Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

_______________ О.И. Чуприс
«_12_» _____________ 2019 г.

Регистрационный № УД-7351/уч.

ВВЕДЕНИЕ В ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 80 03 Математика и компьютерные науки

профилизация Математика

2019 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 80 03-2019 и учебных планов №№ G31-017/уч., G31з-018/уч., утвержденных 11.04.2019.

СОСТАВИТЕЛЬ:

Вениамин Григорьевич Кротов – заведующий кафедрой теории функций механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕЦЕНЗЕНТ:

Валентин Викентьевич Гороховик– заведующий отделом нелинейного и стохастического анализа, член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой теории функций
(протокол № 9 от 18.06.2019)

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета
(протокол № 5 от 28.06.2019)

Зав.кафедрой теории функций Кротов В.Г. Кротов

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цель дисциплины «Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах»: повышение уровня профессиональной компетентности студентов, формирование понятия о технических возможностях одного из разделов современного анализа и роли преобразования Фурье в задачах естествознания.

Образовательная цель: изложение основ теории преобразования Фурье.

Развивающая цель: формирование у студентов умений использования преобразования Фурье.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах»:

– изучить основные технические средства современного гармонического анализа: максимальные функции, свертки, интерполяционные теоремы

– изучить основные свойства преобразования Фурье функций многих переменных на пространствах гладких и суммируемых функций;

– подготовить студентов к использованию преобразования Фурье в задачах математической физики.

В дисциплине «Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах» рассматриваются современные методы в гармоническом анализе и пространства суммируемых функций, как элементы базовой шкалы пространств, в которых действуют основные операторы гармонического анализа.

Подробно изучаются свойства максимальной функции Харди-Литтлвуда – одного из центральных технических средств в гармоническом анализе. Как первое приложение этого инструмента получены общие свойства аппроксимативных единиц и дано их приложение к решению некоторых задач математической физики. Далее изучена классическая интерполяционная теорема Рисса-Торина.

В основной части дисциплины изучается центральный объект гармонического анализа – преобразование Фурье, как оператор на классах бесконечно дифференцируемых и суммируемых функций и его отображающие свойства.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием (магистра).

Учебная дисциплина «Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах» относится к модулю по выбору 1 «Гармонический анализ и дифференциальные уравнения» компонента учреждения высшего образования.

Эта дисциплина опирается на знания, полученные при изучении дисциплин «Математический анализ», «Функциональный анализ» и «Теория функций комплексного переменного».

Магистр, освоивший содержание образовательной программы магистратуры по специальности 1-31 80 03 «Математика и компьютерные науки», должен обладать следующими специализированными компетенциями:

СК-2. Быть способным использовать методы компьютерного моделирования на основе современных методик численного анализа прикладных дифференциальных задач.

СК-5. Быть способным применять современные методы гармонического анализа и дифференциальных уравнений в задачах естественных наук и экономики.

В результате изучения дисциплины «Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах» обучаемый должен:

знать:

– основные аппроксимационные процессы в пространствах суммируемых функций;

– понятия максимальной функции, свертки, интерполяции операторов ;

– определение и свойства преобразования Фурье;

уметь:

– использовать свойства максимальных функций и аппроксимативных единиц для оценки операторов гармонического анализа;

– использовать основные свойства преобразования Фурье;

– использовать теоретические и практические навыки основ гармонического анализа в математике;

владеть:

– основными понятиями гармонического анализа;

– методами доказательств свойств преобразования Фурье;

– навыками самообразования и способами использования аппарата преобразования Фурье для проведения математических исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 1 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 108 часов, в том числе 52 аудиторных часов, из них: лекции – 36 часов, лабораторные занятия – часов 12 , управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

– для заочной формы получения высшего образования – 108 часов, в том числе 12 аудиторных часов, из них 8 часов лекции, 4 часа лабораторные занятия.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

ТЕМА 1. Пространства суммируемых функций

Плотные классы в L^p. Теорема об общем виде линейных функционалов в L^p. Теорема о слабой компактности шаров в L^p.

