Параллельный алгоритм решения блочно-трехдиагональных систем линейных уравнений

А.А. Згировский, Н.А. Лиходед, В.Л. Козлов

Белорусский государственный университет, Минск
E-mail: KozlovVL@bsu.by

При решении широкого ряда задач в лазерной радиофизике возникает необходимость моделирования различных процессов системой дифференциальных уравнений, решаемых с помощью численных методов, при этом возникают блочно-трехдиагональные системы уравнений. Такие системы возникают при решении уравнения Шредингера с кубической нелинейностью в цилиндрических координатах, моделирующего самофокусировку лазерного импульса в прозрачных диэлектриках, при численном решении уравнения теплопроводности в полупроводниковых лазерах и др. Упомянутые задачи можно моделировать системами вида

$$\begin{gathered}
\mathrm{C}_0 Y_0 - B_0 Y_1 = F_0, \\
-A_1 Y_0 + \mathrm{C}_1 Y_1 - B_1 Y_2 = F_1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-A_i Y_{i-1} + C_i Y_i - B_i Y_{i+1} = Fi, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
-A_N Y_{N-1} + C_N Y_N = F_N,
\end{gathered}$$

где A_i, B_i, C_i – матрицы размера $M \times M$, Y_i, F_i – M-мерные векторы.

Зачастую системы, возникающие в таких задачах, имеют огромные размерности и могут не помещаться в память обычного компьютера, поэтому возникает задача эффективного параллельного решения. Нами разработана методика параллельного алгоритма решения приведенной системы уравнений. Потенциально алгоритм будет иметь лучшие характеристики по быстродействию по сравнению с известными методиками. Предложенный алгоритм использует известную идею разбиения исходной системы на блоки, над которыми будут выполняться независимые вычисления. Трудность данного подхода заключается в том, что изначально блоки не являются независимыми, и к ним нельзя применить известный последовательный алгоритм. Наше решение состоит в том, чтобы составить редуцированную систему уравнений, в которую войдут граничные неизвестные, входящие в уравнения разных блоков. Показано, что предложенный алгоритм является численно устойчивым, при выполнении определенных условий, которые выполняются в этих задачах.

Работа выполнялась в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем».