Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе и образовательным инновациям
__________ О.И. Чуприс
«12» июля 2019 г.

Регистрационный № УД-7537/уч.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 80 03 Математика и компьютерные науки

Профилизация: Математика
Профилизация: Математика и дидактика математики

2019 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1- 31 80 03-2019 и учебных планов рег. №G31-017/уч., рег. № G31з-018/уч.; рег. №G31-088/уч., рег. № G31з-089/уч. от 11.04.2019

СОСТАВИТЕЛИ:

Радыно Евгений Мефодьевич, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Пыжкова Ольга Николаевна, заведующий кафедрой высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики (протокол № 12 от 18.06.2019);

Научно-методическим Советом БГУ

(протокол № 5 от 28.06.2019)

Зав. кафедрой ФАиАЭ, профессор _______________ А.В. Лебедев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель дисциплины – «**Функциональный анализ и интегральные уравнения»:**

– освоение студентами языка современной математики, владение общими конструкциями и умение их применять в теоретических и прикладных задачах.

– изложение основ теории меры и интеграла Лебега, изучение функциональных метрических пространств, теории нормированных, в частности, гильбертовых, пространств, теории линейных операторов и операторных уравнений.

– формирование у студентов основ современного математического мышления, обучение методам математических, изучение конкретных функционально-аналитических конструкций.

Задачи учебной дисциплины:

– формирование у студентов понятия меры и интеграла Лебега;

– изучение непрерывных, равномерно непрерывных отображений и отображений, удовлетворяющих условию Липшица, в функциональных пространствах;

– применение принципа сжимающих отображений к различным задачам;

– изучение основных свойств нормированных и гильбертовых пространств;

– изучение линейных ограниченных, в частности, интегральных, операторов;

– изучение компактных операторов и теории Рисса-Шаудера в гильбертовых пространствах;

– изучение альтернативы Фредгольма для интегральных уравнений в пространствах $L_2[a, b]$ и $C[a, b]$.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием (магистра).

Учебная дисциплина относится к модулю «Функциональный анализ и теория вероятностей» компонент учреждения высшего образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др. Наиболее тесной является связь данной дисциплины с такими дисциплинами как «Математическая и прикладная статистика», «Уравнения с частными производными», «Вариационное исчисление», «Методы численного анализа».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Функциональный анализ и интегральные

уравнения» должно обеспечить формирование следующих **специализированных компетенций:**
СК-3. Быть способным применять методы функционального анализа при решении задач естественных наук и экономики

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– основные понятия и результаты теории операторов в нормированных и гильбертовых пространствах;

– методы доказательств и алгоритмы решения задач функционального анализа.

уметь:

– выявлять конструкции функционального анализа в конкретных задачах;

– устанавливать свойства операторов в функциональных пространствах;

– применять результаты функционального анализа для решения теоретических и прикладных задач;

владеть:

– методами доказательств и аналитического исследования операторов и функционалов на ограниченность;

– методами доказательств и аналитического исследования операторов на компактность;

– методами исследования разрешимости и нахождения решения операторных уравнений;

– навыками самообразования и способами использования аппарата функционального анализа для проведения теоретических и прикладных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 1 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» отведено:
– для очной формы получения высшего образования – 108 часов, в том числе 54 аудиторных часов, из них: лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 16 часов, управляемая самостоятельная работа – 2 часа.
– для заочной формы получения высшего образования – 12 аудиторных часов, из них лекции – 8 часов, лабораторные занятия – 4 часа.
Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Линейные операторы в нормированных пространствах

Тема 1.1. Пространство линейных ограниченных операторов

1.1.1 Определение и основные свойства. Пространство линейных ограниченных операторов как линейное нормированное пространство. Топологии и виды сходимости в этом пространстве, сходимость по норме и сильная сходимость.

1.1.2 Полнота и примеры. Условие полноты пространства операторов. Примеры пространств операторов, порождаемых пространствами $L_p[a,b]$, l_p и $C[a,b]$. Различные топологии и виды сходимости в этих пространствах операторов.