Пространства L^p на евклидовых пространствах. Полярные координаты. Плотность непрерывных функций. L^p-непрерывность. Плотность ступенчатых функций.

ТЕМА 2. Максимальные функции и аппроксимативные единицы

Средние Стеклова. Максимальная функция Харди–Литтлвуда. Лемма о покрытиях. Неравенство слабого типа. L^p-неравенства.

Общие аппроксимативные единицы. Сходимость в пространствах суммируемых функций. Оценки для аппроксимативных единиц. Сходимость почти всюду. Основная лемма вариационного исчисления.

Примеры аппроксимативных единиц: средние Стеклова, ядро Пуассона для полупространства, ядро Гаусса-Вейерштрасса.

ТЕМА 3. Интерполяция операторов

Линейные операторы в пространствах суммируемых функций. Линеаризация нормы оператора. Лемма Адамара. Теорема Рисса-Торина о выпуклости нормы оператора.

ТЕМА 4. Преобразование Фурье на классе Шварца

Свертки на евклидовых пространствах и их существование. Элементарные неравенства для сверток. Неравенство Юнга.

Мультииндексы и дифференциальные операторы. Класс Шварца. Преобразование Фурье и его простейшие свойства. Преобразование Фурье и операции анализа. Формула обращения для гладких функций. Формула Планшереля для гладких функций.

ТЕМА 5. Преобразование Фурье суммируемых функций

Простейшие оценки. Формула обращения для L. Преобразование Фурье на L^2. Теорема Планшереля. Преобразование Фурье для L^p. Свойства преобразования Фурье на L^p.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная (вечерняя) форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Пространства суммируемых функций	8			2			Отчеты
2	Максимальные функции и аппроксимативные единицы	10			2		1	Отчеты
3	Интерполяция операторов	6			2		1	Отчеты
4	Преобразование Фурье на классе Шварца	6			2		1	Отчеты
5	Преобразование Фурье суммируемых функций	6			4		1	Отчеты
	Всего по дисциплине	36			12		4	

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Заочная (вечерняя) форма получения образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Пространства суммируемых функций	1						Отчеты
2	Максимальные функции и аппроксимативные единицы	1			1			Отчеты
3	Интерполяция операторов	2			1			Отчеты
4	Преобразование Фурье на классе Шварца	2			1			Отчеты
5	Преобразование Фурье суммируемых функций	2			1			Отчеты
	Всего по дисциплине	**8**			**4**			

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. L.Grafakos, Classical Fourier Analysis, Springer, New-York, 2008. – 494 с.
2. L.Grafakos, Modern Fourier Analysis, Springer, New-York, 2009.– 524 с.
3. E.M.Stein, R.Shakarchi, Fourier analysis/ An introduction, Princeton Princeton Univ. Press. 2003.– 326 с.

Перечень дополнительной литературы

4. И.Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., Мир, 1973.– 344 с.
5. И.Стейн, Г.Вейсс, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, М., Мир, 1974.– 332 с.

Перечень используемых средств диагностики и методика формирования итоговой оценки

Контроль освоения практических навыков осуществляется в форме отчетов.

Формой текущей аттестации по дисциплине учебным планом предусмотрен – экзамен.

Итоговая оценка формируется на основе 3-х документов:

1. Правила проведения аттестации (постановление №53 от 29.05.2012 г.).
2. Положение о рейтинговой системе БГУ (ред. 2015 г.).
3. Критерии оценки студентов (10 баллов).

Весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний и текущей аттестации в рейтинговую оценку:

Формирование оценки за текущую успеваемость:

– отчеты – 100 %.

Рейтинговая оценка по дисциплине рассчитывается на основе оценки текущей успеваемости и экзаменационной оценки с учетом их весовых коэффициентов. Вес оценка по текущей успеваемости составляет 50 %, экзаменационная оценка – 50 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

ТЕМА 1. Пространства суммируемых функций (2 часа).

