БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.5

Бондарев
Сергей Александрович

Точки Лебега и аппроксимация Лузина для соболевских функций на метрических пространствах

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный,
комплексный и функциональный анализ

Минск, 2019

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель — **Кротов Вениамин Григорьевич,**
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой теории функций
Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Ровба Евгений Алексеевич,**
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой фундаментальной
и прикладной математики
Гродненского государственного университета
имени Янки Купалы;

Лебедев Андрей Владимирович,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой функционального анализа
и аналитической экономики
Белорусского государственного университета.

Оппонирующая организация — **ГНУ "Институт математики НАН Беларуси"**.

Защита состоится **20 декабря 2019 г.** в **10.00** часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407, телефон ученого секретаря (017) 209-57-09.

Почтовый адрес: пр-т Независимости 4, Минск, 220030.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан “ ” ноября 2019 г.

Учёный секретарь
совета по защите диссертаций
кандидат физико-математических наук
доцент Е.М. Радыно

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена обобщению двух фундаментальных результатов теории функций действительного переменного — теоремам Лузина и Лебега. Для функций из классов соболевского типа эти теоремы являются примером так называемых тонких свойств функций. Тонкими обычно называют те свойства функций, которые не являются инвариантными относительно изменения значений на множестве меры нуль. Для таких свойств основной задачей является классификация исключительных множеств (на которых эти свойства не выполнены) по их размерам. Это контрастирует с обычными задачами теории функций, где множествами меры нуль принято пренебрегать.

Классическая теорема Лебега утверждает, что для любой локально интегрируемой на $\mathbb{R}^n$ функции, предел средних интегральных по шарам с центром в точке совпадает со значением функции в этой точке почти всюду. Важность этого результата, в частности, состоит в том, что он дает естественное определение значений функции $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ почти всюду.

Теорема Лузина утверждает, что любая измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция f обладает C-свойством — f является непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры.

Работа посвящена обобщению этих двух теорем для классов Соболева $M^p_\alpha(X)$ на метрическом пространстве X, а также исследованию вопросов о массивности возникающих исключительных множеств.

Принципиальным является рассмотрение случая несуммиуемых функций, для которого не работают классические методы и приходится использовать сравнительно новую технику, использующую постоянные наилучшего приближения в пространстве L^p.

Не претендуя на полноту, отметим некоторых авторов, интересовавшихся данными вопросами: А. Кальдерон, Х. Федерер, В. Зимер, А. Зигмунд, Х. Уитни, Т. Бэгби, Д. Свансон, П. Хайлаш, Б. Боярский, П. Стржелецкий. В основном их исследования были посвящены изучению функций из пространств Соболева $W^p_\alpha(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^n$ — более или менее регулярная область.

В последние 25 лет такая проблематика изучалась в более общей ситуации пространств Соболева $M^p_\alpha(X)$, где X — метрическое пространство с мерой: П. Хайлаш, Ю. Киннунен, О. Мартио, В. Латвала, В.Г. Кротов, М.А. Прохорович.

Интерес к более общим структурам пространств однородного типа связан с тем, что множество важных классических результатов анализа на евклидовых пространствах удалось перенести на произвольные метрические пространства с мерой, не накладывая при этом особо ограничительных условий на связь метрики и меры, кроме условия удвоения.

Во всех исследованных ранее случаях предполагалось, что $0 < \alpha \leq 1$ (или иногда $\alpha > 0$, в зависимости от ситуации) и $p \geqslant 1$. Диссертация посвящена изучению вопросов, подобных рассмотренным выше, для обобщенных пространств соболевского типа $M^p_\alpha(X)$, $\alpha > 0$, на метрическом пространстве X с мерой. Однако при этом сняты ограничения снизу на p: везде, если не оговорено противное, предполагается, что $p > 0$. Другими словами, это означает, что теперь мы имеем дело с несуммируемыми функциями в общем случае. Это потребовало пересмотра понятий, которые использовались для суммируемых функций.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами и темами

Тема диссертации соответствует приоритетному направлению фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция», подпрограмма «Математические методы»). Работа над диссертацией проводилась на кафедре теории функций БГУ в рамках государственной программы научных исследований 2016–2020 гг., тема 1.4.02.1 «Функциональные пространства и их приложения к задачам естественных наук и экономики», номер гос. регистрации № 20161715, финансовый номер № 765/25.

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является исследование тонких свойств функций из классов соболевского типа на метрическом пространстве.

Основные задачи диссертации состоят в следующем:

1. Получить оценки массивности для исключительного множества в теореме Лебега в терминах емкостей, включая случай $p > 0$.

2. Получить оценки массивности для исключительного множества в теореме Лебега в терминах произвольной внешней меры, включая случай $p > 0$ и критический случай $\gamma = \alpha p$.

3. Получить оценки массивности для исключительного множества в теореме Лузина в терминах произвольной внешней меры, включая случай $p > 0$.

Объектом исследования являются функции соболевского типа на метрическом пространстве с мерой. Предметом исследования являются тонкие свойства функций, включающие в себя теоремы Лебега и Лузина для пространств Хайлаша–Соболева.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Новизна и основное содержание этих результатов заключаются в следующем.