Тема 1.2. Обратные операторы

1.2.1 Основные понятия. Левый и правый обратный операторы. Связь с существованием и единственностью решений уравнений. Обратный оператор. Непрерывно обратимые операторы.

1.2.2Существование и применения. Обратимость оператора, близкого к единичному оператору. Открытость множества обратимых операторов. Теорема Банаха об обратном операторе. Использование обратных операторов для решения линейных уравнений 2-го рода. Ряд Неймана.

Раздел 2. Непрерывные линейные функционалы и сопряженные операторы

Тема 2.1. Непрерывные линейные функционалы

2.1.1 Основные понятия и общий вид в гильбертовом пространстве. Определение непрерывного линейного функционала на нормированном пространстве. Примеры непрерывных линейных функционалов на конечномерных пространствах, на пространствах $L_p[T,m]$, $L_p[a,b]$, l_p и $C[a,b]$. Теорема Ф. Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Примеры для пространств $L_2[T,m]$, $L_2[a,b]$, и l_2 .

2.1.2 Вопросы существования и общий вид в пространствах интегрируемых и непрерывных функций. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала. Неединственность продолжения. Примеры различных продолжений. Общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Общий вид линейных непрерывных функционалов в пространствах $L_p[T,m]$, $L_p[a,b]$, l_p и $C[a,b]$.

Тема 2.2. Сопряженные операторы.

2.2.1 Общая теория. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор и его свойства. Ограниченность оператора, сопряженного к ограниченному оператору. Равенство норм. Замыкание образа линейного ограниченного оператора. Связь существования и единственности решения исходного и сопряженного уравнений. Условие ограниченной обратимости оператора.

2.2.2 Примеры. Сопряженные операторы в конечномерном пространстве. Сопряженные операторы для матричных операторов в гильбертовых нормированных пространствах общего вида и пространствах l_p. Сопряженные операторы для интегральных операторов, операторов замены переменной и умножения на функцию в пространствах $L_p[T, m]$. Сопряженные интегральные уравнения.

Тема 2.3. Топологии в исходном и сопряженном пространстве.

2.3.1 Общая теория. Слабая сходимость. Рефлексивность. Критерий рефлексивности. Сопряженные операторы в рефлексивных пространствах. *-слабая сходимость. Компактность в *-слабой топологии замкнутого шара в сопряженном пространстве.

2.3.2 Конкретные функциональные пространства. Конкретные рефлексивные пространства: конечномерные пространства, пространство $L_p[T, m]$ и его частные случаи – $L_p[a, b]$ и l_p. Сопряженные операторы в этих пространствах. Конкретные нерефлексивные пространства – $C[a, b]$ и c_0. Несовпадение слабой и *-слабой сходимости в этих пространствах.

Раздел 3. Компактные операторы

Тема 3.1. Общая теория компактных операторов

3.1.1 Основные понятия. Определения и основные свойства компактных операторов. Некоторые виды и важные примеры компактных операторов в общих гильбертовых и банаховых пространствах и в конкретных пространствах – $L_p[T, m]$, $L_p[a, b]$, l_p и $C[a, b]$.

3.1.2 Операторы конечного ранга и интегральные операторы. Операторы конечного ранга в гильбертовых и банаховых пространствах. Примеры операторов конечного ранга в пространствах $L_p[a, b]$, l_p и $C[a, b]$. Компактность интегральных операторов в пространствах $L_p[a, b]$ и $C[a, b]$.

Тема 3.2. Уравнения с компактными операторами

3.2.1 Основы теории. Уравнения с компактными операторами. Основные особенности. Прикладные задачи, приводящие к уравнениям с компактными операторами. Теория Рисса – Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве.

3.2.2 Конкретные пространства и применения. Примеры уравнений с компактными операторами в конкретных гильбертовых пространствах $L_2[T, m]$, $L_2[a, b]$ и l_2. Применение теории Рисса – Шаудера к уравнениям с компактными операторами в гильбертовых пространствах $L_2[a, b]$ и l_2.

