О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В. И. Громак (Минск, Беларусь)
vgromak@gmail.com

В настоящее время существуют различные подходы к построению дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве. Это прежде всего метод изомонодромной деформации линейных систем, метод аффинных симметрий, непосредственное построение аналогов уравнений Пенлеве из гамильтоновых систем. Однако, по-видимому, первым был метод построения высших аналогов уравнений Пенлеве на основе симметрийных редукций из иерархии уравнений Кортевега - де Фриза (KdV) [1].

Для построения обобщенных уравнений Пенлеве рассмотрим уравнение

$$_{2n}\widetilde{P}_2 \equiv \left(\frac{d}{dz} + 2w\right)\widetilde{L}_n[w' - w^2] - zw - \alpha = 0,$$

где оператор $\widetilde{L}$ определяется рекуррентным соотношением

$$\widetilde{L}_{n+1} = D_x^{-1}\left((D_x^3 + (4u + \beta_n)D_x + 2u_x)\widetilde{L}_n\right) + \gamma_n,\ \widetilde{L}_1[u] = u,\ D_x = \frac{d}{dx},$$

а β_n и γ_n – параметры. Тогда при $n = 1$ имеем второе уравнение Пенлеве, а при $n > 1$ $({}_{2n}\widetilde{P}_2) \supseteq ({}_{2n}P_2)$. Аналогично, уравнение ${}_{2n}\widetilde{P}_1 \equiv \widetilde{L}_{n+1}[y] - \frac{z}{2} = 0$, определяет обобщение уравнения $({}_{2n}P_1)$. Рассмотрим некоторые свойства решений уравнений $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ и $({}_{2n}\widetilde{P}_1)$.

Решения уравнения $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ определяют решения уравнения $({}_{2n-2}\widetilde{P}_1)$ в соответствии с формулой $w' - w^2 = y$. Заметим также, что уравнение $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ имеет дискретную симметрию $S : (w, \alpha) \to (-w, -\alpha)$ и справедлива

Теорема. *Пусть* $w = w(z, \alpha, \beta, \gamma)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ *есть решение уравнения* $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$. *Тогда преобразования*

$$T : w \to \widetilde{w} = -w + (2\alpha + 1)/(2\widetilde{L}_n[-w' - w^2] - z),$$

$$T^{-1} : \widetilde{w} \to w = -\widetilde{w} + (2\widetilde{\alpha} - 1)/(2\widetilde{L}_n[\widetilde{w}' - \widetilde{w}^2] - z)$$

определяют решения уравнения $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ *при* $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) = (\alpha + 1, \beta, \gamma)$.

Уравнения $({}_{2n}\widetilde{P}_1)$, $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ имеют такие же доминантные члены, что и соответственно уравнения $({}_{2n}P_1)$, $({}_{2n}P_2)$. В силу этого порядок подвижных полюсов уравнений $({}_{2n}\widetilde{P}_1)$ и $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ равен соответственно 2 и 1. Уравнения $({}_{2n}\widetilde{P}_1)$ и $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ имеют гамильтонову структуру с полиномиальным гамильтонианом. Преобразования Беклунда T, T^{-1} для уравнения $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ определяют дискретную симметрию по параметру α. Для уравнения $({}_{2n}\widetilde{P}_2)$ могут быть построены автопреобразования Беклунда вида $T^{\alpha}ST^{-\alpha}$: $w(z, \alpha, \beta, \gamma)) \to \tilde{w}(z, \alpha, \beta, \gamma)$ для целых α. При этом возникает вопрос о характере решений $w(z, \alpha, \beta, \gamma)$ и $\tilde{w}(z, \alpha, \beta, \gamma)$. Например, $w(z, \alpha, \beta, \gamma) \equiv \tilde{w}(z, \alpha, \beta, \gamma), \alpha \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $w(z, \alpha, \beta, \gamma)$–рациональное решение. Также мы изучаем характер полюсов этих решений.

Литература

1.V. Gromak, I. Laine and S. Shimomura *Painlevé differential equations in the complex plane*, Wolter De Gruyter, Berlin-New-York, 2002.