1. Получены оценки массивности для исключительного множества в теореме Лебега для классов $M^p_\alpha(X)$ в терминах емкостей, включая ранее не исследованный случай $p > 0$.

2. Получены оценки массивности для исключительного множества в теореме Лебега для классов $M^p_\alpha(X)$ в терминах произвольной внешней меры, включая ранее не исследованный случай $p > 0$.

3. Получены оценки массивности для исключительного множества в теореме Лузина в терминах произвольной внешней меры, включая ранее не исследованный случай $p > 0$.

Положения, выносимые на защиту

1. Оценки массивности исключительного множества в теореме Лебега для функций из классов $M^p_\alpha(X)$ в терминах емкостей, включая случай $p > 0$.

2. Оценки массивности исключительного множества в теореме Лебега для функций из классов $M^p_\alpha(X)$ в терминах внешних мер, включая случай $p > 0$ и критический случай $\gamma = \alpha p$.

3. Оценки массивности исключительного множества в теореме Лузина для функций из классов $M^p_\alpha(X)$ в терминах внешних мер, включая случай $p > 0$.

Личный вклад соискателя

Основные результаты диссертации получены автором лично. Постановка задач и анализ полученных результатов осуществлялись совместно с научным руководителем доктором физико-математических наук профессором Кротовым В.Г.

Результаты Прохоровича М.А. не входят в число основных результатов диссертации и являются следствиями более общих утверждений, полученных соискателем самостоятельно.

Апробация результатов диссертации

Результаты, вошедшие в диссертационную работу, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. Семинар по математическому анализу кафедры теории функций БГУ (руководитель — доктор физико-математических наук, профессор Э.И. Зверович);

2. Международная конференция по функциональным пространствам и теории приближения функций, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского, 25 – 29 мая 2015 г., Москва, Россия;

3. Международная конференция «Harmonic analysis and approximation», 12–18 сентября 2015 г. — Цахкадзор, Армения;

4. Семинар группы «Функциональные пространства» университета им. Фридриха Шиллера, 3 декабря 2015 г., 9 декабря 2016 г., 14 декабря 2017 г., 7 декабря 2018 г., Йена, Германия;

5. Международная научная конференция «XII Белорусская математическая конференция БМК–2016», 5–10 сентября 2016 г., Минск, Беларусь;

6. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2017», 10–14 апреля 2017 г., Москва, Россия;

7. Международная конференция «New perspectives in the theory of function spaces and their applications (NPFSA-2017)», 17–23 сентября, 2017, Бендлево, Польша;

8. Семинар по чистой математике школы информатики и математики Кильского университета, 20 июня, 2018, Англия.

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 11 научных работах, из которых 4 — статьи в научных изданиях в соответствии с пунктом 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом **2.65** авторского листа), 6 — статьи в сборниках материалов научных конференций, 1 — тезисы доклада на научной конференции.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики, четырех глав, заключения и библиографического списка.

Первая глава содержит аналитический обзор литературы по теме диссертационного исследования.

Вторая глава носит вспомогательный характер. Здесь вводятся все понятия, необходимые для дальнейшего изложения. В частности, вводятся емкости и меры Хаусдорфа, в терминах которых в следующих главах будет измеряться массивность исключительных множеств.

В третьей главе исследуется точки Лебега для функций из соболевских классов $M^p_\alpha(X)$, включая случай $p > 0$. В этой главе также получены оценки исключительного множества в терминах емкости и внешней меры. Рассмотрена теорема Лебега в критическом случае.

Четвертая глава посвящена исследованию аппроксимации Лузина для пространств $M^p_\alpha(X)$. Получен аналог теоремы о C-свойства Лузина, включающий в себя не только ранее исследованные случаи, но и случай $p > 0$.

Полный объем диссертации составляет 94 страницы. Библиографический список содержит 110 наименований, включая собственные публикации соискателя ученой степени.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Глава 1 содержит аналитический обзор основных результатов, посвященных теоремам Лебега и Лузина для классов Соболева $W^p_k(\mathbb{R}^n)$ и их аналогов на метрических пространствах $M^p_\alpha(X)$. Отдельно выделена теорема о точках Лебега в критическом случае.

Глава 2 носит вспомогательный характер. Здесь вводятся все необходимые далее обозначения и определения. В частности, рассмотрены пространства однородного типа, способы замены интегральных средних в случае несуммируемой функции и измерители массивности исключительных множеств.

Пусть (X,d) — метрическое пространство с метрикой d. Обозначим через

$$B(x,r)=\{y\in X : d(x,y)<r\}$$

открытый шар с центром в точке x. Радиус шара B будем обозначать через r_B.

Мера μ на X называется борелевской, если класс μ-измеримых множеств содержит все борелевские множества.

Всюду далее мы будем работать только с σ-аддитивными борелевскими мерами. Также будем предполагать, что мера любого шара $B\subset X$ положительна и конечна.

Тройка (X,d,μ) называется пространством однородного типа, если метрика и мера связаны условием удвоения, т.е. существует положительная постоянная $a_\mu\geq 1$ такая, что неравенство

$$\mu(B(x,2r))\leq a_\mu\mu(B(x,r))$$

выполнено для любого шара $B(x,r)$.