Задача 1. Доказать, что в случае $\mu(X) < \infty$ для любой функции $f \epsilon L^\infty$

$$\lim_{p\to\infty} |f|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}.$$

Задача 2. Доказать, что

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf_{A\subset X,\mu(A)=0} \sup_{x\in X\setminus} A|f(x)|.$$

и существует такое множество $A \subset X, \mu(A) = 0$, что

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in X\setminus} A|f(x)|.$$

Задача 3. Проверить, что L^∞ является полным линейным нормированным пространством с нормой $\|f\|_{L^\infty}$.

Задача 4. Показать, что 1) из сходимости по норме пространства L^p следует слабая сходимость, 2) обратное утверждение неверно.

(Форма контроля – отчеты).

ТЕМА 2. Максимальные функции и аппроксимативные единицы (2 часа).

Задача 1. Показать, что максимальная функция Харди-Литтлвуда не может принадлежать L^1 глобально.

Задача 2. Показать, что максимальная функция Харди-Литтлвуда не может принадлежать L^1 локальна.

Задача 3. Изучение поведение аппроксимативных единиц, порожденных функцией $min\ \{1, |x|^{-\alpha}\}$.

Задача 4. Изучение поведение аппроксимативных единиц, порожденных функцией $|x|^{-\alpha}X_B$ (B – единичный шар).
(Форма контроля – отчеты).

ТЕМА 3. Интерполяция операторов (2 часа).

Задача 1. Вычислить L^{p_0} – норму функции φ_{iy} в доказательстве теоремы Рисса-Торина.

Задача 2. Вычислить L^{q_0} – норму функции μ_{iy} в доказательстве теоремы Рисса-Торина.

Задача 3. Провести доказательство теоремы Рисса-Торина в случае $p <\propto, q' = \infty$.

Задача 4. Провести доказательство теоремы Рисса-Торина в случае $p =\propto, q' = \infty$.

(Форма контроля – отчеты).

ТЕМА 4. Преобразование Фурье на классе Шварца (2 часа).

Задача 1. Показать, что операция свертки коммутативна.

Задача 2. Показать, что операция свертки ассоциативна.

Задача 3. Показать, что свертка коммутирует со сдвигами.

Задача 4. Провести доказательство теоремы о взаимодействии преобразования Фурье с дифференциальными операторами.

Задача 5. Доказать неравенства для функции g в лемме о принадлежности свертки классу Шварца.

(Форма контроля – отчеты).

ТЕМА 5. Преобразование Фурье суммируемых функций (2 часа).

Задача 1. Доказать теорему об обращении преобразования Фурье в терминах суммируемости интегралов Фурье в L^p.

Задача 2. Доказать теорему об обращении преобразования Фуре в терминах суммируемости интегралов почти всюду.

(Форма контроля – отчеты).

Тематика лабораторных занятий

Занятие 1. Пространства суммируемых функций.

Занятие 2. Максимальные функции и аппроксимативные единицы.

Занятие 3. Интерполяция операторов.

Занятие 4. Преобразование Фурье на классе Шварца.

Занятие 5. Преобразование Фурье суммируемых функций.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются:

- ***эвристический подход,*** который предполагает выбор содержания и способа его организации при подготовке образовательных продуктов (сообщений, докладов, презентаций) по проблемам методологии математики и их соотнесения и многообразием решений большинства профессиональных задач и жизненных проблем; творческую самореализацию обучающихся в процессе создания образовательных продуктов; индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;

- ***методы и приемы развития критического мышления***, которые представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимании информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления.