Тема 3.3. Интегральные уравнения Фредгольма

3.3.1 Пространства интегрируемых функций**.** Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений в пространстве $L_2[T, m]$. Частные случаи – системы алгебраических уравнений в конечномерном пространстве и пространстве l_2, интегральные уравнения в пространстве $L_2[a, b]$ и $C[a, b]$.

3.3.2 Пространства интегрируемых функций и условия применимости. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений в пространстве $C[a, b]$. Условия на ядро интегрального оператора, обеспечивающие выполнение альтернативы Фредгольма. Уравнения типа свертки.

Раздел 4. Операторы в гильбертовых пространствах

Тема 4.1. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах

4.1.1. Основные понятия и примеры. Определение сопряженных и самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Основные свойства. Примеры самосопряженных операторов в пространствах C^n, $L_2[T, m]$, $L_2[a, b]$ и l_2 .

Тема 4.2. Нормы самосопряженных операторов.

4.2.1. Квадратичная и билинейная формы самосопряженного оператора. Собственные значения самосопряженных операторов. Связь нормы самосопряженного оператора с квадратичной формой и собственными значениями.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов						Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	Количество часов УСР	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**Линейные операторы в нормирова-нных пространствах**	**8**			**4**			
1.1	Пространство линейных ограниченных операторов	4			2			Отчет по самостоятельной работе с устной защитой
1.2	Обратные операторы	4			2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой
2	**Непрерывные линейные функционалы и сопряженные операторы**	**12**			**6**			
2.1	Непрерывные линейные функционалы	4			2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой
2.2	Сопряженные операторы	4			2			
2.3	Топологии в исходном и сопряженном пространстве	4			2			
3	**Компактные операторы**	**12**			**4**			
3.1	Общая теория компактных операторов	4						
3.2	Уравнения с компактными операторами	4			2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой
3.3	Интегральные уравнения Фредгольма	4			2			Отчет по лабораторной работе с устной защитой
4.	**Операторы в гильбертовых пространствах**	**4**			**2**		**2**	
4.1	Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах	2						
4.2	Нормы самосопряженных операторов.	2			2		2	Контрольная работа
	Всего	**36**			**16**		**2**	

Заочная форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	**Линейные операторы в нормирова-нных пространствах**	**2**			**1**		
1.1	Пространство линейных ограниченных операторов	1					
1.2	Обратные операторы	1			1		Отчет по самостоятельной работе с устной защитой, собеседование
2	**Непрерывные линейные функционалы и сопряженные операторы**	**3**			**1**		
2.1	Непрерывные линейные функционалы	1					
2.2	Сопряженные операторы	1					
2.3	Топологии в исходном и сопряженном пространстве	1			1		Отчет по самостоятельной работе с устной защитой, собеседование
3	**Компактные операторы**	**2**			**1**		
3.1	Общая теория компактных операторов	1					
3.2	Уравнения с компактными операторами	1					
3.3	Интегральные уравнения Фредгольма				1		Отчет по самостоятельной работе с устной защитой, собеседование
4.	**Операторы в гильбертовых пространствах**	**1**			**1**		
4.1	Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах	1					
4.2	Нормы самосопряженных операторов.				1		Письменный отчет по самостоятельной работе
	Всего	**8**			**4**		

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. 2-е изд., перераб. и доп. Минск, Изд-во БГУ, 2006.
2. Антоневич А.Б., Мазель М.Х., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Учебное пособие. Минск, Изд-во БГУ, 2011.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит, 2004.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М., Высшая школа, 1982.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., Физматлит, 2002.

Перечень дополнительной литературы

1. Березанский Ю.М., Ус Г.Ю., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций. Киев, Выща школа, 1990.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. СПб., Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2002.
3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., Наука, 1979.
4. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск, Вышэйшая школа, 1978.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Для диагностики компетенций используется устно-письменная форма в виде устных докладов и отчетов по самостоятельно разрабатываемым темам, устных и письменных отчетов по самостоятельно разрабатываемому проекту, контрольной работы в аудитории, экзамен в устно-письменной форме. Задания к контрольным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Функциональный анализ и интегральные уравнения» учебным планом предусмотрен экзамен.