Условие удвоения можно записать в количественной форме: существует постоянная $\gamma>0$, такая, что

$$\mu(B(x,R))\leq c\left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu(B(x,r)) \tag{1}$$

выполняется для любого $x\in X$ и любых $0<r\leq R$. В качестве γ можно взять $\log_2 a_\mu$. Показатель γ играет роль размерности пространства.

В неравенстве (1) и всюду далее, если не оговорено противное, через c мы обозначаем положительную постоянную, точное значение которой для нас не существенно. Более того, ее точное значение может меняться даже в пределах одной строки.

Будем также писать $A\lesssim B$, если соответствующее неравенство выполнено с некоторой положительной постоянной: $A\leq cB$.

Будем обозначать через $L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ множество всех локально интегрируемых в p-й степени функций. Другими словами, $f\in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$, если $f\in L^p(B(x,r))$ для любых $x\in X$ и $r>0$.

Также введем обозначение для средних интегральных функции $f\in L^1_{\mathrm{loc}}$ по шару $B\subset X$

$$f_B=\fint_B f\,d\mu=\frac{1}{\mu B}\int_B f\,d\mu.$$

Через $C(X)$ обозначаем множество всех непрерывных функций на X. Отметим тот факт, что мера μ регулярна тогда и только тогда, когда класс $C(X)$ плотен в $L^p(X)$.

Определим также классы Гельдера $H^\alpha(X)$ при $\alpha > 0$.

$$H^\alpha(X) = \left\{ f \in L^\infty(X) : \|f\|_{H^\alpha(X)} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{[d(x,y)]^\alpha} < \infty \right\}.$$

Напомним определение классических пространств Соболева $W_k^p(\mathbb{R}^n)$. Для этого сначала определим обобщенные производные Соболева–Шварца. Обозначим через $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ класс всех бесконечно дифференцируемых функций с ограниченным носителем. Пусть заданы $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и мультииндекс $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, не все координаты которого равны нулю. Будем говорить, что g является слабой производной f порядка α, если для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)\, dx.$$

Здесь мы придерживаемся стандартных обозначений для дифференциального оператора и длины мультииндекса $|\alpha|$

$$D^\alpha = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{\alpha_i}, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Договоримся также, что $D^\alpha f = f$, если $\alpha = (0, \ldots, 0)$. С помощью интегрирования по частям легко убедиться, что для функции $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ обычные частные производные порядка α с $|\alpha| \le k$ совпадают со слабыми производными.

Класс Соболева $W_k^p(\mathbb{R}^n)$ при $1 \le p \le \infty, k \in \mathbb{N}$ определяется как множество всех (классов эквивалентности) функций $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, которые имеют слабые производные порядка $D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ для всех мультииндексов α с $|\alpha| \le k$. Введенное таким образом пространство является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{W_k^p(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Как известно, пространство $W_1^\infty(\mathbb{R}^n)$ состоит из липшицевых функций и потому естественным образом обобщается на случай произвольного метрического пространства X. В 1996 г. П. Хайлаш предложил конструкцию, позволяющую обобщить пространство $W_1^p(\mathbb{R}^n)$ на произвольное метрическое пространство при $p > 1$, используя похожую аналогию. Позднее Д. Янг ввел дробные классы Соболева $M_\alpha^p(X)$ для метрического пространства X. Ниже приведем определение этих пространств.

Сначала введем понятие α-градиента. Пусть $\alpha > 0$ и $0 < p < \infty$. Для функции $f \in L^p(X)$ обозначим через $D_\alpha[f]$ класс всех неотрицательных μ-измеримых функций, таких, что условие

$$|f(x) - f(y)| \leq [d(x,y)]^\alpha \, [g(x) + g(y)]$$

выполнено почти всюду по мере μ. Элементы $D_\alpha[f]$ будем называть α-градиентами функции f.

Введем шкалу пространств Соболева $M_\alpha^p(X)$

$$M_\alpha^p(X) = \{f \in L^p(X) : D_\alpha[f] \cap L^p(X) \neq \varnothing\}.$$

Эти пространства нормируются следующим образом (при $p < 1$ получаем квазинорму)

$$\|f\|_{M_\alpha^p(X)} = \|f\|_{L^p(X)} + \inf \|g\|_{L^p(X)}\,,$$

где точная нижняя грань берется по всем α-градиентам функции f.

Введенное таким образом пространство $M_1^p(\mathbb{R}^n)$ совпадает с классическим пространством Соболева $W_1^p(\mathbb{R}^n)$ при $p > 1$.

При $p < 1$ функция $f \in L^p(X)$ необязательно является интегрируемой, поэтому в данном случае понятие точки Лебега не определено, ведь интегральных средних может не существовать. Адекватной заменой интегральным средним могут служить так называемые постоянные наилучшего приближения для функции f в $L^p(B)$, B — некоторый шар, которые мы будем обозначать через $I_B^{(p)} f$. Дадим более точное определение. Можно показать, что для любых $p > 0$, шара $B \subset X$ и функции $f \in L^p(B)$ существует действительное число $I_B^{(p)} f$, для которого

$$\int_B |f(y) - I_B^{(p)} f|^p \, d\mu(y) = \inf_I \int_B |f(y) - I|^p \, d\mu(y). \tag{2}$$

Еще одной альтернативой интегральным средним в случае несуммируемой функции могут служить так называемые медианы измеримой функции f по множеству $E \subset X$ конечной меры

$$m_f^\delta(E) = \inf\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in E : f(x) > a\}) < \delta \mu(E)\},$$

при $0 < \delta \leq 1/2$.