Методические рекомендации по организации управляемой самостоятельной работы магистрантов

Основными направлениями управляемой самостоятельной работы в овладении знаниями учебной дисциплины «Дополнительные главы анализа» являются:

• первоначально подробное ознакомление с программой учебной дисциплины;

• ознакомление со списком рекомендуемой литературы по дисциплине в целом и ее разделам, наличие ее в библиотеке и других доступных источниках, изучение необходимой литературы по теме, подбор дополнительной литературы;

• изучение и расширение лекционного материала преподавателя за счет специальной литературы, консультаций;

• подготовка к зачету.

Тем самым, имеется в виду постепенное превращение обучения в самообучение, когда магистрант должен получать знания главным образом за счет креативной самостоятельной работы, самостоятельно осуществляя поиск необходимой информации и созидательно прорабатывая ее с тем, чтобы произвести необходимые умозаключения и получить результаты. В этом случае, выполняя учебные задачи, магистранты самостоятельно приобретают новые знания, навыки и умения (в частности, умение анализировать и принимать решения в нестандартных ситуациях), что очень важно для эффективной будущей профессиональной деятельности.

Самостоятельная работа для магистрантов важнейшая часть учебного процесса. Решение задач по подготовке квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, невозможно без наличия навыков самостоятельной работы магистрантов.

Цель самостоятельной работы магистрантов:

– углубление фундаментальных и профессиональных знаний, умений и навыков в соответствии с профилем деятельности;

– сознательно и самостоятельно осуществлять работу с учебным и научным материалом;

– совершенствование опыта исследовательской и созидательной деятельности;

– совершенствование навыков творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального формата;
– укрепление навыков самоорганизации и самовоспитания для получения навыков перманентного повышения профессионализма.

Для достижения целей самостоятельной работы магистрантов необходимо решение следующих **задач**:
– развитие творческого мышления;
– овладение основными методами исследовательской работы;
– приобретение магистрантами через самостоятельную деятельность собственного опыта и профессиональных навыков.
– углубление, расширение, систематизация и закрепление полученных знаний и умений;
– выработка навыка использования и анализа источниковой базы и специальной литературы;
– формирование исследовательских навыков и умений;
– овладение способностью использовать собранную в ходе самостоятельной работы информацию в учебных целях.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1.Плотные классы в L^p.

2.Теорема об общем виде линейных функционалов в L^p.

3.Теорема о слабой компактности шаров в L^p.

4.Пространства L^p на евклидовых пространствах.

5.Полярные координаты.

6.Плотность непрерывных функций. L^p-непрерывность.

7.Плотность ступенчатых функций.

8.Средние Стеклова. Максимальная функция Харди–Литтлвуда.

9.Лемма о покрытиях. Неравенство слабого типа. L^p-неравенства.

10.Общие аппроксимативные единицы. Сходимость в пространствах суммируемых функций.

11.Оценки для аппроксимативных единиц. Сходимость почти всюду. Основная лемма вариационного исчисления.

12.Примеры аппроксимативных единиц: средние Стеклова, ядро Пуассона для полупространства, ядро Гаусса-Вейерштрасса.

13.Линейные операторы в пространствах суммируемых функций. Линеаризация нормы оператора.

14.Лемма Адамара. Теорема Рисса-Торина о выпуклости нормы оператора.

15.Свертки на евклидовых пространствах и их существование. Элементарные неравенства для сверток. Неравенство Юнга.

16.Мультииндексы и дифференциальные операторы. Класс Шварца.

17.Преобразование Фурье и его простейшие свойства.

18.Преобразование Фурье и операции анализа. Формула обращения для гладких функций.

19.Формула Планшереля для гладких функций.

20. Простейшие оценки. Преобразование Фурье на L^2.
21. Теорема Планшереля.
22. Преобразование Фурье для L^p.
23. Свойства преобразования Фурье на L^p.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Пространства Соболева	Кафедра теории функций	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 9 от 18.06.2019)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
на _____/_____ учебный год

№п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
(протокол № ____ от ________ 20_ г.)

Заведующий кафедрой

_______________________ _________________ _________________
(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

_______________________ _________________ _________________
(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)