора

$$Ax = \int_0^1 (t+s)x(s)ds$$

в пространствах

$$L_2[0,1] \text{ и } C[0,1].$$

Задание 2. Найти собственные значения, точки непрерывного и точки остаточного спектров оператора

$$Ax = a(t)x(t)$$

умножения на функцию $a(t) = 8 \left| t - \frac{1}{4} \right| - |8t - 4|$ в пространствах

$$L_2[0,1] \text{ и } C[0,1].$$

Тема 5. Обобщенные функции

Лабораторная работа 3.

Задание 1. В пространстве $D'(\mathbb{R}^1)$ вычислить пределы обобщенных функций f_t при $t \rightarrow \infty$

$$1) f_t = \frac{e^{ixt}}{x - i0}, 2) f_t = \frac{e^{-ixt}}{x + i0}, 3) f_t = t^m e^{ixt}, m \geq 0.$$

Задание 2 . Найти единственныe в пространстве D'_+ фундаментальные решения следующих дифференциальных операторов

$$1) \frac{d^2}{dx^2} + 4 \frac{d}{dx}, 2) \frac{d^3}{dx^3} - a^3, 3) \frac{d^4}{dx^4} - 2 \frac{d^2}{dx^2} + 1$$

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса могут быть использованы следующие подходы и методы: *эвристический подход, практико-ориентированный подход, метод проектного обучения, метод учебной дискуссии, методы и приемы развития критического мышления, метод группового обучения* которые предполагают:

- осуществление студентами значимых открытий;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач;
- творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;
- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов;
- использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций;
- приобретение студентом знаний и умений для решения практических задач;
- анализ ситуации, используя профессиональные знания, собственный опыт, дополнительную литературу и иные источники;
- способ организации учебной деятельности студентов, развивающий актуальные для учебной и профессиональной деятельности навыки планирования, самоорганизации, сотрудничества и предполагающий создание собственного продукта;
- приобретение навыков для решения исследовательских, творческих, социальных, предпринимательских и коммуникационных задач.

Все результаты и достижения группируются на основе основных видов деятельности студентов: учебной, научно-исследовательской и иной. Методы обеспечивают появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения. Также они представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления и являются организацией учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся, кроме подготовки к экзамену, подготовка к зачету

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;
- выполнение домашнего задания;
- работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;
- подготовка к практическим семинарским занятиям;
- научно-исследовательские работы;
- анализ статистических и фактических материалов по заданной теме, проведение расчетов, составление схем и моделей на основе статистических материалов;
- подготовка и написание рефератов, докладов, эссе и презентаций на заданные темы;
- подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Пространства линейных ограниченных операторов.
2. Сильная сходимость последовательности операторов.
3. Теорема Банаха-Штейгауза.
4. Обратные операторы.
5. График оператора.
6. Замкнутые операторы.
7. Замыкание оператора.
8. Теорема о замкнутом графике.
9. Преобразование Фурье функций из пространства $L_1(R)$.
10. Преобразование Фурье функций в пространстве $L_2(R)$.
11. Линейные ограниченные функционалы.
12. Теорема Хана-Банаха.
13. Общий вид линейных ограниченных функционалов в конкретных пространствах.
14. Сопряженные пространства и сопряженные операторы.
15. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.
16. Слабая сходимость.
17. Рефлексивность.
18. Компактные множества в нормированных пространствах.
19. Компактные операторы и их свойства.
20. Компактность интегральных операторов.
21. Теория Рисса-Шаудера уравнений с компактными операторами.
22. Фредгольмовы операторы.

- 23.Резольвентное множество и спектр оператора.
- 24.Классификация точек спектра.
- 25.Спектральное разложение компактного самосопряженного оператора.
- 26.Пространства основных и обобщенных функций.
- 27.Действия с обобщенными функциями.
- 28.Пространство обобщенных функций медленного роста.
- 29.Преобразование Фурье.
- 30.Решение дифференциальных уравнений в пространствах обобщенных функций.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1. Уравнения с частными производными	Математической кибернетики	нет	Изменений не требуется, протокол № 12 от 18.06.2019
2. Вариационное исчисление	Функционального анализа и аналитической экономики	нет	Изменений не требуется, протокол № 12 от 18.06.2019
3. Методы численного анализа	Веб-технологий и компьютерного моделирования	нет	Изменений не требуется, протокол № 12 от 18.06.2019

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**
на _____ / _____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № _____ от _____ 20_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