Наконец введем так называемые измерители массивности исключительных множеств — вместимость, меру и размерность Хаусдорфа, а также емкости, порожденные классами $M^p_\alpha(X)$.

Будем называть неубывающую функцию $h:(0,1]\to(0,1]$ измеряющей, если $h(+0)=0$. Зададим $R>0$ и для любой измеряющей функции h введем соответствующую (h,R)-вместимость Хаусдорфа множества $E\subset X$

$$\mathbb{H}^h_R(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}h(r_i):E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}B(x_i,r_i),r_i<R\right\}. \tag{3}$$

Мера Хаусдорфа вводится следующим образом

$$\mathbb{H}^h(E)=\lim_{R\to+0}\mathbb{H}^h_R(E).$$

В случае степенной функции $h(r)=r^n$ мы получаем классическую n-мерную меру Хаусдорфа. Будем обозначать ее просто $\mathbb{H}^n$.

Для оценки исключительных множеств функции $f\in M^p_\alpha(X)$ мы, как правило, будем рассматривать измеряющие функции следующего вида

$$h(t)=\left(\frac{t^\alpha}{\varphi(t)}\right)^p, \tag{4}$$

где $\varphi:(0,1]\to(0,1]$ — положительная возрастающая функция, для которой $\varphi(t)t^{-\alpha}$ убывает.

Легко видеть, что $\mathbb{H}^h(E)=0$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{H}^h_\infty(E)=0$, где

$$\mathbb{H}^h_\infty(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}h(r_i):E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}B(x_i,r_i)\right\}$$

В степенном случае $h(r)=r^s$ можно определить размерность Хаусдорфа

$$\dim_{\mathbb{H}}(E)=\inf\{s:H^s(E)=0\}=\sup\{s:H^s(E)=\infty\}.$$

Иногда оценки проще получить в терминах так называемой модифицированной меры Хаусдорфа. Модифицированной R-вместимостью Хаусдорфа коразмерности h для множества $E\subset X$ называется

$$\mathcal{H}^h_R(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu(B(x_i,r_i))}{h(r_i)}:E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}B(x_i,r_i),\quad r_i<R\right\} \tag{5}$$

(точная нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества E счетными семействами шаров), а величина

$$\mathcal{H}^h(E)=\lim_{R\to+0}\mathcal{H}^h_R(E)$$

называется модифицированной мерой Хаусдорфа коразмерности h для E.

Внешней мерой будем называть функцию множества, удовлетворяющую свойствам монотонности и счетной субаддитивности. Последнее может выполняться даже с некоторой положительной постоянной. Более подробно, ν — внешняя мера, если

$$E \subset F \implies \nu(E) \le \nu(F),$$

$$\exists\, a_\nu \ge 1 : \nu\left(\bigcup_i E_i\right) \le a_\nu \sum_i \nu(E_i)$$

для любых множеств E, F, E_i из X.

Внешнюю меру будем называть регулярной в нуле, если для любого множества $E \subset X$ с $\nu(E) = 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $O \supset E$, для которого $\nu(O) < \varepsilon$.

Пусть задана измеряющая функция h. Мы будем использовать следующее условие, связывающее исходную меру μ и внешнюю меру ν: существует такая постоянная положительная c_ν, что выполнено неравенство

$$\nu(B) \le c_\nu \frac{\mu(B)}{h(r_B)} \tag{6}$$

для всех шаров B радиуса $r_B < 1$.

Еще одним инструментом для измерения массивности исключительных множеств являются емкости, порожденные функциональными пространствами. Емкости играют важную роль в теории соболевских пространств.

Введем $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$-емкость множества $E \subset X$

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = \inf\left\{\|f\|^p_{M^p_\alpha(X)} : f \ge 1 \text{ в окрестности } E\right\} \tag{7}$$

Справедлива следующая

Теорема 1 ([2]) *Емкость* $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$ *является внешней мерой и*

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = \inf\left\{\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(O) : E \subset O, O \textit{ открыто}\right\}.$$

Наибольший интерес для нас будут представлять множества нулевой емкости, так как именно они являются исключительными множествами во многих вопросах теории пространств Соболева. Ниже приведены оценки, которые показывают связь $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$-емкости и меры.

Теорема 2 ([2]) *Пусть* $0 < \alpha \le 1$, $x_0 \in X$, *тогда*
1) для любого $E \subset X$

$$\mu(E) \le \mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E),$$

2) при $0 < r \le 1$

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(B(x_0,r)) \lesssim r^{-\alpha p}\mu(B(x_0,r)),$$

3) при $0 < r \le 1/2$ *и* $\gamma = \alpha p$

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(B(x_0,r)) \lesssim \left[\ln\frac{1}{r}\right]^{1-p} r^{-\alpha p}\mu(B(x_0,r)).$$

Условие 1) показывает, что емкость является более тонким «измерителем», чем мера.

