# О СЛАБОМ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СОСТАВНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

*В. И. Корзюк, В. В. Дайняк, А. А. Протько (Минск, Беларусь)*
*korzyuk@bsu.by, dainyak@bsu.by, arthur.protsko@gmail.com*

В настоящей работе изучается однозначначная разрешимость задачи типа Дирихле для уравнений составного типа третьего порядка с постоянными коэффициентами в главной части. Эти неклассические линейные дифференциальные уравнения относительно неизвестной функции $u(x)$ переменных $x = (x_0, x_1, x_2)$ запишем в виде

$$\mathfrak{L}u = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + b_1\frac{\partial}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + a_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + a_2^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u + \mathfrak{L}_1(x, D)u = f(x),$$

где

$$\mathfrak{L}_1(x, D)u = p_0(x)\frac{\partial u}{\partial x_0} + p_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + p_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda(x)u.$$

Здесь $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ постоянные, коэффициенты полинома $\mathfrak{L}_1(x, D)$ и их производные $\partial p_i(x)/\partial x_i$ $(i = 0, 1, 2)$ измеримы и ограничены. При некоторых дополнительных условиях на коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$, которые будут сформулированы ниже и которые являются достаточными, методами функционального анализа доказывается в обобщенной постановке однозначная разрешимость данного уравнения в произвольной области при наличии простейших граничных условий (условий типа Дирихле). Суть постановки задачи в следующем. Обозначим через $\Omega$ произвольную ограниченную область пространства переменных $x$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, а через $\nu = (\nu_0, \nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$.

Пусть $\mathfrak{L}_0(\nu) = (\nu_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2)(\nu_0^2 + a_1^2\nu_1^2 + a_2^2\nu_2^2)$. В области $\Omega$ рассмотрим исходное уравнение относительно функции $u(x)$, которая удовлетворяет однородным граничным условиям

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega^-} = 0,$$

где $\partial\Omega^-$ — часть границы $\partial\Omega$, в точках которой $\mathfrak{L}_0(\nu) < 0$.

Наряду с задачей, описанной выше, также рассматриваем сопряженную к ней задачу.

Доказываются энергетические неравенства для расширений $L$ и $L^+$ исходных операторов.

**Теорема.** *Если выполняются следующие условия:*

1) $a_1 \neq 0, \; a_2' \neq 0,$
2) $\dfrac{\partial p_0(x)}{\partial x_0} + \dfrac{\partial p_1(x)}{\partial x_1} + \dfrac{\partial p_2(x)}{\partial x_2} + 2\lambda(x) > 0,$

*то для любых $u$ и $v$ из $H_0^1(\Omega)$ справедливы неравенства*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c\|Lu\|_{H_0^{-1}}, \quad \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c^*\|L^+u\|_{H_0^{-1}},$$

*где постоянные $c > 0$ и $c^* > 0$ не зависят от функций $u$ и $v$.*

Методом энергетических неравенств доказывается существование и единственность слабого решения рассматриваемых задач.