При формировании итоговой оценки используется рейтинговая оценка знаний студента, предусматривающая использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Формирование оценки за текущую успеваемость:

– устные доклады и отчеты по теме учебной дисциплины – 50 %;

– устные и письменные отчеты по содержанию и результатам разрабатываемых проектов – 50%.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов Вес оценка по текущей успеваемости составляет 40 %, экзаменационная оценка – 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 4.2. *Нормы самосопряженных операторов*

Вычислить норму заданного самосопряженного оператора непосредственно и с помощью собственных значений. Построить спектральное разложение компактного самосопряженного оператора в пространстве $L_2[a, b]$. Построить спектральное разложение компактного самосопряженного оператора в пространстве l_2.

Форма контроля – контрольная работа

Примерный перечень заданий для контрольной работы

1. Найти или оценить сверху норму заданного оператора.
2. Записать оператор, обратный к заданному, с использованием ряда Неймана. Вычислить первые два члена ряда.
3. Решить заданное уравнение с использованием обратного оператора.
4. Построить два различных продолжения на все пространство линейного непрерывного функционала, заданного на подпространстве.
5. Определить, задает ли предложенная формула линейный непрерывный функционал на заданном пространстве.
6. Найти оператор, сопряженный к заданному.
7. Определить, является ли компактным заданный оператор в пространстве $L_2[a, b]$.
8. Определить, является ли компактным заданный оператор в пространстве непрерывных функций.
9. Определить для заданного оператора, какой из случаев альтернативы Фредгольма для него выполняется.
10. Вычислить норму заданного самосопряженного оператора непосредственно и с помощью собственных значений.
11. Построить спектральное разложение компактного самосопряженного оператора в пространстве $L_2[a, b]$.
12. Построить спектральное разложение компактного самосопряженного оператора в пространстве l_2.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины (эвристический, проективный, практико-ориентированный)

При организации образовательного процесса используются:

практико-ориентированный подход, который предполагает ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;

метод группового обучения в форме организации малых групп (команд), работающих как над общими заданиями, так и над специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся, кроме подготовки к экзамену, подготовка к зачету

При изучении учебной дисциплины «Функциональный анализ и интегральные уравнения» рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

выполнение домашнего задания;

изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;

разработка самостоятельно выбранной темы курса, в том числе поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников, изучение материала, подготовка доклада;

доклад по самостоятельно выбранной теме курса.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Пространство линейных ограниченных операторов как линейное нормированное пространство.

2.Топологии и виды сходимости в этом пространстве(сходимость по норме и сильная сходимость).

3. Условие полноты пространства операторов. Примеры пространств операторов, порождаемых пространствами $L_p[a,b]$, l_p и $C[a,b]$.

4. Различные топологии и виды сходимости в этих пространствах операторов.

5. Левый и правый обратный операторы. Связь с существованием и единственностью решений уравнений.

6. Обратный оператор. Непрерывно обратимые операторы.

7. Обратимость оператора, близкого к единичному оператору. Открытость множества обратимых операторов.

8. Теорема Банаха об обратном операторе.

9. Непрерывные линейные функционалы: Основные понятия и общий вид в гильбертовом пространстве.

10. Определение непрерывного линейного функционала на нормированном пространстве. Примеры непрерывных линейных функционалов на конечномерных пространствах, на пространствах $L_p[T, m]$, $L_p[a,b]$, l_p и $C[a,b]$.

11. Теорема Ф. Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Примеры для пространств $L_2[T, m]$, $L_2[a,b]$, и l_2 .

13. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала.

14. Неединственность продолжения. Примеры различных продолжений.

15. Общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Общий вид линейных непрерывных функционалов в пространствах $L_p[T, m]$, $L_p[a,b]$, l_p и $C[a,b]$.