Глава 3 посвящена исследованию точек Лебега для функций из классов $M_\alpha^p(X)$. Дана оценка исключительного множества в терминах емкостей и внешней меры, включающей в себя меру Хаусдорфа(в том числе модифицированную). Получен результат о точках Лебега со скоростью. Показана эквивалентность использования средних интегральных и медиан в определении точек Лебега. Наконец, доказана теорема Лебега для классов $M_\alpha^p(X)$ в критическом случае.

Точка $x \in X$ называется точкой Лебега для функции $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$, если существует конечный предел

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} f\,d\mu = \lim_{r\to+0} f_{B(x,r)} = f^*(x).$$

Для монотонно возрастающей непрерывной функции $\varphi : (0,+\infty] \to \mathbb{R}_+$ такой, что $\varphi(+0) = 0$ определим φ-точку Лебега как $x \in X$, для которой

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} \varphi(|f - f_{B(x,r)}|)\,d\mu = 0. \tag{8}$$

В частном случае $\varphi(t) = t^q$, $q > 0$, точки x, удовлетворяющие (8), будем называть q-точками Лебега. Отметим, что в силу неравенства Гельдера понятие q-точки Лебега тем сильнее, чем больше q. Более того, понятие φ-точки Лебега тем сильнее, чем быстрее на бесконечности растет φ.

В случае $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ при $p < 1$ функция f не обязана быть локально суммируемой, и интегральные средние могут не существовать. Поэтому понятие точки Лебега (как и φ-точки Лебега) теряет смысл.

Адекватной заменой интегральным средним могут служить постоянные наилучшего приближения $I_B^{(p)}f$ (2). Естественно ввести следующие определения. Будем говорить, что $x \in X$ является новой точкой Лебега для функции $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$, если существует конечный предел

$$\lim_{r\to+0} I^{(p)}_{B(x,r)}f.$$

Аналогичным образом вводятся понятия новой q-точки Лебега и φ-точки Лебега.

Оценим размер исключительного множества в теореме Лебега с помощью емкостей (7).Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 3 ([1]) *Пусть* $\alpha \in (0,1]$, $0 < p < \gamma/\alpha$ *и* $f \in M^p_\alpha(X)$. *Тогда существует такое множество* $E \in X$, *что* $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ *и для любого* $x \in X \setminus E$ *существует предел*

$$\lim_{r\to+0} I^{(p)}_{B(x,r)}f = f^*(x). \tag{9}$$

Более того,

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q \, d\mu = 0, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}. \tag{10}$$

Условие (10) говорит, что $X \setminus E$ состоит из q-точек Лебега.

Существенно новым в теореме является то, что можно взять любое $p > 0$. Для классических точек Лебега ($p \geq 1$) утверждение теоремы хорошо известно.

В дополнение к теореме 3 для любого $x \in X \setminus E$ мы можем утверждать следующее: если $p \geq \frac{\gamma}{\gamma+\alpha}$ (в этом случае $q \geq 1$), то

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|^q \, d\mu = 0,$$

и, в частности,

$$\lim_{r\to+0} f_{B(x,r)} = f^*(x).$$

Это утверждение показывает, что новые точки Лебега совпадают с классическими в тех случаях, когда последние определены.

Также наилучшие приближения можно заменить медианами. Другими словами,

$$\lim_{r\to+0} m^\delta_f(B(x,r)) = f^*(x)$$

и

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} |f - m_f^{\delta}(B(x,r))|^q \, d\mu = 0.$$

Далее оценим массивность исключительного множества в терминах внешней меры, включающей в себя меру Хаусдорфа как частный случай.

Теорема 4 ([1]) *Пусть* $\alpha > 0$, $0 < p < \gamma/\alpha$ *и* $f \in M_\alpha^p(X)$. *Пусть также задана внешняя мера* ν, *удовлетворяющая условию* (6) *с измеряющей функцией* h *вида* (4), *такой, что*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi(2^{-i}) < \infty. \tag{11}$$

Тогда существует такое множество $E \subset X$, *что* $\nu(E) = 0$ *и для любого* $x \in X \setminus E$ *существует предел* (9) *и выполнено* (10).

Заметим, что $\nu = \mathrm{Cap}_{\alpha,p}$ удовлетворяет условию (6) при $\varphi = 1$, для которой (11) не выполнено. Поэтому теорема 3 не может быть выведена из теоремы 4. Примером внешней меры ν, удовлетворяющей условию теоремы, может служить модифицированная мера Хаусдорфа $\mathcal{H}^h$, откуда получаем следующее

Следствие 1 ([1]) *Пусть* $\alpha > 0$, $0 < p < \gamma/\alpha$ *и* $f \in M_\alpha^p(X)$, *и задана измеряющая функция* (4), *удовлетворяющая условию* (11). *Тогда существует такое множество* $E \subset X$, *что* $\mathcal{H}^h(E) = 0$ *и для любого* $x \in X \setminus E$ *существует предел* (9) *и выполнено* (10).

