ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЯ ШАЗИ С ПОСТОЯННЫМИ ПОЛЮСАМИ В ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

Е. В. Громак (Минск, Беларусь)

Известно, что уравнения Пенлеве и их высшие аналоги при специальных значениях параметров интегрируется или допускают частные решения в специальных функциях.

Уравнение Шази [1] с шестью постоянными полюсами a_k, которые конечны и различны, имеет вид

$$y''' = \sum_{k=1}^{6} \frac{y'y'' + A_k(y')^3 + B_k(y')^2 + C_k y'}{y - a_k} + Dy'' + Ey' + \prod_{k=1}^{6}(y - a_k) \sum_{k=1}^{6} \frac{F_k}{y - a_k}. \quad (1)$$

Известна также система Шази $(A - F)$ относительно 26 неизвестных функций A_k, B_k, C_k, D, E, F_k, решение которой, по утверждению Шази [1], определяет необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных критических точек у уравнения Шази. В настоящей работе, продолжая исследования [2], мы приводим условия, при выполнения которых уравнение Шази (1) с постоянными полюсами a_k интегрируется в эллиптических функциях.

Теорема *Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют системе Шази $(A - F)$, полюсы a_k удовлетворяют условию*

$$6s_4 - 3s_3a_5 + s_2a_5^2 + (-3s_3 + 4s_2a_5 - 3s_1a_5^2)a_6 + (s_2 - 3s_1a_5 + 6a_5^2)a_6^2 = 0,$$

где $s_1, \ldots, s_4$ – основные симметрические многочлены относительно $a_1, \ldots, a_4$. Пусть A_k определяются из соотношений

$$A_j = 1/(a_5 - a_j) + 1/(a_6 - a_j), \quad j = 1, \ldots, 4,$$
$$A_5 = 1/(a_1 - a_5) + 1/(a_2 - a_5) + 1/(a_3 - a_5) + 1/(a_4 - a_5) + 2/(a_5 - a_6),$$
$$A_6 = 1/(a_1 - a_6) + 1/(a_2 - a_6) + 1/(a_3 - a_6) + 1/(a_4 - a_6) + 2/(a_6 - a_5).$$

Если при этом $B_k = 0$, $k = 1, \ldots, 6$, то уравнение (1) интегрируется в эллиптических функциях и имеет общий интеграл, определяемый уравнением $y'^2 = K_1P(y) + K_2Q(y) + R(y)$, где K_1, K_2 - произвольные постоянные, $P(y)$, $Q(y)$, $R(y)$ - полиномы по y не выше четвертой степени с постоянными коэффициентами.

Заметим, что третья произвольная постоянная получается разделением переменных и интегрированием. Также мы приводим явное выражение коэффициентов полиномов $P(y)$, $Q(y)$, $R(y)$ через полюсы a_k.

Литература

1. *Chazy J.* Sur les équations différentielles du troisième ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. *Acta Math.* **34** (1911), P.317-385.

2. *Е.В. Громак* Об интегрировании уравнения Шази в специальных функциях. *Тезисы доклада международной конференции AMADE, 12-17 сентября 2011 г., Минск, Беларусь, с. 51-52.*