СИЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

В. И. Корзюк, О. А. Ковнацкая (Минск, Беларусь)
Korzyuk@bsu.by, Kovnatskaya@bsu.by

Пусть $Q = (0,T) \times \Omega$ — область $(n+1)$-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ независимых переменных $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $x_0 \in (0,T)$, $\boldsymbol{x}' = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Для функции $u\colon Q \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ рассматривается линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка с оператором составного типа в главной части

$$\mathcal{L}u \equiv \mathcal{L}^{(0)}u + A^{(2)}u = f, \tag{1}$$

где $\mathcal{L}^{(0)}u = \dfrac{\partial^4 u}{\partial x_0^4} - a^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^4 u}{\partial x_i^4}$, $a^2 > 0$ — некоторая вещественная постоянная, $A^{(2)}u = \sum\limits_{i=0}^{n} a^{(i)}(\boldsymbol{x}) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + b(\boldsymbol{x}) \dfrac{\partial u}{\partial x_0} + c(\boldsymbol{x})u$, $a^{(i)} \in C^2(\overline{Q})$, $i = 0, \dots, n$, $b \in C^1(\overline{Q})$, $c \in C(\overline{Q})$, $f\colon Q \ni \boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ — заданная квадратично-суммируемая функция. Под уравнением составного типа мы понимаем уравнение с оператором, характеристический многочлен которого имеет и действительные, и комплекснозначные характеристики.

Граница ∂Q области Q состоит из нижнего $\Omega^{(0)} = \{\boldsymbol{x} \in \partial Q \mid x_0 = 0\}$, верхнего $\Omega^{(T)} = \{\boldsymbol{x} \in \partial Q \mid x_0 = T\}$ оснований и боковой поверхности $\Gamma = \{\boldsymbol{x} \in \partial Q \mid 0 < x_0 < T\}$.

К уравнению (1) присоединяем граничные условия на $\Omega^{(0)}$ и $\Omega^{(T)}$:

$$u|_{\Omega^{(0)}} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(0)}} = \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3}\right|_{\Omega^{(0)}} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_0}\right|_{\Omega^{(T)}} = 0$$

и граничные условия на боковой поверхности Γ: одно из граничных условий $u|_\Gamma = \left.\dfrac{\partial^3 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^3}\right|_\Gamma = 0$ и одно из условий $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_\Gamma = \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{\nu}^2}\right|_\Gamma = 0$, где $\boldsymbol{\nu} = (\nu_0, \dots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней относительно Q нормали к гиперповерхности Γ. Таким образом, мы рассматриваем четыре граничных задачи для уравнения (1).

В подходящих функциональных пространствах B и H, где в B входят обобщенные производные искомого решения до третьего порядка включительно, при некоторых ограничениях методом энергетических неравенств и операторов осреднения с переменным шагом доказываются существование и единственность их сильных решений.

Литература

1. Корзюк В. И. *Уравнения математической физики.* Мн.: БГУ, 2011.