Можно вывести результат аналогичный теореме 4, но с использованием медиан $m_f^{\delta}(B(x,r))$ на месте наилучших приближений $I_{B(x,r)}^{(p)} f$.

Следствие 2 ([1]) *Пусть* $\alpha > 0$, $0 < p < \gamma/\alpha$ *и* $f \in M_\alpha^p(X)$, *и задана измеряющая функция* (4), *удовлетворяющая условию* (11). *Тогда существует такое множество* $E \subset X$, *что* $\mathcal{H}^h(E) = 0$ *и для любого* $x \in X \setminus E$ *существует предел*

$$\lim_{r\to+0} m_f^{\delta}(B(x,r)) = f^*(x),$$

и выполнено (10).

Далее мы рассмотрим теорему, позволяющую оценивать размеры дополнения ко множеству, на котором «средние» $I_{B(x,r)}^{(p)} f$ сходятся с определенной скоростью.

Теорема 5 ([1]) *Пусть заданы* $0 < \alpha$, $0 < p < \gamma/\alpha$ *и внешняя мера* ν, *удовлетворяющая условию* (6), *где* h *имеет вид* (4) *с функцией* φ, *удовлетворяющей условию* (11).

Тогда для любой функции $f \in M^p_\alpha(X)$ *существует такое множество* $E \subset X$, *что* $\nu(E) = 0$ *и для всех* $x \in X \setminus E$

$$\lim_{r \to +0} [\varphi(r)]^{-1} \left[f^*(x) - I^{(p)}_{B(x,r)} f\right] = 0,$$

$$\lim_{r \to +0} [\varphi(r)]^{-1} \left[m^\delta_f(B(x,r)) - f^*(x)\right] = 0, \quad 0 < \delta \le 1/2,$$

$$\lim_{r \to +0} [\varphi(r)]^{-1} \left(\fint_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q \, d\mu \right)^{1/q} = 0, \quad \text{где} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

В частности, множество E из теоремы 5 удовлетворяет условию

$$\mathcal{H}^{(\alpha-\beta)p}(E) = \mathbb{H}^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(E) = 0$$

при $0 < \beta < \alpha$.

Далее рассмотрим так называемый критический случай $\gamma = \alpha p$. Здесь естественно ожидать, что размеры дополнения ко множеству φ-точек Лебега будут малы, где φ — функция, растущая на бесконечности быстрее, чем любая степенная. Следующая теорема показывает, что можно взять функцию

$$\varphi(t) = e^{ct} - 1$$

с любой положительной постоянной c.

Теорема 6 ([4]) *Пусть* $p > 0$, $1 \ge \alpha \ge 0$, $\gamma = \alpha p$ *и* $f \in M^p_\alpha(X)$. *Тогда существует множество* $E \subset X$ *такое, что для* $x \in X \setminus E$ *существуют пределы*

$$\lim_{r \to +0} f_{B(x,r)}, \lim_{r \to +0} I^{(p)}_{B(x,r)} f$$

Кроме того,

$$\lim_{r \to +0} \fint_{B(x,r)} \left[\exp\left\{b \left| f - I_{B(x,r)} \right| \right\} - 1\right] \, d\mu = 0,$$

где в качестве $I_{B(x,r)}$ *можно взять как постоянную наилучшего приближения* $I^{(p)}_{B(x,r)} f$, *так и среднее интегральное* $f_{B(x,r)}$. *При этом*

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0, \quad \dim_{\mathrm{H}}(E) = 0.$$

В **главе 4** рассматривается аппроксимация Лузина для функций из соболевских классов $M^p_\alpha(X)$.

Основной результат этой главы формулируется следующим образом.

Теорема 7 ([3]) *Пусть* $0 < \beta \le \alpha \le 1$, $0 < p < \gamma/\alpha$ *и задана функция* $f \in M^p_\alpha(X)$. *Пусть также задана внешняя мера* ν, *регулярная в нуле и удовлетворяющая условию* (6) *с функцией* $h(t) = t^{(\alpha-\beta)p}$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существуют функция* f_ε *и открытое множество* $O \subset X$, *такие, что*

1) $\nu(O) < \varepsilon$,

2) $f = f_\varepsilon$ *на* $X \setminus O$,

3) $f_\varepsilon \in M^p_\alpha(X)$ *и* $f_\varepsilon \in H^\beta(B)$ *для любого шара* $B \subset X$,

4) $\|f - f_\varepsilon\|_{M^p_\alpha(X)} < \varepsilon$.

Условия 1) и 2) теоремы 7 говорят, что мера исключительного множества, на котором исправляющая функция f_ε не совпадает с исходной функцией f, может быть сделана сколь угодно малой. При этом f_ε обладает дополнительными свойствами: условие 3) утверждает, что приближающая функция принадлежит исходному пространству и локально является гельдеросвкой, а условие 4) говорит, что f_ε достаточно хорошо приближает f по норме исходного пространства.