16. Сопряженное пространство. Сопряженный оператор и его свойства

17. Ограниченность оператора, сопряженного к ограниченному оператору. Равенство норм.

18. Замыкание образа линейного ограниченного оператора. Связь существования и единственности решения исходного и сопряженного уравнений.

19. Условие ограниченной обратимости оператора.

20. Сопряженные операторы в конечномерном пространстве.

21. Сопряженные операторы для матричных операторов в гильбертовых нормированных пространствах общего вида и пространствах l_p.

22. Сопряженные операторы для интегральных операторов, операторов замены переменной и умножения на функцию в пространствах $L_p[T, m]$.

23. Сопряженные интегральные уравнения.

24. Слабая сходимость. Рефлексивность. Критерий рефлексивности.

25. Сопряженные операторы в рефлексивных пространствах.

26. *-слабая сходимость. Компактность в *-слабой топологии замкнутого шара в сопряженном пространстве.

27. Конкретные рефлексивные пространства: конечномерные пространства, пространство $L_p[T, m]$ и его частные случаи – $L_p[a,b]$ и l_p. Сопряженные операторы в этих пространствах.

28. Конкретные нерефлексивные пространства – $C[a,b]$ и c_0. Несовпадение слабой и *-слабой сходимости в этих пространствах.

29. Определения и основные свойства компактных операторов.

30. Некоторые виды и важные примеры компактных операторов в общих гильбертовых и банаховых пространствах и в конкретных пространствах – $L_p[T, m]$, $L_p[a,b]$, l_p и $C[a,b]$.

31. Операторы конечного ранга в гильбертовых и банаховых пространствах.

32. Примеры операторов конечного ранга в пространствах $L_p[a, b]$, l_p и $C[a, b]$.

33. Компактность интегральных операторов в пространствах $L_p[a, b]$ и $C[a, b]$.

34. Уравнения с компактными операторами. Основные особенности.

35. Прикладные задачи, приводящие к уравнениям с компактными операторами.

36. Теория Рисса – Шаудера для уравнений с компактными операторами в гильбертовом пространстве.

37. Примеры уравнений с компактными операторами в конкретных гильбертовых пространствах $L_2[T, m]$, $L_2[a, b]$ и l_2.

38. Применение теории Рисса – Шаудера к уравнениям с компактными операторами в гильбертовых пространствах $L_2[a, b]$ и l_2.

39. Пространства интегрируемых функций.

40. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений в пространстве $L_2[T, m]$.

41. Частные случаи – системы алгебраических уравнений в конечномерном пространстве и пространстве l_2, интегральные уравнения в пространстве $L_2[a, b]$ и $C[a, b]$.

42. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений в пространстве $C[a, b]$. Условия на ядро интегрального оператора, обеспечивающие выполнение альтернативы Фредгольма. Уравнения типа свертки.

43. Определение сопряженных и самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Основные свойства.

44. Примеры самосопряженных операторов в пространствах C^n, $L_2[T, m]$, $L_2[a, b]$ и l_2.

45. Квадратичная и билинейная формы самосопряженного оператора.

46. Собственные значения самосопряженных операторов. Связь нормы самосопряженного оператора с квадратичной формой и собственными значениями.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1. Математическая и прикладная статистика	Функционального анализа и аналитической экономики	нет	Изменений не требуется, протокол № 12 от 18.06.2019
2. Уравнения с частными производными	Математической кибернетики	нет	Изменений не требуется, протокол № 12 от 18.06.2019
3. Вариационное исчисление	Функционального анализа и аналитической экономики	нет	Изменений не требуется, протокол № 12 от 18.06.2019
4. Методы численного анализа	Веб-технологий и компьютерного моделирования	нет	Изменений не требуется, протокол № 12 от 18.06.2019

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
________________________________ (протокол № ____ от ________ 201_ г.)

Заведующий кафедрой
_______________________ ________________ ____________________

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
_______________________ ________________ ____________________