В качестве примеров внешней меры, удовлетворяющих условию теоремы, можно взять соответствующие емкости $\nu = \mathrm{Cap}_{(\alpha-\beta),p}$ (7), модифицированные вместимости Хаусдорфа $\nu = \mathcal{H}_1^{(\alpha-\beta)p}$ (5), а также классические вместимости Хаусдорфа $\nu = H_1^{\gamma-(\alpha-\beta)p}$ (3) (при условии $\mu(X) < \infty$).

Следствие 3 ([3]) *Пусть* $0 < \beta \le \alpha \le 1$, $0 < p < \gamma/\alpha$ *и задана функция* $f \in M^p_\alpha(X)$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существуют функция* f_ε *и открытое множество* $O \subset X$, *такие, что*

1) $\mathrm{Cap}_{(\alpha-\beta),p}(O) < \varepsilon$, $H_1^{\gamma-(\alpha-\beta)p}(O) < \varepsilon$, $\mathcal{H}_1^{(\alpha-\beta)p}(O) < \varepsilon$

2) $f = f_\varepsilon$ *на* $X \setminus O$,

3) $f_\varepsilon \in M^p_\alpha(X)$ *и* $f_\varepsilon \in H^\beta(B)$ *для любого шара* $B \subset X$,

4) $\|f - f_\varepsilon\|_{M^p_\alpha(X)} < \varepsilon$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Дана оценка массивности исключительного множества в теореме Лебега для классов $M^p_\alpha(X)$ в терминах емкостей при $p > 0$ [1, 2].

2. Получены оценки массивности дополнения ко множеству точек Лебега в терминах внешней меры, включающие в себя случаи меры и модифицированной меры Хаусдорфа [1]. Рассмотрена теорема Лебега в критическом случае [4].

3. Решена задача об аппроксимации Лузина локально гельдеровскими функциями в классе $M^p_\alpha(X)$ при $p > 0$ [3].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут применяться при исследовании тонких свойств функций соболевского типа, а также могут быть использованы при дальнейшем развитии теории функциональных пространств и в учебном процессе при чтении спецкурсов по современному анализу.

Результаты диссертации уже использовались в ряде работ, посвященных тонким свойствам функций из обобщенных пространств Соболева, постоянным наилучшего приближения в L^p.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. Bondarev, S.A. Fine properties of functions from Hajłasz-Sobolev classes M^p_α, $p > 0$, I. Lebesgue points / S.A. Bondarev, V.G. Krotov // Известия НАН Армении. Математика. — 2016. — Т. 51, № 6. — С. 3–22.

2. Бондарев, С.А. Свойства емкостей из классов Соболева на метрических пространствах с мерой / С.А. Бондарев // Труды института математики. — 2016. — Т. 24, № 2. — С. 20–31.

3. Бондарев, С.А. Тонкие свойства функций из классов Хайлаша–Соболева M^p_α при $p > 0$, II. Аппроксимация Лузина / С.А. Бондарев, В.Г. Кротов // Известия НАН Армении. Математика. — 2017. — Т. 52, № 1. — С. 26–37. (переведена на английский язык: Journal of contemporary mathematical analysis. — 2017. — Vol. 52, №. 1. — P. 30–37)

4. Бондарев, С.А. Точки Лебега для функций из обобщенных классов Соболева $M^p_\alpha(X)$ в критическом случае / С.А. Бондарев // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2018. — № 3. — С. 4–11.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

5. Bondarev, S. Lebesgue points in Sobolev type classes on metric measure spaces for $p > 0$ / S. Bondarev, V. Krotov, M. Prohorovich // International conference «Harmonic analysis and approximation, VI», Tsaghkadzor, Armenia, September 12–18, 2015. — Tsaghkadzor, Armenia, 2015. — P. 21–23.

6. Bondarev, S. Luzin approximation for Sobolev type classes on metric measure spaces fro $p > 0$ / S. Bondarev, V. Krotov // International conference «Harmonic analysis and approximation, VI»,Tsaghkadzor, Armenia, September 12–18, 2015. — Tsaghkadzor, Armenia, 2015. — P. 58–59.

7. Бондарев, С.А. Тонкие свойства функций из классов Хайлаша–Соболева M^p_α при $p > 0$. Точки Лебега / С.А. Бондарев, В.Г. Кротов // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 18-ой международной Саратовской зимней школы, Саратов, 27 января – 3 февраля, 2016. — Саратов, 2016. — С. 68–73.

8. Бондарев, С.А. Аппроксимация Лузина для классов Соболева на метрических пространствах с мерой при $p > 0$ / С.А. Бондарев, В.Г. Кротов // Международная научная конференция «XII Белорусская математическая конференция»: материалы конференции, Минск, 5 – 10 сентября, 2016. В 5 ч. — Минск, 2016. — Ч. 1. — С. 4–5.

9. Бондарев, С.А. Свойства емкостей из классов Соболева на метрических пространствах с мерой [Электронный ресурс] / С.А. Бондарев // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ – 2017», Москва, 10 – 14 апреля, 2017 / Моск. гос. ун-т; отв. ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — М., 2017. — 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM).

10. Бондарев, С.А. Точки Лебега для функций из классов Соболева на связных метрических пространствах / С.А. Бондарев // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 19-ой международной Саратовской зимней школы, посвященной 90-летию со дня рождения академика П.Л. Ульянова, Саратов, 29 января – 2 февраля, 2017. — Саратов, 2017. — С. 57–60.

Тезисы

11. Бондарев С.А. Тонкие свойства функций из пространств Хайлаша–Соболева W^p_α, $p > 0$ / С.А. Бондарев, В.Г. Кротов // Тезисы докладов международной конференции «Функциональные пространства и теория приближения функций», посвященной 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского, Москва, 25 – 29 мая, 2015. — Москва, 2015. — С. 162–164.

РЕЗЮМЕ

Бондарев Сергей Александрович

ТОЧКИ ЛЕБЕГА И АППРОКСИМАЦИЯ ЛУЗИНА ДЛЯ СОБОЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ключевые слова: пространство однородного типа, пространства Соболева, тонкие свойства функций, точки Лебега, аппроксимация Лузина, емкости, мера Хаусдорфа.

Целью диссертационной работы является исследование тонких свойств функций из классов Соболева на метрических пространствах.

В диссертации использовались современные методы вещественного и функционального анализа, связанные с различными максимальными операторами, оценками исключительных множеств в терминах емкостей, а также мер и размерностей Хаусдорфа.

В диссертации получены следующие новые результаты:

— получены оценки массивности исключительного множества в теореме Лебега для функций из классов $M^p_\alpha(X)$ в терминах емкостей, включая случай $p > 0$.

— получены оценки массивности исключительного множества в теореме Лебега для функций из классов $M^p_\alpha(X)$ в терминах внешних мер, включая случай $p > 0$ и критический случай $\gamma = \alpha p$.

— получены оценки массивности исключительного множества в теореме Лузина для функций из классов $M^p_\alpha(X)$ в терминах внешних мер, включая случай $p > 0$.

Результаты могут быть использованы в научных исследованиях по анализу на метрических пространствах с мерой, по гармоническому анализу и в учебном процессе, при чтении специальных курсов по этим разделам современной математики.

РЭЗЮМЭ

Бондараў Сяргей Аляксандравіч

ПУНКТЫ ЛЕБЕГА І АПРАКСІМАЦЫЯ ЛУЗІНА СОБАЛЕЎСКІХ ФУНКЦЫЙ НА МЕТРЫЧНЫХ ПРАСТОРАХ

Ключавыя словы: прастора аднароднага тыпу, прасторы Собалева, тонкія ўласцівасці функцый, пункты Лебега, апраксімацыя Лузіна, ёмістасці, мера Хаусдорфа.

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца даследаванне тонкіх уласцівасцяў функцый, якія належаць класам Собалева на метрычнай прасторы.

У дысертацыі выкарыстоўваліся сучасныя метады рэчаіснага і функцыянальнага аналізу, звязаныя з рознымі максімальнымі аператарамі, ацэнкамі выключных мностваў у тэрмінах ёмістасцей, а таксама мер і памернасцей Хаусдорфа.

У дысертацыі атрыманы наступныя новыя вынікі:

— атрыманы ацэнкі памераў выключнага мноства у тэарэме Лебега для функцый з класаў $M^p_\alpha(X)$ у тэрмінах ёмістасцей, уключаючы выпадак $p > 0$.

— атрыманы ацэнкі памераў выключнага мноства у тэарэме Лебега для функцый з класаў $M^p_\alpha(X)$ у тэрмінах знешніх мер, уключаючы выпадак $p > 0$ і крытычны выпадак $p > 0$.

— атрыманы ацэнкі памераў выключнага мноства у тэарэме Лузіна для функцый з класаў $M^p_\alpha(X)$ у тэрмінах знешніх мер, уключаючы выпадак $p > 0$.

Вынікі могуць быць выкарыстаны ў навуковых даследаваннях па аналізе на метрычных прасторах з мерай, па гарманічнаму аналізу і ў навучальным працэсе, пры чытанні спецыяльных курсаў па гэтых раздзелах сучаснай матэматыкі.

SUMMARY

Bondarev Sergey

LEBESGUE POINTS AND LUZIN APPROXIMATION FOR SOBOLEV TYPE FUNCTIONS ON METRIC SPACE

Keywords: space of homogeneous type, Sobolev spaces, fine properties of functions, Lebesgue points, Luzin approximation, capacities, Hausdorff measure.

The aim of the thesis is to study the fine properties of functions form Sobolev classes on metric space.

The thesis used modern methods of real and functional analysis related to different maximal operators, estimates of exceptional sets in terms of capacities, Hausdorff measures and dimensions.

The following new results were obtained:

— estimate of the size of the exceptional set in Lebesgue theorem for functions from classes $M^p_\alpha(X)$ in terms of capacities including the case $p > 0$.

— estimate of the size of the exceptional set in Lebesgue theorem for functions from classes $M^p_\alpha(X)$ in terms of outer measures including the case $p > 0$ and the critical case $\gamma = \alpha p$.

— estimate of the size of the exceptional set in Luzin theorem for functions from classes $M^p_\alpha(X)$ in terms of outer measures including the case $p > 0$.

The results can be used in research on the analysis on metric measure spaces, harmonic analysis, and in the learning process, when reading special courses on these topics in modern mathematics.